

# 一般化二人ライツアウトの完全解析と可視化の研究

佐藤 優† 前山和喜†

工学院大学†

## 1. はじめに

本発表は、ライツアウト (Lights Out) と呼ばれるパズルに対して、制限を加えて二人用の不偏ゲーム化したもの完全解析した結果について論じる。

ライツアウトの盤面は、 $5 \times 5$  の計 25 個のそれぞれ消灯か点灯の状態となるライトから構成される。各ライトを押すと、特定の規則（以後「反転パターン」）にしたがってライトの ON/OFF が切り替わる。最終的に全てのライトを消灯状態にするとパズルを解いたことになる。

ライツアウトは、玩具として有名であるが、学術研究の題材としてもこれまでたびたび用いられてきた。数理モデルの側面からパズルゲームの抽象化と具現化について扱った前田 (2001) [1], 線形代数の側面からパズルの盤面を一般化したライツアウトについて扱った中原 (2013) [2] などがある。

本発表では、反転パターンを一般化した上で二人有限確定完全情報のゲームに変形したライツアウトに対して完全解析を行なった結果と、その可視化について報告する。

## 2. ライツアウトの性質

### 2.1. ライツアウトの基本操作

ライツアウトは、ライトを押すという基本操作 (図 1) のみでパズルを完成 (全てのライトを消灯させる) させていく。この基本操作には、ライトを押す順番は最終的な盤面に影響しないという性質 1 と、同じライトを 2 度以上押す意味は無いという性質 2 がある。これらは 2 進法の排他的論理和の性質から容易に導くことができる。

ライツアウトはパズルの多く点を一般化しやすい。例として以下に 3 つを取り上げる。

### 2.2. ライツアウトの一般化 1: 反転パターン

反転パターンを一般化し、ライトを押したときに反転するライトの位置や個数を変化させる。複数の反転パターンの中から操作を選択させる

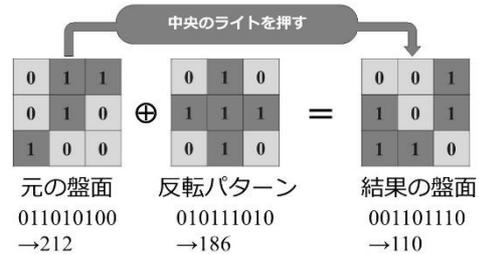


図 1 ライツアウトにおける基本操作

ようにすることもできる。本発表ではこの一般化について様々な実験を行なった。

### 2.3. ライツアウトの一般化 2: 盤面

本発表では盤面の大きさは  $3 \times 3$  として扱うが、そもそも盤面は必ずしも方形である必要は無い。グラフの様にノードと接続の関係さえ定義してあれば反転パターンと共に一般化することができる [2]。

### 2.4. ライツアウトの一般化 3: ライトの状態

ライトを点灯と消灯以外の状態とすることも考えられる。例えばライトを状態 A  $\rightarrow$  状態 B  $\rightarrow$  状態 C  $\rightarrow$  状態 A といった 3 つの状態を循環するようにもできる。このとき基本操作の性質のうち、ライトを 2 回以上押す意味は無いという性質は成り立たなくなるが、剰余系の考え方をを用いることで数学的に扱うことができる。

## 3. ライツアウトの二人不偏ゲーム化

本発表では、反転パターンを一般化した上で、さらにライツアウトを二人用の不偏ゲーム化する。プレイヤーは交互に盤面のライトを押し (選択し) 反転していく。性質 2 より同じライトを 2 度押すと結果的に状態が変わらないことから、全てのライトは 1 度しか押しはけないこととする。よってゲームは全てのライトが消灯するか、全てのライトが 1 度押された状態が終了局面となり、ライトを押す (手番をプレイする) ことができなくなったプレイヤーが負けという正規系のゲームとなる。

このゲームは二人零和有限確定完全情報ゲームであり、その中でも同一着手の条件を満たしているため不偏ゲームである。不偏ゲームは理論的には起こりうる全ての手を完全に読むこと

Strongly Solving and Visualization of Generalized 2-player Lights Out

Sato Masaru†, Kazuki Maeyama†

† Kogakuin University

が可能であり、お互いのプレイヤーが最善手を尽くせば任意のゲームの状態から決着を判定できるが知られている[3].

#### 4. ライツアウトの数値化

ライツアウトの解析のために盤面の状態を数値化する. 点灯しているライトを 1, 消灯しているライトを 0 とすると, 左上から順番に読むことで 1 と 0 からなる 9 桁の 2 進数と見なせる. この値を「盤面值」とし, 記号  $s$  で表す.

さらに, 1 度押したライトは押せないというルールより, 同じ盤面值であっても押せるライトが違うということが考えられる. 押せるライト (1 度も押していないライト) を 1, 押せないライト (すでに 1 度押したライト) を 0 とすると盤面值と同様に押せるライトの情報を 9 桁の 2 進数に変換することができる. この値を「操作値」と呼び, 記号  $u$  で表す.

$s$  と  $u$  の 2 つの 2 進 9 桁によってゲームの全状態を表すことができ,  $2^9 \times 2^9 = 2^{18} = 262144$  がこのゲームの全状態数である.

また, 同じように反転パターンも数値化できる. ライトを押した時に状態が変化するライトを 1, 変化しないライトを 0 とすると 9 桁の 2 進数を生成できる. 押すライトによって変化するライトは違うため 1 種類の反転パターンにつき 9 種類の値が生成される. この値の集合を反転パターンの「操作リスト」と呼ぶ. 図 1 において元の盤面は  $011010100_{(2)}$  であり, 盤面值は 212 となる. 操作は  $010111010_{(2)}$  であり, 操作の値は 186 となる. 結果の盤面值は, 元の盤面值と操作の値の排他的論理和から  $001101110_{(2)} = 110$  となる.

#### 5. ゲームの完全解析とゲーム木の分析

数値化・対戦ゲーム化したライツアウトを, コンピュータを用いて完全解析した結果, 1 つの反転パターンを基本操作としたゲームに対して, 初期盤面の違いによる 512 種類の木からなるゲーム木を形成することが分かった. これらの木はほぼ同型であり, 違いは全てのライトが 0 になった盤面からの遷移がないことのみである.

ゲームの性質上, ライトの回数回の着手しかないため, ゲーム木は操作値の各桁が 1 になっている bit 数 (残り押せる回数) ごとの階層構造を持った木 (図 2) になる. 初期盤面とライトの数 (9 個) の計 10 階層になることを可視化することで再確認した.

また, 回転させると同じ反転パターンになる反転パターン群を削除すると反転パターンは 140 種類になり, その内, 操作リストに重複が無い

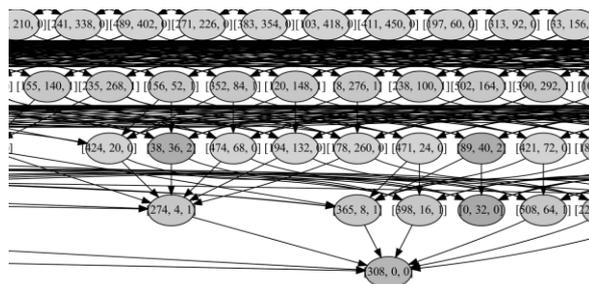


図 2 可視化したゲーム木の一部

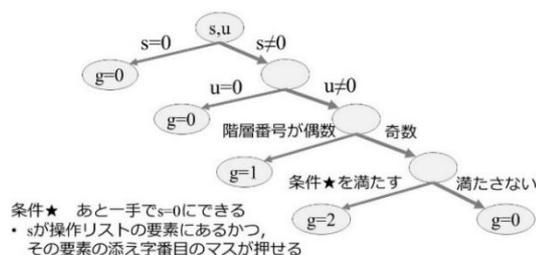


図 3 グランディ数の判定木

反転パターンは 99 種類となった. さらにその内, 可能な基本操作の組み合わせにおいて最終的な操作に重複がない反転パターンは 44 種類となった. これらの種類の反転パターンの分析については本論で詳しく述べる.

二人用の不偏ゲーム化をしたことによってグランディ数を算出可能になり, 全局面に対してグランディ数を計算した. それを前述のゲーム木に対しさらに可視化し, 分析を行なうことで各局面のグランディ数を求める判定木を作成することができた (図 3). これにより対戦ゲーム化したライツアウトにおいて任意のゲームの局面で必勝手番を判定できるようになった.

#### 6. おわりに

本研究では, 1 人用パズルであるライツアウトの一般化と二人用の不偏ゲーム化を検討した上で可視化をした. 本稿では論じきれなかったが, 具体的なゲームの遷移や必勝判定は, 代数的な構造と一致していることも確認できた. 今後は, 一般化によるゲームの状態空間や反転パターンの縮約を数学的に意味づけていく.

#### 参考文献

[1] 前田篤彦, 杉山公造, 間瀬健二: 操作パズルの新しいメディアへの応用にむけて(2001).  
 [2] 中原諒太: ライツアウトパズルの解析 : 有限体上の線型代数の応用として(2013).  
 [3] MICHAEL H. ALBERT, RICHARD J. NOWAKOWSKI, DAVID WOLFE: Lessons in play : an introduction to combinatorial game theory(2005). 川辺治之 (訳): 組合せゲーム理論入門—勝利の方程式—(2011).