ミニガイスターのナッシュ均衡戦略

田中哲朗[1]　高岡峻[2]

概要：ミニガイスターはボードゲーム「ガイスター」の盤面を 6×6 から 4×4 に縮小し，各プレイヤの駒を 8 個ずつから 2 個ずつに減らしたゲームであり，Chen らにより提案された．ミニガイスターは，相手の駒の動きから相手の駒の色を推定するガイスターのゲーム要素を保ちつつ，状態数を減らしたゲームだが，同じ盤面配置であっても初期配置からの履歴により，プレイを変化させる必要があるため，一般的な方法を用いてナッシュ均衡戦略を求めることが困難である．
本研究では，初期配置からスタートした時に，相手がどのような戦略を採用しても平均利得 0 以上で有限手数でゲームを終わらせる戦略が，プレイヤ 1，プレイヤ 2 双方に存在することを示す．ミニガイスターは零和ゲームなので，これらがナッシュ均衡戦略であり，ナッシュ均衡における各プレイヤの平均利得が 0 であることが示される．また，提案する戦略はゲームを終わらせる時以外は自分の駒の色によって動きを変化させない戦略であることから，ミニガイスターにおいて相手駒の推定の重要性が低いと推定できる．
駒の数を増やした時にも同様の方法で，ナッシュ均衡戦略を求めることができるかどうかを調べるため，2 駒対 3 駒のナッシュ均衡戦略を求めようと試みた．その結果，3 駒側の色が青赤赤の場合にはナッシュ均衡戦略を求めることができ平均利得 0 であることがわかった．また，3 駒側の色が青青赤の場合については，ナッシュ均衡戦略を示せなかったが，3 駒側の平均利得は $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ の間であることを示した．

Nash Equilibrium Strategies for Mini-Geister

Tetsuro Tanaka[1]　Shun Takaoka[2]

Abstract: Mini Geister is a game derived by shrinking the board size of the board game Geister from 6×6 to 4×4 and reducing each player's pieces from eight to two. It was proposed by Chen et al. [1]. Mini Geister is a game that retains the game element of Geister where players infer the color of an opponent's pieces based on their movements, while reducing the number of states. However, even with identical board positions, the gameplay might need to vary depending on the history from the initial position. This makes it challenging to determine Nash equilibrium strategies using conventional methods.
In this study, we show that there exists a strategy for both Player 1 and Player 2 to finish the game in a finite number of moves with an average gain of zero or more, no matter what strategy the opponent adopts when starting from the initial position. Since this is a zero-sum game, it is a Nash equilibrium strategy, and the average gain in Nash equilibrium is shown to be zero. The proposed strategy does not change its action according to the color of its own pieces except when ending the game, and thus the estimation of the opponent's pieces is considered to be insignificant in mini-games.
In order to investigate whether the Nash equilibrium strategy can be obtained in the same way when the number of pieces is increased, we attempted to obtain the Nash equilibrium strategy for the initial position of two pieces versus three pieces. As a result, we were able to find a Nash equilibrium strategy when the color of the 3-piece side is blue-red-red, and the average gain was found to be zero. For the case where the color of the 3-piece side is blue-blue-red, we could not show a Nash equilibrium strategy, but we showed that the average gain of the 3-piece side is between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{2}$.

1　東京大学情報基盤センター
Information Technology Center, The University of Tokyo
2　東京大学大学院総合文化研究科
Graduate School of Arts and Sciences, The University of Tokyo

1. はじめに

ミニガイスターは図 1 のようにボードゲーム「ガイスター」の盤面を 6×6 から 4×4 に縮小し，それぞれのプレイヤの駒を 8 個ずつから 2 個ずつに減らしたゲームであり，Chen らにより提案された [1]．ガイスターの小さい盤面，少ない持ち駒の変種は松崎らによっても提案されており [2]，松崎らが x4y4g2b1 と命名した変種がミニガイスターに対応している．

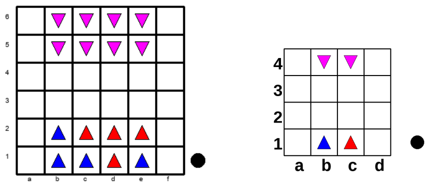


図 1　ガイスターとミニガイスターの初期配置例

ミニガイスターのルールは以下のようになる．

- 4×4 の盤面を使い 2 人のプレイヤそれぞれが赤駒 1 個，青駒 1 個を使って遊ぶ．盤面の各マスには一つの駒しか占有できない．本稿ではプレイヤ 1 の駒を上向き三角で，プレイヤ 2 の駒を下向き三角で表す．
- 自分の駒のみ色がわかる．各プレイヤは，相手の駒の色がわからないままプレイする．本稿では色がわからない駒を文献 [3] 等の先行研究にならって，紫駒で表現する (図 1 参照)．
- まず，各プレイヤは自分の駒 2 個を初期配置 (プレイヤ 1 は図 1 右の b1, c1, プレイヤ 2 は図 1 右の b4, c4 の 2 箇所に相手に色を知られないように置く (図 1 右ではプレイヤ 1 が b1 に青駒，c1 に赤駒を配置している)．
- 各プレイヤは交互にプレイする．図 1 以下，本稿ではプレイヤ 1 の手番では盤の右下に黒い点を，プレイヤ 2 の手番では盤の右上に黒い点を描く．
- 手番のプレイヤは，自分の駒を一つ選んで上下左右に 1 駒動かす (パスは合法手ではない)．自分の駒にすでに占有されているマスには移動できない．相手の駒に占有されているマスには移動可能で，移動した場合は，相手の駒を取り去り，色をチェックする．相手駒が赤駒の場合は手番のプレイヤの負け，青駒の場合は手番プレイヤの勝ちとなる．
- 基本的には盤の外には移動できないが，脱出マス (プレイヤ 1 は図 1 の a4, d4, プレイヤ 2 は図 1 の a1, d1) に手番プレイヤの青駒がある場合は盤の外に脱出可能で，脱出すると手番プレイヤの勝ちとなる．

元のガイスターと比べると盤面が小さくなっているとともに，駒数も減っている．そのため，元のガイスターでは，「すべての」相手の赤駒を取ると負け，「すべての」相手の青駒を取ると勝つルールだったが，ミニガイスターでは相手の駒を取るとその瞬間にゲームの勝敗が決する．なお，本稿ではゲームに勝つ際の利得を 1，負けた時の利得を-1 として扱う．

2. ナッシュ均衡戦略の構築

ミニガイスターなどの不完全情報ゲームでは，同じ情報集合に対して確率的に行動する混合戦略が有効であり，二人零和ゲームであるため，有限ゲームであればナッシュ均衡 [4] が存在する．ミニガイスターの初期配置で双方がナッシュ均衡戦略を採用したときの双方の利得は 0 であると予想されているが，これまで確かめられていなかった．

各プレイヤが手を選択する際に利用できる情報集合が有限なゲームにおけるナッシュ均衡戦略は Counter Factual Regret Minimization [5] 等の手法で求めることができるが，ミニガイスターは現在の駒の配置だけでなく，ゲームの履歴が行動の選択に影響を及ぼすゲームであるため，これらの手法の適用は困難である．

本研究では，初期配置で手番のプレイヤと手番を有しないプレイヤそれぞれについて，相手の戦略に関わらず平均利得が 0 以上となる戦略を具体的に構成する手法を提案する．後退解析により，このような戦略を構成できることが言えると，これらがナッシュ均衡戦略になり，初期配置での双方の平均利得が 0 であることを示すことができる．

以下に戦略の概要を述べる．

- 初期配置の自分の駒の色は乱数で決め，その色は以下の状況が発生するまで自分でも確認せずにプレイする (図 2 のように，自分の駒の色も未知であるとしては，紫駒で表現している)．
- 自分の駒が相手に取られた時に，取られた駒の色を初めて確認する．取られたのが赤駒のときは自分の勝ち (利得 1)，青駒の時は相手の勝ち (利得 -1) になる．初期配置の駒の色を乱数で決めて，色に関する情報を自分がプレイする際に使わないので，駒が取られた瞬間に乱数で色が決まるとみなすことができる．したがって，自分の駒を取られた時の平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．
- 図 2 左のように自分の手番で自分の駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．脱出した駒が赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．こちらも，駒を脱出させた瞬間に乱数で色が決まるとみなすことができるので，このときの平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．
- 図 2 右のように相手の 2 つの駒を両方取れる配置になったら，$\frac{1}{2}$ の確率でどちらかの駒を取る．取った駒が赤のときは自分の負け，青の時は自分の勝ちとなる．相手の駒の配置に関わらず，平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．

- プレイヤ 1 が平均利得が 0 になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

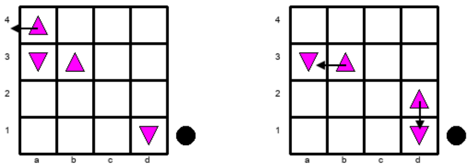


図 2　引き分け確定の配置

後退解析をおこなう際には，配置数のオーダーによって，オンメモリでおこなうのかディスク上に一部のデータを置くか，使用するプログラミング言語はどうするのか，並列プログラミングは必要か，メモリ上のデータ表現を工夫する必要があるかなどが決まる．今回の解析では，自分の駒を紫駒で区別せず，相手駒も紫駒とするので，配置の数は手番と，駒配置数の積として以下のように計算できる．

$$2 \times {}_{16}C_2 \times {}_{14}C_2 = 21840$$

ミニガイスターは左右対称なゲームなので，その性質を利用して配置数を $\frac{1}{2}$ ほどに減らすことも可能だが，配置数が，十分小さいのでこの性質は用いて状態数を減らすことはしない．

また，ミニガイスターの配置には偶奇性があることがわかる．駒が取られるとゲームは終わりなので，盤面には常に駒が 4 つずつあるが，2 つの配置を比較して，それぞれのプレイヤで，2 駒が 2 つの配置でどの座標にあるかを求めてマンハッタン距離の和を求める．この値がどちらも偶数，どちらも奇数の場合には，2 つの配置の手番が一致し，片方が偶数，他方が奇数の時には 2 つの配置の手番が入れ替わっていることになる．初期配置を固定した時の到達配置を考えた時は，この性質を使って配置数を $\frac{1}{2}$ に減らすことができるが，ここでは，その性質も用いて状態数を減らすことはしない．

3.　結果

後退解析の実装には，可読性を重視して Python 言語を用い，また配置も手番と盤面を Python 言語の tuple で表現し，テーブルも Python 言語の dictionary で実装した．ただし，遅い Python 言語でも短時間で後退解析を終えられるように，計算時間がすべての配置での move 数の和に比例するアルゴリズムを用いた．

後退解析を実行した結果，配置全体の集合 21840 のうち 12339 の配置で手番のプレイヤが有限手数 (最大 20 手) で上記の戦略を用いて平均利得 0 を達成できることがわかった．表 1 に，12339 配置で平均利得 0 を達成するのに必要な手数の分布を示す．

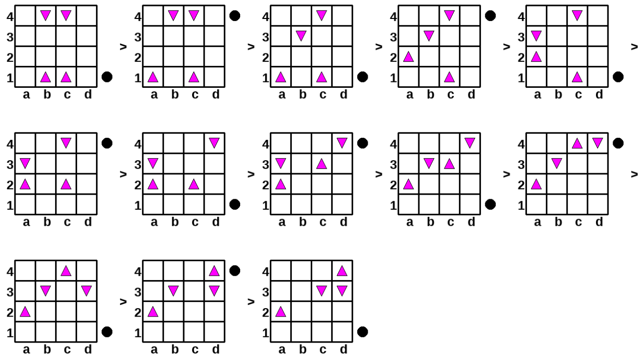


図 3　先手番から平均利得 0 を達成可能な戦略によるプレイの例

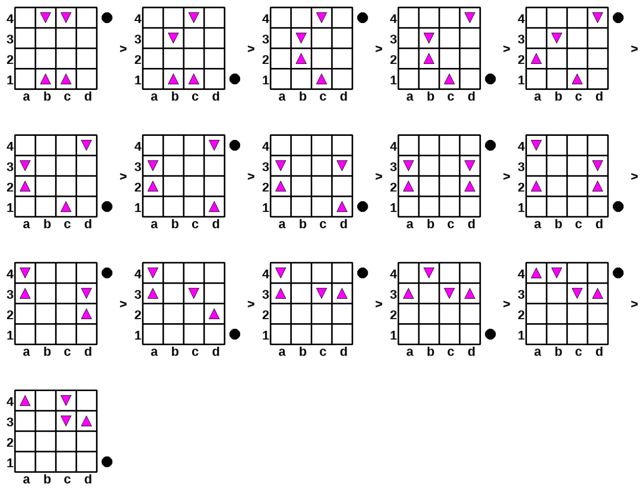


図 4　後手番から平均利得 0 を達成可能な戦略によるプレイの例

この中で特に，初期配置では，プレイヤ 1 は 13 手以内に，プレイヤ 2 は 16 手以内に，平均利得を 0 とすることが可能とわかった．図 3 が，プレイヤ 1 が 13 手で平均利得を 0 にするプレイ，図 4 がプレイヤ 2 が 16 手で平均利得を 0 にするプレイの例を示す．零和ゲームで，プレイヤ 1，プレイヤ 2 がそれぞれ，初期配置から相手の戦略にかかわらず平均利得を 0 を達成することが可能であることから，初期配置のゲーム値は 0 であり，各プレイヤの戦略がナッシュ均衡戦略になっていることが言える．今回は初期配置からプレイする際のナッシュ均衡戦略を構成したが，これは任意の配置での最善手を与えるものではないことに注意されたい．

本戦略を採用するプレイヤの対戦相手は駒の動きから駒の色を推定できない．すべてのナッシュ均衡戦略が，この性質を持つとは言えないが，この性質を持つナッシュ均衡戦略が存在することは，ミニガイスターの戦略において，相手駒の推定の重要性が小さいことを示唆している可能性がある．ガイスターで相手駒の推定が重要だと考えるならば，ガイスターを対象にした研究の評価にミニガイスターを用いるのは，不適切であろう．

表 1　本戦略で平均利得 0 を達成するのに必要な手数

手数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
配置数	3749	1976	2355	1198	696	307	242	253	281	262	254	277	231	136	63	47	2	2	2	6

4.　利得を 0 とする戦略の拡張

図 5 はプレイヤ 1 がこれまで述べた戦略で平均利得 0 にすることができない配置となっている．しかし，この配置は「相手の 2 つの駒の両方共，取れる配置になったら，$\frac{1}{2}$ の確率でどちらかの駒を取る.」を以下のように変更することで，平均利得を 0 とする戦略になる．

- $\frac{1}{2}$ の確率で相手の駒の色「赤青」または「青赤」のどちらかであると推測する．
- 推測が正しいときに，自分の駒の色を見て，自分の駒の色が「赤青」または「青赤」のどちらでも確実に勝てる．

容易にわかるように，「相手の 2 つの駒の両方共，取れる配置」はこの定義に含まれている．

図 5 がこの定義に当てはまることを示す．まず a1 にある相手駒を青と推定して, その推定があたった場合は，自分の駒の色に関わらずその駒を取れば 1 手で勝てる．一方 a1 にある相手駒が赤であると推定した場合は，自分の駒の色をみて，色に応じて，図 6，図 7 のような有限手で勝てる．

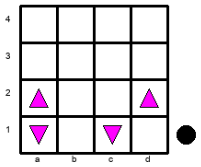


図 5　相手駒を正しくと推定できれば勝ち確定

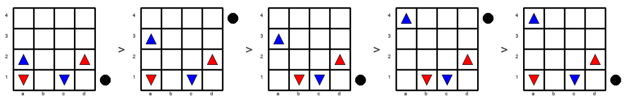


図 6　相手駒を赤青と推定し，自分の駒が青赤の時のゲーム進行例

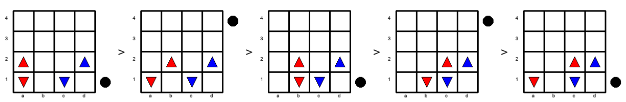


図 7　相手駒を赤青と推定し，自分の駒が赤青の時のゲーム進行例

この条件に変更後に後退解析をやり直すことにより，平均利得を 0 以上にすることが可能な配置数を 12339 から 12688 に増やすことができた．

5.　千日手の導入

無限に続くプレイを制限する千日手の概念を入れなくてもミニガイスターで双方のプレイヤが平均利得 0 を達成できるが，これ以降の解析では，千日手の概念を取り入れることにする．前節の後退解析をおこなうとそれぞれの配置に対して

1　有限手で目的の平均利得 0 を達成可能

-1　有限手で目的の平均利得 0 の達成を阻止される

0　有限手ではどちらも不可能

の 3 つの値が得られる．この値が 0 となる配置は 791 個ある．その例と，その後のプレイの進行例を図 8 に示す．

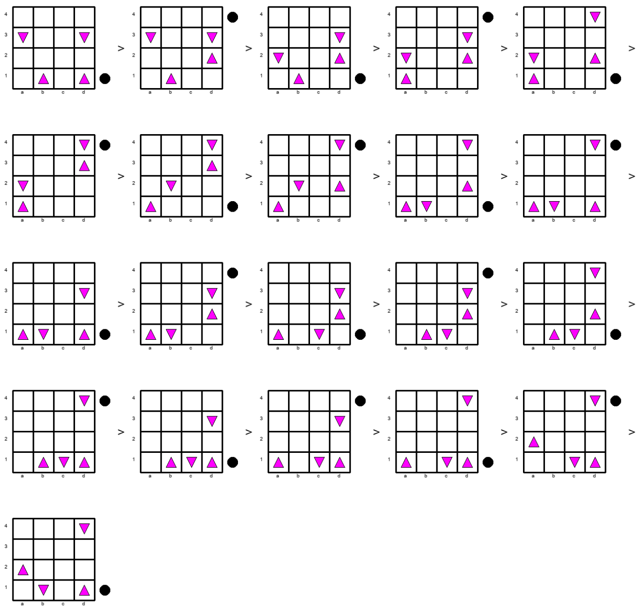


図 8　平均利得 0 の達成，阻止できない配置とゲーム進行例

本稿では，平均利得 0 を目指した後退解析の結果の値が 0 になった場合は，平均利得 0 を達成できるとみなすことにする．これは，有限手数でゲームが終了しない場合の利得を 0 とみなすことに対応する．なお，現実的に千日手をミニガイスターのルールに入れる場合は，同じ配置が M 回出現すると引き分け，総手数 N を超えると引き分けなどのルールを導入すると思われ，M や N をどう設定するのが適切かについてはここでは議論しない．

なお，この定義のもとでプレイヤ 2 は後退解析の結果を用いなくても以下の上下鏡像対称戦略で平均利得 0 を達成できる．

- プレイヤ 2 は $\frac{1}{2}$ の確率で初期配置を決定する．
- プレイヤ 2 は直前のプレイヤ 1 の駒移動を上下反転させた動きをおこなう．その結果，プレイヤ 1 の手番で盤面が上下鏡像対称になっている．
- プレイヤ 1 が平均利得 0 を超える利得を得るには，プレイヤ 2 の駒を取らずに脱出マスに移動する必要が，2 行目から 3 行目に移動しようとすると，必ずプレイヤ 2 の駒を取ることになる．

図 9 に，プレイヤ 2 がこの戦略を採用したときのゲームの

進行例を示す．

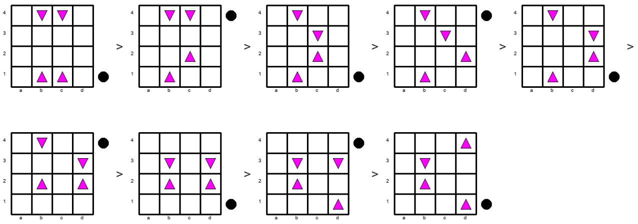


図 9　プレイヤ 2 が上下鏡像対称戦略を採用したときのゲームの進行例

6.　3 駒対 2 駒への拡張

ミニガイスターの解析では，双方が 2 駒だったことにより，相手の駒を取る手を考えずに済んだ．駒の数を増やしたときに同様の解析が可能かどうかを調べるために，片側を 3 駒にした場合も考える．3 駒側の初期配置としては元のガイスターでも脱出マスには置かないことにしているので，3 駒目は 2 行めに置くこととする．手番は 3 駒側と 2 駒側の両方を検討する (図 10)．3 駒側の色が青青赤の場合と青赤赤の 2 通りが考えられる．

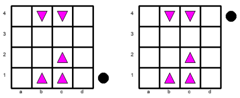


図 10　3 駒対 2 駒の初期配置

6.1　赤赤青 vs 2 駒

3 駒側が赤赤青の場合は，3 駒側が青駒を取られた時は即座に 2 駒側が勝ち，赤駒を取られた時に 2 駒対 2 駒の互角になるので，直感的には 2 駒側が有利に思える．一方で，3 駒側の方が合法手の数が多い点が有利である可能性はある．

そこで，以下では初期配置から双方がナッシュ均衡戦略を採用した時の平均利得が 0 と予測し，具体的な戦略を構築することを試みる．

6.1.1　赤赤青側の戦略

プレイヤ 1 が赤赤青の組み合わせとして，プレイヤ 1 が以下の戦略をとり，平均利得 0(ただし，千日手の利得 0 とする) を達成することを目指す．

- 初期配置の自分の駒のうち，2 段めの駒の色は赤とし，1 段目の 2 つの駒は色は乱数で決め，その色は以下の状況が発生するまで自分でも確認せずにプレイする (図 11)．
- 相手が自分の赤駒をとれる場合，その後の紫駒 2 個 vs 紫駒 2 個の配置が自分からみて平均利得 0 以上の配置になる．
- 相手が自分の紫駒を取れる場合．$\frac{1}{2}$ の確率で青駒でその時に相手の勝ち (利得 -1) になるが，$\frac{1}{2}$ の確率で取られたのが赤駒のときには，自分の赤青駒が確定したあとで，利得 1 の配置となる．
- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．
- 相手の駒の色が「赤青」または「青赤」のどちらかであると推測した時に，自分の紫駒の色が「赤青」または「青赤」のどちらでも確実に勝てるならば，$\frac{1}{2}$ の確率でどちらかと推測すると，$\frac{1}{2}$ の確率で当たる．それに従ってプレイすると，推測が当たった時の利得が 1 となるので，外れた時の利得が-1 となっても平均利得は 0 を達成できる．
- プレイヤ 1 が平均利得が 0 になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

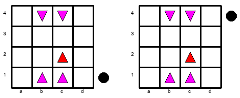


図 11　赤赤青側の初期配置

後退解析の結果，初期配置 2 個の値は 0 となった．これは，プレイヤ 1 が平均利得 0 を目指すプレイをプレイヤ 2 が有限手で阻止できないことを意味するので，千日手の利得を 0 とするとプレイヤ 1 が平均利得 0 を達成できることになる．

図 16 に手番がプレイヤ 1 のとき，図 17 にプレイヤ 2 の時のゲームの進行例を示す．プレイヤ 1 側は赤駒で相手の駒の一つを取られても引き分けに持ち込める配置でブロックし，もう一つの駒が脱出しようとした時には，両方の駒を取れる状態に保ってプレイしていることがわかる．

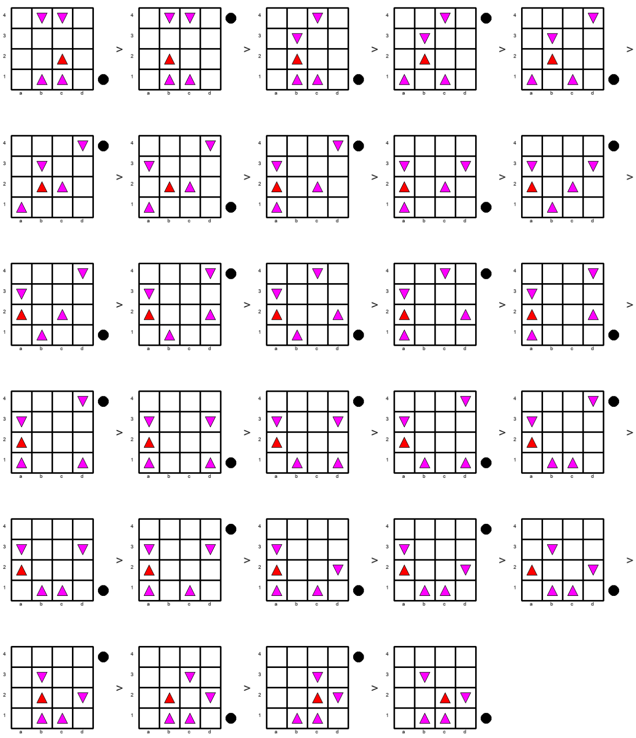


図 12 赤赤青側 (手番プレイヤ 1) の平均利得 0 を目指すゲーム進行例

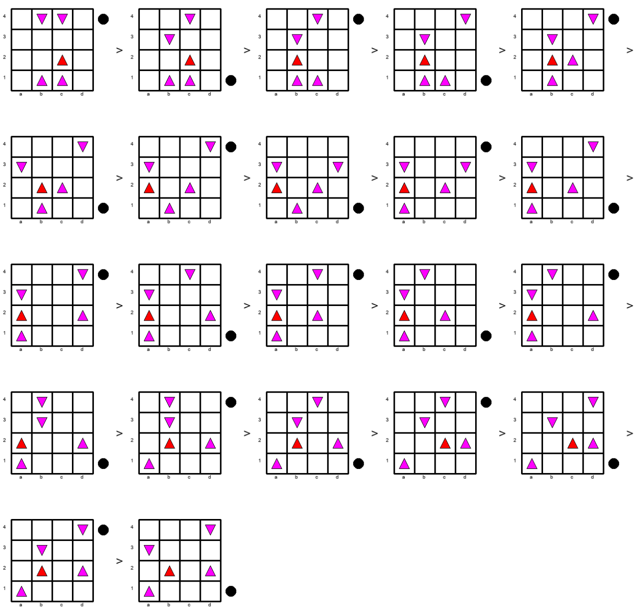


図 13 赤赤青側 (手番プレイヤ 2) の平均利得 0 を目指すゲーム進行例

6.1.2 2 駒側の戦略

プレイヤ 1 が 2 駒側として，プレイヤ 1 が以下の戦略をとり，平均利得 0(ただし，千日手の利得 0 とする) を達成することを目指す．

- 初期配置の自分の駒の色は乱数で決め，その色は以下の状況が発生するまで自分でも確認せずにプレイする．相手の駒について推測はせず，3 つとも紫駒とする．
- 自分の駒が相手に取られた時に，その駒の色を初めて確認する．青駒の時は相手の勝ち (利得 -1) になるが，取られたのが赤駒のときには，自分の勝ち (利得 1) となるので，平均利得 0 を達成できる．
- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．こちらも，駒を脱出させた瞬間に乱数で色を決定するとみなすことができるので，このときの平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．
- 相手の駒を取ることができて，取った駒が赤駒だとしても配置が 2 駒対 2 駒で平均利得が 0 ならば取る．
- プレイヤ 1 が平均利得が 0 になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

後退解析の結果，初期配置 (手番により 2 個) の値は 1 となった．これは，プレイヤ 1 が平均利得 0 を目指すプレイをプレイヤ 2 が有限手で阻止できないことを意味するので，プレイヤ 1 が平均利得 0 を達成できることになる．

図 14 と図 15 に手番がプレイヤ 1 のときと，プレイヤ 2 のときの，ゲームの進行例を示す．プレイヤ 1 側は相手の駒の一つを取ってそれが赤駒でも引き分けになることを目指してプレイしている．プレイヤ 2 側は，2 駒対 3 駒で決着がつくまでの手数を最大化しようとプレイしている関係で，プレイヤ 1 の駒の脱出を許してしまっている．

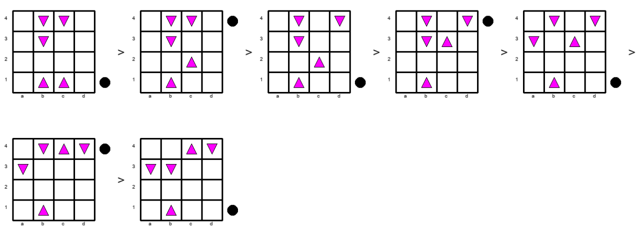


図 14 2 駒側 (手番プレイヤ 1) の平均利得 0 を目指すゲーム進行例

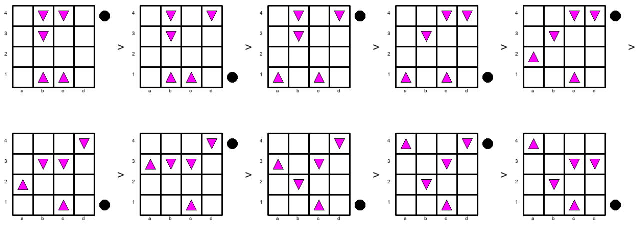


図 15 2 駒側 (手番プレイヤ 2) の平均利得 0 を目指すゲーム進行例

以上，赤赤青 vs 2 駒では双方のプレイヤが平均利得 0 以上を達成できる戦略を構成できたので，これらがナッシュ均衡戦略となっていて，初期配置のゲーム値が 0 であることが示された．

6.2 赤青青 vs 2 駒

赤青青は 3 駒側が有利であると予想される．そこで，まずは 3 駒側が平均利得 $\frac{1}{3}$ を達成する戦略を構築することを

試みる．

6.2.1　赤青青で平均利得 $\frac{1}{3}$ を目的とする戦略

プレイヤ 1 が赤青青側としてプレイヤ 1 が以下の戦略をとることで，平均利得 $\frac{1}{3}$ を達成することを目指す．

- 初期配置の自分の駒の 3 個の色を乱数で決め，その色は以下の状況が発生するまで自分でも確認せずにプレイする (図 10)．
- 自分の紫駒が相手に取られた時に，その駒の色を初めて確認する．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒の時は自分の勝ち (利得 1) になるが，$\frac{2}{3}$ の確率で取られたのが青駒のときに，利得 0 の配置となるならば，取られた瞬間に平均利得 $\frac{1}{3}$ を達成できる．
- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，$\frac{2}{3}$ の確率で青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．このときの平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．
- プレイヤ 1 が平均利得が $\frac{2}{3}$ になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

後退解析の結果，2 個の初期配置の値は 1 となった．これは，プレイヤ 1 が平均利得 $\frac{1}{3}$ を目指すプレイをプレイヤ 2 が有限手で阻止できないことを意味するので，プレイヤ 1 が平均利得 $\frac{1}{3}$ を達成できることになる．

図 16 に手番がプレイヤ 1 のときのゲームの進行例を，図 17 に手番がプレイヤ 2 のときのゲームの進行例を示す．

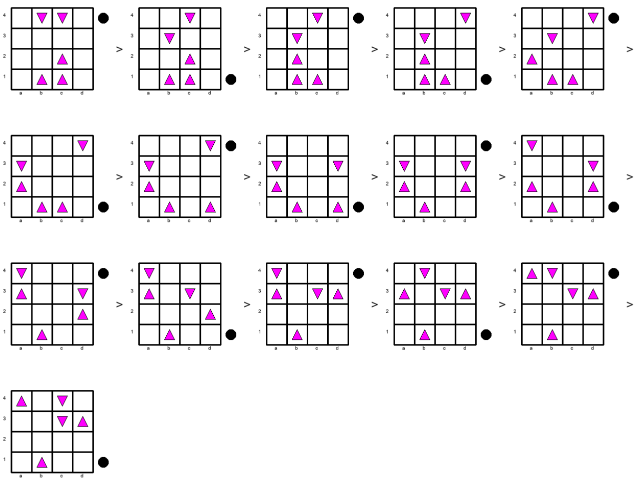


図 16　赤青青側 (手番プレイヤ 1) の平均利得 $\frac{1}{3}$ を目指すゲーム進行例

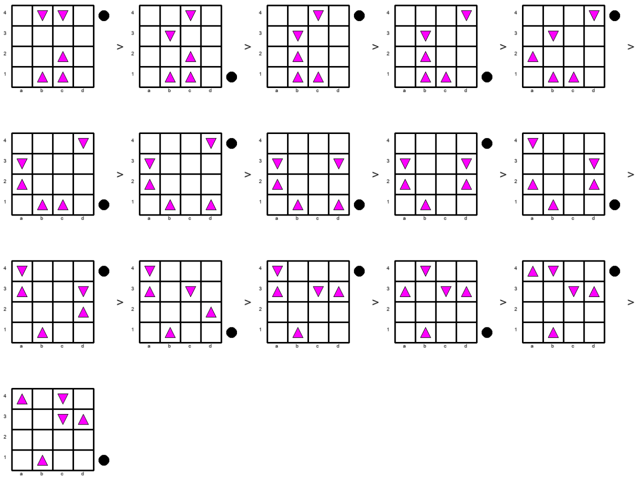


図 17　赤青青側 (手番プレイヤ 2) の平均利得 $\frac{1}{3}$ を目指すゲーム進行例

6.2.2　2 駒側の戦略

プレイヤ 1 が 2 駒側の時に，平均利得 $-\frac{1}{3}$ を達成するための戦略を 2 つ試した．

- 初期配置の自分の駒の色は乱数で決め，その色は以下の状況が発生するまで自分でも確認せずにプレイする．
- 自分の駒が相手に取られた時に，その駒の色を初めて確認する．青駒の時は相手の勝ち (利得 -1) になるが，取られたのが赤駒のときには，自分の勝ち (利得 1) となるので，平均利得 0 を達成できる．
- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．こちらも，駒を脱出させた瞬間に乱数で色を決定するとみなすことができるので，このときの平均利得は $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ となる．

までは共通として，

- 相手の 3 つの駒の一つを乱数で青駒と決める (何を選んだかは相手に知られても良い)．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒となるが，その場合は利得-1 で良い．$\frac{1}{3}$ の確率で青駒と当てた時に，平均利得 0 を達成する．

を加えた場合と，

- 相手の紫駒を同時に 3 つ取ることができるときに，乱数で選んで駒を取る．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒となるが，その場合は利得-1, $\frac{2}{3}$ の確率で青となり，その後の 2 対 2 の平均利得が 0 以上になる．

を加えた場合のどちらも後退解析の結果の初期配置の値は-1 となり，達成できなかった．

一方，プレイヤ 1 が 2 駒として，平均利得 $-\frac{1}{2}$ を達成するための以下の戦略を試してみた．

- 相手の紫駒を同時に 2 つまで取ることができるときに，乱数で選んで駒を取って，どちらを取っても取ったのが青駒の場合の後の配置の 2 対 2 の平均利得が 0 以上

になるならば，取った駒が赤駒の場合は，利得が-1 となるが，その確率は $\frac{1}{2}$ 以下なので，平均利得 $-\frac{1}{2}$ を達成できる．

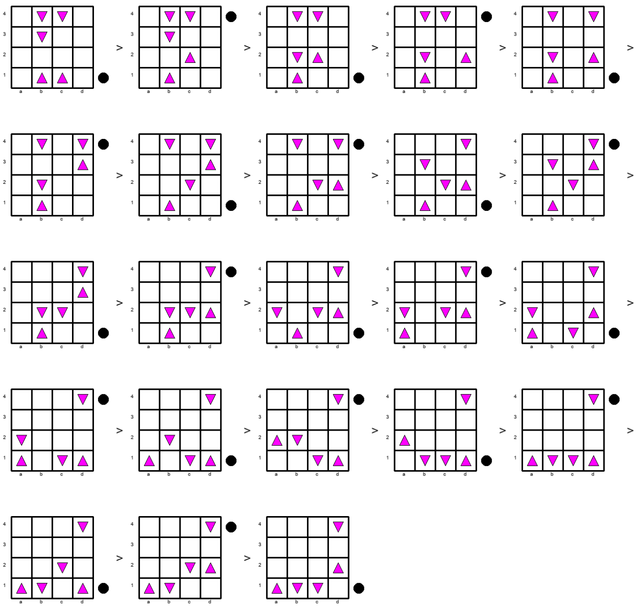


図 18　2 駒側 (手番プレイヤ 1) の平均利得 $-\frac{1}{2}$ を目指すゲーム進行例

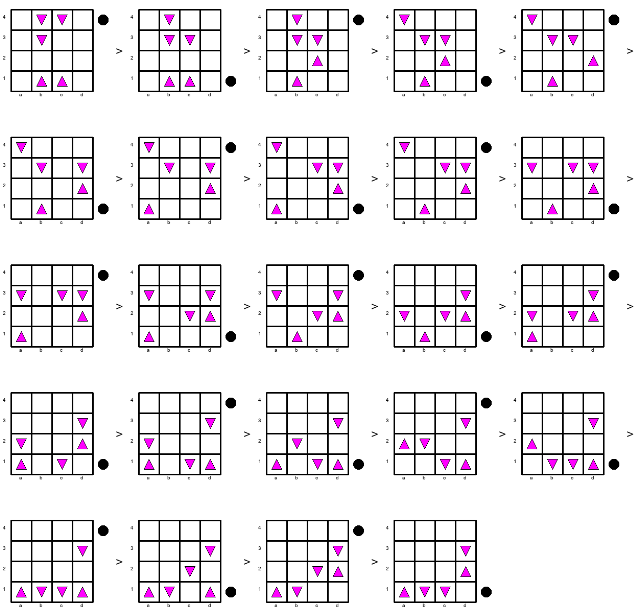


図 19　2 駒側 (手番プレイヤ 2 の平均利得 $-\frac{1}{2}$ を目指すゲーム進行例

後退解析の結果，初期配置 (手番により 2 個) の値は 0 となった．これは，プレイヤ 1 が平均利得 0 を目指すプレイをプレイヤ 2 が有限手で阻止できないことを意味するので，プレイヤ 1 が平均利得 0 を達成できることになる．図 18 に手番がプレイヤ 1 のときのゲームの進行例を，図 19 に手番がプレイヤ 2 のときのゲームの進行例を示す．

以上により，赤青青 vs 2 駒のナッシュ均衡での平均利得が 3 駒側からみて，$\frac{1}{3}$ 以上 $\frac{1}{2}$ 以下であることがわかる．赤青側で平均利得 $\frac{1}{2}$ 以上を達成可能な戦略の構築も試みたが，まだ成功していない．

7.　結論

本研究では，初期配置からスタートした時に，相手がどのような戦略を採用しても平均利得 0 以上で有限手数でゲームを終わらせる戦略が，プレイヤ 1，プレイヤ 2 双方に存在することを示した．零和ゲームなので，これはナッシュ均衡戦略であり，ナッシュ均衡における平均利得が 0 であることがわかった．また，提案する戦略はゲームを終わらせる時以外は自分の駒の色によってアクションを変化させない戦略であることから，ミニガイスターにおいて相手駒の推定が重要でないと考察される．

駒の数を増やした時にも同様の方法で，ナッシュ均衡戦略を求めることができるかどうかを調べるため，2 駒対 3 駒のナッシュ均衡戦略を求める試みをした．その結果，3 駒側の色が青赤赤の場合にはナッシュ均衡戦略を求めることができ平均利得はゼロであることがわかった．しかし，3 駒側の色が青青赤の場合，3 駒側の平均利得は $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ の間であることしか示せなかった. これは，自分の駒の一部を紫駒として，等確率で割り当てた上で，必要なときだけ色をみて判断する提案手法の限界を示していると考えられ，さらなる研究が必要と思われる．

なお，本研究で用いたプログラムと解析結果は `https://github.com/u-tokyo-gps-tanaka-lab/minigeister` で公開している．

参考文献

[1] Chen, Chen, and Tomoyuki Kaneko. ”Learning Strategies for Imperfect Information Board Games Using Depth-Limited Counterfactual Regret Minimization and Belief State.” 2022 IEEE Conference on Games (CoG). IEEE, 2022.

[2] Troillet, Lucien, and Kiminori Matsuzaki. ”Analyzing simplified Geister using DREAM.” 2021 IEEE Conference on Games (CoG). IEEE, 2021.

[3] 川上直人, and 橋本剛. ”完全情報ゲームの探索を用いたガイスター AI の研究.” ゲームプログラミングワークショップ 2018 論文集 2018 (2018): 35-42.

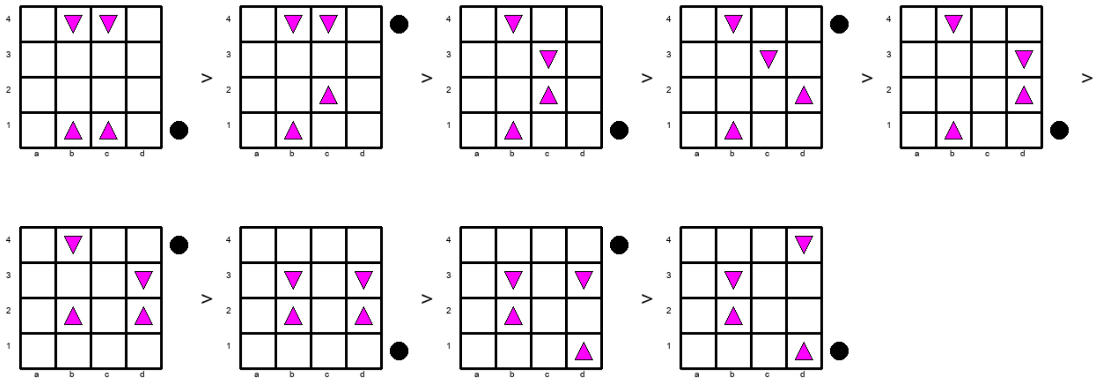
[4] Nash Jr, John F. ”Equilibrium points in n-person games.” Proceedings of the national academy of sciences 36.1 (1950): 48-49.

[5] Zinkevich, Martin, et al. ”Regret minimization in games with incomplete information.” Advances in neural information processing systems 20 (2007).

「ミニガイスターのナッシュ均衡戦略」正誤表

図 9 プレイヤ **2** が上下鏡像対称戦略を採用したときのゲームの進行例

(正)



「**6.2.1** 赤青青で平均利得 $\frac{1}{3}$ を目的とする戦略」の箇条書き

(誤)

- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，$\frac{2}{3}$ の確率で青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．このときの平均利得は $1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0$ となる．
- プレイヤ 1 が平均利得が $\frac{2}{3}$ になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

(正)

- 自分の手番で自分の紫駒が脱出マスにある時は脱出して，その駒の色を初めて確認する．$\frac{1}{3}$ の確率で赤駒のときは自分の反則負け (利得 -1)，$\frac{2}{3}$ の確率で青駒の時は自分の勝ち (利得 1) になる．このときの平均利得は $1\times\frac{2}{3}+(-1)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ となる．
- プレイヤ 1 が平均利得が $\frac{1}{3}$ になる配置への到達を目指し，プレイヤ 2 がその阻止を目的にプレイしたときに，全配置が到達可能か，阻止可能かを後退解析で求める．

「**図 16** 赤青青側 **(**手番プレイヤ **1)** の平均利得 $\frac{1}{3}$ を目指すゲーム進行例」

(正)