6. General Theory of Most Efficient Codes

駒宮安男（電気試験所）

§1 緒言

R. W. Hammingが1950年Error Detecting and Correcting Codesを唱えて以来，2進符号系のHammingの最小距離を与えて，Most Efficientなcodeを構成する問題は，内外の幾多の研究者により盛んに研究されているが，未だ完全に解決されていない難問の一つである．この問題について，後述する$H(n,p)$なる行列を導入することにより，一般的理論をたてることに成功したので，以下に御報告する次第である．

上述の問題を数学的に記述すると，次の如くなる．

$$M(n,p)=\begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \cdots, & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

行列(1.1)を次の如く定義する．茲で$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$は$n$ digitの2進符号で$1 \leqq i \leqq m$とする．従つて，各x_{ij}は0又は1である．又，任意の$i \neq j$，$1 \leqq i, j \leqq m$なるi, jに就いて，

$$|x_{i1}-x_{j1}|+|x_{i2}-x_{j2}|+\cdots+|x_{in}-x_{jn}| \geqq p$$

が成立する．pはminimum Hamming distanceである．

しからば，本報告の目的は，上述の$M(n,p)$を満足する如きmの最大値と，各x_{ij}の値を決定することとなる．此処では，紙数の関係上，詳細に論ずることは出来ないので，そのあらすじだけを以下に述べ，証明等は割愛させていただくことにする．詳細を知りたい方は

General Theory of Most Efficient Codes：

Yasuo Komamiya, Report No. 163, Digital Computer Laboratory, University of Illinois, June 9, 1964.

を参照されたい．

§2 基本定理

exclusive−orを拡張して次の如く定義する．

［定義2.1］ $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ なる任意の整数間のexclusive−orを

$$a \oplus b = (a_n \oplus b_n)\,2^n + (a_{n-1} \oplus b_{n-1})\,2^{n-1} + \cdots + (a_1 \oplus b_1)\,2 + (a_0 \oplus b_0)$$

と定義する．茲で，a，b の2進法表示を

$$\left.\begin{aligned} a &= a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 \\ b &= b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + b_1 2 + b_0 \end{aligned}\right\} \text{とする．}$$

さて，次の定理はそれにより本理論が統一的に論ぜられるのでMost Efficient Codeの基本的な定理と考えられる．

［定理2.1］（基本定理）

$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{N-1}$ を任意の実数とするとき，行列 Z_n

$$Z_n = \begin{pmatrix} z_0, & z_1, & z_2, & \cdots, & z_{N-1} \\ z_1, & z_0, & z_3, & \cdots, & z_{1 \oplus (N-1)} \\ z_2, & z_3, & z_0, & \cdots, & z_{2 \oplus (N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ z_{N-1}, & z_{N-2}, & z_{N-3}, & \cdots, & z_0 \end{pmatrix}$$

は直交行列 U_n により直交変換

$$Z_n = U_n \Lambda U_n$$

され，固有値 x_i（$0 \leqq i \leqq N-1$）は

$$x_i = \sqrt{N}\,(z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{N-1})\,u_i$$

により表現され，逆に任意の z_i（$0 \leqq i \leqq N-1$）は固有値により

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\,(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})\,u_i$$

で表わされる．茲で，

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}}_{n\text{個のKronecker's Product}}$$

$$\left(\equiv (u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}) \text{とする．}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} x_0 & & & \\ & x_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$N=2^n$, $n\geqq 1$.

§3 Most Efficient Code の一般的理論

記述を便ならしめる為次の定義を設ける.

[定義3.1] i code

i が $0\leqq i\leqq 2^n-1$ なる整数なるとき, i の2進法表示を

$$i=x_{i(n-1)}2^{n-1}+x_{i(n-2)}2^{n-2}+\cdots+x_{i1}2+x_{i0}$$

とするとき, n bitの2進符号 $(x_{i(n-1)}, x_{i(n-2)}, \cdots, x_{i1}, x_{i0})$ を i code と呼ぶことにする.

i code と j code の間の Hamming distance を dist (i,j) で記せば, [定義2.1] [定義3.1] より

$$\text{dist}(i,j)=i\oplus j \tag{3.1}$$

が成立する.

[定義3.2] 行列 $H(n,p)$

$$H(n,p)=\begin{pmatrix} h_{00}, & h_{01}, & \cdots, & h_{0(N-1)} \\ h_{10}, & h_{11}, & \cdots, & h_{1(N-1)} \\ h_{20}, & h_{21}, & \cdots, & h_{2(N-1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{(N-1)0}, & h_{(N-1)1}, & \cdots, & h_{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

茲で

$$\left.\begin{aligned} &\text{dist}(i,j)<p \quad \text{なるとき} \quad h_{ij}=1 \\ &\text{dist}(i,j)\geqq p \quad \text{なるとき} \quad h_{ij}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

とする. ($p\geqq 1$)

しからば, (3.1)式から

$$\text{dist}(i,j)=i\oplus j=0\oplus(i\oplus j)=\text{dist}(0,i\oplus j)$$

なる故,

$$h_{ij}=h_{0(i\oplus j)} \tag{3.4}$$

が得られる．故に今 h_i を

$$h_i \equiv h_{0i} \tag{3.5}$$

と定義すれば，（3.4）式より任意の i（$0\leqq i\leqq N-1$）について，

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= h_{ii} \\ h_1 &= h_{i(i\oplus 1)} = h_{(i\oplus 1)i} \\ h_2 &= h_{i(i\oplus 2)} = h_{(i\oplus 2)i} \\ &\vdots \\ h_{N-1} &= h_{i(i\oplus(N-1))} = h_{((N-1)\oplus i)i} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

が成立する．従つて，$H(n,p)$ は

$$H(n,p)=\begin{pmatrix} h_0, & h_1, & h_2, & \cdots, & h_{N-1} \\ h_1, & h_0, & h_3, & \cdots, & h_{1\oplus(N-1)} \\ h_2, & h_3, & h_0, & \cdots, & h_{2\oplus(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ h_{N-1}, & h_{N-2}, & h_{N-3}, & \cdots, & h_0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

但し（3.3）式より

$$h_0=h_{ii}=1 \tag{3.8}$$

となり，これは基本定理の Z_n と同じ形の行列となる．

［定義3.2］　（3.6）式から

$$h_0+h_1+\cdots+h_{N-1}=h_{i0}+h_{i1}+h_{i2}+\cdots+h_{i(N-1)} \tag{3.9}$$

$$(\equiv K(n,p)\text{ とする．})$$

が得られる．茲で

$$K(n,p)={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{p-1} \tag{3.10}$$

［例3.1］

$$H(n,1)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}=E_N$$

$$K(n,1)={}_nC_0=1$$

なる故，$H(n,1)$ は明らかに N 次の単位行列である．

［例 3.2］

$$H(n,n)=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$$K(n,n)={}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-1$$

［例 3.3］

$$H(3,2)=\begin{pmatrix}
\textcircled{1} & 1 & 1 & \textcircled{0} & 1 & \textcircled{0} & \textcircled{0} & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\textcircled{0} & 1 & 1 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{0} & \textcircled{0} & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
\textcircled{0} & 1 & 0 & \textcircled{0} & 1 & \textcircled{1} & \textcircled{0} & 1\\
\textcircled{0} & 0 & 1 & \textcircled{0} & 1 & \textcircled{0} & \textcircled{1} & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$K(3,2)={}_3C_0+{}_3C_1=1+3=4$$

さて，$H(n,p)$ に［定理 2.1］を適用すると，次の定理が得られる．

［定理 3.1］　行列 $H(n,p)$ は直交行列 U_n により直交変換され，

$$H(n,p)=U_n\,\Lambda\,U_n$$

$$\lambda_i=\sqrt{N}\,(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})\,u_i$$

$$h_i=\frac{1}{\sqrt{N}}\,(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})\,u_i$$

が成立する．但し

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & 0\\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots\\ 0 & & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}$$

上述の $H(n,p)$ の導入により，most efficient code の条件は，

$$H_0=E_m \tag{3.11}$$

なる如き maximum な m を見出すことになる．此処で，

$$H_0=\begin{pmatrix}
h_0, & h_{i_1\oplus i_2}, & h_{i_1\oplus i_3}, & \cdots, & h_{i_1\oplus i_m}\\
h_{i_2\oplus i_1}, & h_0, & h_{i_2\oplus i_3}, & \cdots, & h_{i_2\oplus i_m}\\
h_{i_3\oplus i_1}, & h_{i_3\oplus i_2}, & h_0, & \cdots, & h_{i_3\oplus i_m}\\
\vdots & & & & \vdots\\
h_{i_m\oplus i_1}, & h_{i_m\oplus i_2}, & h_{i_m\oplus i_3}, & \cdots, & h_0
\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

E_m = m 次の単位行列

それ故，most efficient code の条件は［定理3.1］から

$$H_0 = \begin{pmatrix} u_{i_1}^T \\ u_{i_2}^T \\ \vdots \\ u_{i_m}^T \end{pmatrix} \Lambda(u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_m}) = E_m \tag{3.13}$$

なる如き maximum m に就いて，$u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_m}$ が存在することになる．此処で u_i^T は u_i の転置行列（transposed matrix）である．（記号 T に就いては以下同様）．

さて，V を

$$V \equiv \begin{pmatrix} u_{i_1}^T \\ u_{i_2}^T \\ \vdots \\ u_{i_m}^T \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

とせば，(3.13) 式は maximum m に就いて

$$V \Lambda V^T = E_m \tag{3.15}$$

となる．$u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_m}$ は直交行列 U_n の列 vector であるから，

$$V V^T = E_m \tag{3.16}$$

が成立する．故に，(3.15)，(3.16) 両式から

$$\left.\begin{aligned} & V \Lambda V^T = V V^T = E_m \\ \therefore\ & V(\Lambda - E_N) V^T = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

が得られる．此処で E_N は N 次の単位行列にして，右辺の 0 は m 次の 0 行列を表わすものとする．

［定義3.3］　vector $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1}$ を次の如く定義する．

$$V = \begin{pmatrix} u_{i_1}^T \\ u_{i_2}^T \\ \vdots \\ u_{i_m}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1})$$

V は直交行列 U_n に属する m 個の行 vector から出来ている故，$\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1}$ 中には

m 個の独立 vectorが存在する．故に，(3.17) 式及び［定義 3.3］から容易にわかる如く，most efficient codeの条件は $(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1})$ 中の独立 vector の個数が最大になる如き

$$(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1})(A-E_n)(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1})^T = 0 \qquad (3.18)$$

の解を見出すことになる．

$\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1}$ の間に成立する関係に就いて述べるに当り，記述を容易にする為，次の定義を設ける．

［定義 3.4］ $A \otimes B$

n 行 m 列の二つの行列 A，B が与えられているとき，即ち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1m} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2m} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nm} \end{pmatrix}$$

なるとき，

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11}, a_{12}\,b_{12}, \cdots, a_{1m}\,b_{1m} \\ a_{21}\,b_{21}, a_{22}\,b_{22}, \cdots, a_{2m}\,b_{2m} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,b_{n1}, a_{n2}\,b_{n2}, \cdots, a_{nm}\,b_{nm} \end{pmatrix}$$

とする．

［定義 3.5］ ξ_i

$$\sqrt{N}\ U_n = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1})$$

即ち，$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{N-1}$ は $\sqrt{N}\ U_n$ の列 vector とする．

［定義 3.5］から

$$\xi_i = \sqrt{N}\ u_i \qquad (3.19)$$

が成立する．

［定理 3.2］ 任意の t，l $(0 \leqq t, l \leqq N-1)$ に就いて，

$$\xi_{t \oplus l} = \xi_t \otimes \xi_l$$

従つて，

［定理 3.3］ 任意の t，l $(0 \leqq t, l \leqq N-1)$ に就いて，

$$\zeta_{t\oplus l}=\zeta_t\otimes\zeta_l$$

［定義 3.6］　z_i

$z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ を

$$\sqrt{N}\ z_i=(1,1,\cdots,1)\zeta_i$$

により定義する．

しかるとき，次の定理が成立する．

［定理 3.4］　任意の t, l $(0\leqq t, l\leqq N-1)$ に就いて

$$\zeta_t^T\cdot\zeta_l=\sqrt{N}\ z_{t\oplus l}$$

［定義 3.7］　Λ', λ_i'

$$\Lambda'=\Lambda-E_N=\begin{pmatrix}\lambda_0-1 & & 0\\ & \lambda_1-1 & \\ & & \ddots\\ 0 & & \lambda_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0' & & 0\\ & \lambda_1' & \\ & & \ddots\\ 0 & & \lambda_{N-1}'\end{pmatrix}$$

（［定義 3.1］参照）

［定義 3.8］　Z

$$Z=\sqrt{N}\ V^TV=\begin{pmatrix}z_0, & z_1, & \cdots, & z_{N-1}\\ z_1, & z_0, & \cdots, & z_{1\oplus(N-1)}\\ z_2, & z_3, & \cdots, & z_{2\oplus(N-1)}\\ \vdots & & & \vdots\\ z_{N-1}, & z_{N-2}, & \cdots, & z_0\end{pmatrix}$$

さて，(3.17) 式及び［定義 3.7］から

$$V\Lambda'V^T=0 \qquad (3.25)$$

が得られる．それ故，

$$(V^TV)\Lambda'(V^TV)=0 \qquad (3.26)$$

が得られる．逆に (3.26) 及び (3.16) 両式より

$$V(V^TV)\Lambda'(V^TV)V^T=0$$

$$\therefore\ V\Lambda'V^T=0$$

が得られる故，$VV^T=E_m$ が成立するとき，(3.25) 式なる条件と (3.26) 式なる条件とは対等となる．

(3.26) 式及び［定義3.8］から

$$Z\Lambda' Z = 0 \tag{3.27}$$

が得られる．故に most efficient code の条件は

$$\left.\begin{aligned} VV^T &= E_m \\ Z\Lambda' Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

を満足する最大の m を見出すことに帰着する．

［定理3.5］　$VV^T = E_m$ 及び $\sqrt{N}\ V^T V = Z$ なるとき，Z の階数は m であり，Z の固有値は m 個の1と $(N-m)$ 個の0より成つている．

［定理3.5］から，most efficient code の条件は

$$\left.\begin{aligned} VV^T &= E_m \\ Z\Lambda' Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

を満足する Z の階数 m を最大にすることに帰着する．

［注意3.1］　［定義3.8］の Z に［定理2.1］を適用すれば，Z の固有値 x_i $(0 \leqq i \leqq N-1)$ は

$$x_i = \sqrt{N}\ (z_0, z_1, \cdots, z_{N-1})\, u_i$$

で表わされる故，若し，$x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_m} = 1$ にして，他の $x_i = 0$ なるときは，求める most efficient code の集合は，i_1 code, i_2 code, $\cdots$, i_m code である．

§4　$V\Lambda' V^T = 0$ の一般的解法

［定義3.6］から

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\ (1, 1, \cdots, 1)\, \zeta_i \tag{4.1}$$

なる故，

$$\left.\begin{aligned} &u_i^T \in V \text{ なるときは} \\ &\qquad x_i = \sqrt{N}\ (z_0, z_1, \cdots, z_{N-1})\, u_i = 1 \\ &u_i^T \notin V \text{ なるときは} \\ &\qquad x_i = \sqrt{N}\ (z_0, z_1, \cdots, z_{N-1})\, u_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

が成立する．茲で

$$Z = U_n \begin{pmatrix} x_0 & & 0 \\ & x_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & x_{N-1} \end{pmatrix} U_n$$

（［定義3.8］参照）

故に，

$$x_0+x_1+\cdots+x_{N-1}=m \tag{4.3}$$

又，(4.1)式から

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{N}}(1,1,\cdots,1)\zeta_0=\frac{m}{\sqrt{N}} \tag{4.4}$$

が得られる．

$x_i\equiv 0$ なる x_i の個数を α とせば，明かに

$$m=N-\alpha \tag{4.5}$$

が成立する．

任意の i ($0\leqq i\leqq N-1$) に就いて z_i は $x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}$ の一次結合で表現されている故，$z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ 中の α 個は独立変数となる．

(4.5)式より m が maximum なる為には α は minimum でなければならない．即ち，

$$\max(m)=N-\min(\alpha) \tag{4.6}$$

さて，(3.27)式，即ち $ZA'Z=0$ から得られる $z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ 間の関係を

$$R_1 \text{ 又は } R_2 \text{ 又は } R_3 \text{ 又は } \cdots \tag{4.7}$$

とす．しかるときは，$z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ 中の独立変数の個数が最小である関係を $R_1, R_2, \cdots$ 中より択らべばよいことになる．

§5 論理数学を利用した $VA'V^T=0$ の一般的解法

$$ZA'Z=U_n\begin{pmatrix}x_0 & & 0\\ & x_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{N-1}\end{pmatrix}U_nA'U_n\begin{pmatrix}x_0 & & 0\\ & x_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{N-1}\end{pmatrix}U_n$$

$$=0$$

なる故，

$$\begin{pmatrix}x_0 & & 0\\ & x_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{N-1}\end{pmatrix}U_nA'U_n\begin{pmatrix}x_0 & & 0\\ & x_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & x_{N-1}\end{pmatrix}=0$$

が成立する．また，

$$U_nA'U_n=H(n,p)-E_N$$

なる故，

$$\begin{pmatrix} x_0 & & 0 \\ & x_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & x_{N-1} \end{pmatrix} \{H(n,p)-E_N\} \begin{pmatrix} x_0 & & 0 \\ & x_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & x_{N-1} \end{pmatrix} = 0$$

が得られる．

故に，$x_i^2 h_0' = 0$（$h_0' = h_0 - 1 = 0$）を考慮すると，任意の $i \neq j$（$0 \leqq i, j \leqq 2^n - 1$）に就いて，

$$x_i x_j h_{i \oplus j} = 0 \tag{5.1}$$

が得られる．［定理 3.5］より各 x_i は 0 または 1 なる故，論理数学を利用して解くことが出来る．今，それを以下に述べる．

（5.1）式が成立する為には，

$$h_{i \oplus j} = 1 \quad \text{なるときは} \quad x_i x_j = 0$$

が成立せねばならぬが，

$$h_{i \oplus j} = 0 \quad \text{なるときは} \quad x_i x_j = \text{任意}$$

でよい．それ故，$h_{i \oplus j} = 1$ なるときは，任意の $i \neq j$（$0 \leqq i, j \leqq 2^n - 1$）なる i, j に就いて

$$x_i x_j = 0 \tag{5.2}$$

$$\therefore \sim x_i \vee \sim x_j = 1 \tag{5.3}$$

が成立せねばならぬ．故に，

$$\prod_{\substack{0 \leqq i,j \leqq 2^n-1 \\ i \neq j \\ h_{i \oplus j}=1}} (\sim x_i \vee \sim x_j) = 1 \tag{5.4}$$

が成立せねばならない．それ故，（5.4）式を展開して，$\sim x_i$ の変数の個数が最小である項を択べば，m が最大になる．

今，

$$\sim x_{i_1} \sim x_{i_2} \cdots \sim x_{i_l} \tag{5.5}$$

が上記条件に適する項とす．そのとき，

$$\sim x_{i_1} \sim x_{i_2} \cdots \sim x_{i_l} = 1 \tag{5.6}$$

ならば，

$$\sim x_{i_1} = \sim x_{i_2} = \cdots = \sim x_{i_l} = 1 \tag{5.7}$$

が得られる．故に，

$$x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_l} = 0 \tag{5.8}$$

となり，（5.8）式が成立すれば明かに $VA'V^T = 0$ となる．故に，

$$i \neq i_1,\ i \neq i_2,\ \cdots,\ i \neq i_l$$

なる任意の i（$0 \leqq i \leqq 2^n - 1$）に就いて

$$x_i = 1$$

とせば，i codeの集合が求める most efficient codeの集合となる．

［注意 5.1］　$u_0 \in V$ としても一般性を失わない故，$x_0 = 1$ と仮定することが出来る．

§6　或る条件の下での $VA'V^T = 0$ の解法

［条件 6.1］　$\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{N-1}$ 中の独立 vectorが $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{2(k-1)}, \zeta_{2(k-1)+1}, \cdots, \zeta_{2(k-1)+l}$ のみで，残りの ζ_i（$2^{(k-1)} + l \leqq i \leqq N-1$）は従属 vectorである．但し $0 \leqq l \leqq 2^{(k-1)} - 1$

さて，$V_0, V_1, V_2, \cdots, V_{2^{(n-k)}-1}$ を次の如く定義する．

$$\left.\begin{aligned} V_0 &\equiv (\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{2^k-1}) \\ V_1 &\equiv (\zeta_{2^k}, \zeta_{2^k+1}, \cdots, \zeta_{2(k+1)-1}) \\ V_2 &\equiv (\zeta_{2\cdot 2^k}, \zeta_{2\cdot 2^k+1}, \cdots, \zeta_{3\cdot 2(k+1)-1}) \\ &\vdots \\ V_{2^{(n-k)}-1} &\equiv (\zeta_{(2^{(n-k)}-1)2^k}, \zeta_{(2^{(n-1)}-1)2^k+1}, \cdots, \zeta_{N-1}) \end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

しからば，［条件 6.1］により任意の i（$1 \leqq i \leqq \{2^{(n-k)} - 1\}$）について，

$$V_i = V_0 A_i$$

なる表現が可能である．但し

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_{(2^k-1)} \\ a_1, & a_0, & \cdots, & a_{1\oplus(2^k-1)} \\ a_2, & a_1, & \cdots, & a_{2\oplus(2^k-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(2^k-1)}, & a_{(2^k-2)}, & \cdots, & a_0 \end{pmatrix}$$

$$= U_k \begin{pmatrix} \alpha_{0i} & & 0 \\ & \alpha_{1i} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \alpha_{(2^k-1)i} \end{pmatrix} U_k \quad (6.2)$$

［条件 6.2］　任意の i（$1 \leqq i \leqq 2^{(n-k)}-1$）に就いて

$$\xi_j^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{(2^k-1)i} \end{pmatrix}$$

なる如き適当なる j が $0 \leqq j \leqq 2^k-1$ 中に存在する．此処で

$$\sqrt{2^k}\, U_k \equiv (\xi_0^{(k)},\ \xi_1^{(k)},\ \cdots,\ \xi_{2^k-1}^{(k)})$$

とする．

Abelian group codesの場合は［条件 6.1］及び［条件 6.2］を満足することが証明できる．

又，以上の条件の下では，$H(n, p)$ の固有値 λ_i を係数とする一次多元不定方程式の一般解（これは必ず求められる）を或る条件下で求める問題に帰着され，それにより求めるcodes即ち，i_1 code，i_2 code，$\cdots$，i_m codeを決定することが出来る．

§7　結　語

以上で，理論のあらすじだけを述べたが，証明等は相当複雑になるので凡て割愛した．

従来の本問題に関する研究は $M(n, p)$ 行列を直接使用して論ずるものが殆んどであり，一般論をたてることが困難であつたが，$H(n, p)$ 行列の導入により上述の如く一般論をたてることに成功した．

さて，m_G，m_C，m_0 を

m_G：most efficientなAbelian group codeの個数

m_C：［条件 6.1］及び［条件 6.2］の下でのmost efficient codeの個数

m_0：most efficient codeの個数

と定義すれば，

$$2 \leqq m_G \leqq m_C \leqq m_0 \leqq 2^{n-p+1} \qquad (7.1)$$

なる式が明かに成立する．

将来の問題としては，$m_C > m_G$ なる［条件 6.1］及び［条件 6.2］の下での解が果して存在するかということである．又，$m_0 > m_C$ なる一般的なmost efficient code を求める，よりelegantな方法を研究する問題である．

本 PDF ファイルは 1965 年発行の「第 6 回プログラミング―シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の捜索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者捜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思います。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日 〜 2021 年 3 月 19 日
掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程
https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html