D−18

4．多重積分のモンテカルロ法式計算について

宇 野 利 雄（日大理工）

多くのパラメータx_1，x_2，…x_nをふくみ，これらにいろいろな値をとらせてしらべる必要のある問題を考えてみる．このときパラメータの値のたどらせ方の正統法は次のようであろう．すなわち他のものをとめてx_1だけをとるべき値の全範囲に走らせ，これが1回終るごとにx_2を1つずつ進める．かようにしたx_2の進行が1回終るごとにx_3を進め，このようにしてx_nにまで及んで全部のパラメータをすべての値に行きわたらせるのである．たとえば多重積分

（1）　$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

の値を求めることを考えてみる．簡単のため積分領域はn次元単位方体だとしておく．いま各x_kに0から1までの値の等間隔の値

$$t_i=\frac{i}{p}-\frac{1}{2p}\,,\quad i=1,2,\cdots,p$$

をとらせるとする．上のn重走査法で全部のx_iにこれらの値をたどらせ，和

（2）　$\displaystyle\frac{1}{p^n}\sum_{k_1=1}^{p}\sum_{k_2=1}^{p}\cdots\sum_{k_n=1}^{p}f(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_n})$

を作つて（1）の簡略な近似ができるであろう．ところでこの走査法では各パラメータにとらせる値がp個づつだから，全体の場合の数はp^nとなり，nが少し多いとぼう大な数になる．その上これによると，このp^n回の走査が全部終るまでは（1）の全ぼうがわかりにくい．なお走査のコントロールもn重になり多少面倒である．

モンテカルロ法による多重積分の計算はこのもどかしさをのがれようとしたもののように私見する．すなわち（0，1）の間の一様乱数を逐次に発生させ，これらを

$$(x_{nk+1},\,x_{nk+2},\cdots,\,x_{nk+n})$$

のようにn個づつ1組にして点P_kの座標とする．今度は1重の制御によつて走査でき，和

（3）　$\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(P_k)$

によつて（1）の近似が可能となるであろう．前回のときには点が片隅の方から順次にたどられ，はじめから全域に公平にまくばられないために積分の全ぼうが全部を終るまではわかりにくいのであるが，今度はP_kは全体の領域について早くから公平にあらわれるので，

（2）によるよりも早くから積分の値の大よそのオーダーがつかめるであろう．しかしP_kの発生がランドムに行われるため，全域に公平といつてもバラツキが相当にあつて規則性からはほずれ，（3）の収束は必ずしも早くはあるまい．

このような考察からわれわれはWeylのGleichverteilung を利用することに思いいたつた．すなわちそれら自身も無理数であり，かつおたがい同士の比ξ_i/ξ_j，$(i \neq j)$がどれも無理数であるような1組の数

（4）　　$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$

を考える．これをk倍してそれの小数部分，すなわち

（5）　　$x_i^{(k)} = k\xi_i - [k\xi_i]$,

$$(i=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots)$$

をとる．これらを座標とする点

$$P_k\,(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$$

を考えると，P_kはみな単位直方体の内部にあり，また単位直方体内の任意のR積分可能函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$をとつたとき

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(P_k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

であることが示されている．特に直方体内の任意の領域Dをとつて，その特性函数をfとしたとき$\Sigma f(P_k)$はN個の点のうちDの中に入るものの個数をしめす． すなわち上の関係はD内に入る点の比率の極限値がDの体積に比例することを示し，Gleichverteilung（均等配置）の名の出てくる由来になつている．われわれの多重積分にこれを応用すればこの極限関係をそのままに適用し

（6）　　$\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(P_k)$

によつて積分（1）の近似ができるであろう．ここにP_kは（5）の計算操作によつて逐次に得られる点列である．

試みにn次元超球の体積を近似する例を作つてみた．$f(P_k)$を

$$f(P_k) = \begin{cases} 1 \cdots & \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - \frac{1}{2})^2 \leqq \frac{1}{4} \\ 0 \cdots & \quad\quad〃 \quad\quad > \frac{1}{4} \end{cases}$$

として操作を行えば，半径$\frac{1}{2}$のn次元超球の体積が求められるはずである．以下に$n=4$の場合について規則的走査法，モンテカルロ法，均等配置法について行つた計算の数値例を第1表でしめす．なお上の方法で得られた体積を2^4倍して半径1の超球の場合に換算したも

第 1 表

回数	規則的	モンテカルロ	均等配置
25	0	5.76	4.48
50	1.6	5.76	5.12
75	2.9867	6.1867	4.9067
100	3.04	5.92	5.6
125	2.432	6.528	5.376
150	2.56	6.2933	5.3333
175	3.3829	5.9429	5.12
200	4.64	5.76	5.12
225	5.0489	5.6178	5.12
250	4.864	5.632	5.184
275	4.9455	5.4691	5.2364
300	5.6333	5.6533	5.1733
325	6.2523	5.8585	5.2185
350	6.7657	5.9429	5.2114
375	6.6987	5.9733	5.12
400	6.48	5.92	5.12
425	6.5882	5.8353	5.0824
450	6.9689	5.7956	5.0844
475	7.040	5.6589	5.12
500	6.848	5.536	5.056
525	6.5290	5.4248	5.0590
550	6.3709	5.2945	4.9745
575	6.3443	5.3148	4.9809
600	6.2133	5.3333	4.9867
625	5.9648	5.2736	4.9664

のが表示してある．半径1の4次元超球の体積の真値は

$$\pi^{\frac{4}{2}}/\Gamma\left(\frac{4}{2}+1\right)=4.9384$$

である．また規則的走査法は$p=5$のときをやつたので全体で$5^4=625$回を要する．これにあわせるよう他の2法も$N=625$までやつた．均等配置法は基準のξ_iを

$$\xi_1=\sqrt{3},\ \xi_2=\sqrt{5},\ \xi_3=\sqrt{7},\ \xi_4=\sqrt{11}$$

にとつて計算した．

規則的走査法と他の2法とのちがいの特徴的なものの一つは，規則的方法では p^n 回の1とまわりが終ればそれで完結であつてそれに追加することができない．他の2法ではある回

数までやつたとしたとき，これに不満ならばさらに操作を追加し何回でも延長して常に精密化の方向に進行できることである．上の例の625回は規則的方法ではそれで終りであるが，他の2つは後何回までも延長できるわけである．

なお次に第2の例として $n=5$ の場合についてモンテカルロと均等配置（$\xi_1=\sqrt{2}$，$\xi_2=\sqrt{3}$，$\xi_3=\sqrt{5}$，$\xi_4=\sqrt{7}$，$\xi_5=\sqrt{11}$）を10000回やつたものを第2表に抄記する．

第　2　表

回　数	モンテカルロ	均等配置
100	7.36	5.76
200	6.72	5.28
300	5.5467	5.44
400	5.84	5.52
500	6.336	5.312
…………	…………	…………
9600	5.2367	5.2767
9700	5.2223	5.2718
9800	5.2114	5.2604
9900	5.2202	5.2558
10000	5.2128	5.2576

真値＝5.2638

Hammersley : Methuen.

Haselgrove : A Method for Numerical Integration　Math. Comp. 1961 p 323～327

本 PDF ファイルは 1965 年発行の「第 6 回プログラミング―シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の捜索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者捜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思います。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日 〜 2021 年 3 月 19 日

掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程

https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html