

3. 正規分布の百分率点の一次有理関数近似

山内二郎 (慶大工)

前回「正規分布に関する近似関数」と題して報告したもの⁽¹⁾のうち、百分率点の一次有理関数近似の計算方針について述べたが、今回はその結果について報告する。

[1] 一次有理関数近似

正規分布関数を次のように記す。

$$P(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

$$y = -\ln 4P(1-P) \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

前回と同様に一次有理関数近似として(記号を変えた)

$$x^2 \simeq \frac{\pi}{2} y \left\{ p_0 + \frac{y}{y+q} p_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

と記する、相対誤差 $E_R(x)$ は

$$1 + E_R(y) = \frac{\frac{\pi}{2} y}{x^2} \left\{ p_0 + \frac{y}{y+q} p_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

となる。範囲は $0 \leq y \leq 10$ とすると

$$1 + E_R(0) = p_0 = 1 - \delta \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

$$1 + E_R(10) = 1 + \delta \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

$$\left[\frac{\pi}{2} y / x^2 \right]_{y=10} = \frac{1}{1+a} \quad \text{とおくと,}$$

$$a = 0.1426161700 \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

(1.4)式は次のようになる。

$$1 + E_R(y) = \frac{\frac{\pi}{2} y}{x^2} \left\{ 1 - \delta + \frac{y}{y+q} (1 + 0.1q)(a + (2+a)\delta) \right\} \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

前回の方針に従って、一様最良化を目指して、繰り返し近接法で計算した結果は次のようになつた。

$$x^2 \simeq y \left\{ 2.061\ 178\ 1 - \frac{5.726\ 218\ 8}{y+11.640\ 595} \right\} \dots\dots\dots (1.9)$$

この近似式の相対誤差の極値は次のようになった。

y	E_R
0	- 0.000 978 025
1.440 4	+ 0.000 978 034
5.766 6	- 0.000 978 035
10	+ 0.000 978 035

[2] x について一様最良化

(1.9) 式を出発点として x について一様最良化をはかった。すなわち

$$x \simeq \left[y \left\{ A_0 - \frac{A_1}{y+q} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (2.1)$$

の形式で一様最良化をはかるわけである。

この相対誤差を $E'_R(y)$ と記すと、

$$y=0 \text{ では } 1+E'_R(0) = (1-\delta)^{\frac{1}{2}} \\ = 1 - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 - \frac{1}{16}\delta^3 \dots\dots\dots (2.2)$$

であるから、

$$y=10 \text{ では } 1+E'_R(10) = 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{1}{16}\delta^3 \dots\dots\dots (2.3)$$

よつて

$$\left(1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{1}{16}\delta^3 \right)^2 = 1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{4}\delta^3 \dots\dots\dots (2.4)$$

δ は前節の結果から、0.000 978 に近いから、 $\delta^3/4$ は省略してよいであろう。従つて (1.4) 式における p_1 は

$$1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{1}{1+a} \left\{ 1 - \delta + \frac{10}{10+q} p_1 \right\} \\ p_1 = (1+0.1q) \left\{ a + \delta(2+a) + \frac{1}{2}\delta^2(1+a) \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

となり、

$$x^2 \simeq \frac{\pi}{2} y \left\{ 1 - \delta + \frac{y}{y+q} (1+0.1q) \left[a + \delta(2+a) + \frac{1}{2}\delta^2(1+a) \right] \right\} \dots (2.6)$$

となるから、(2.1) 式の A_0, A_1 は次のようになる。

$$A_1 = q \cdot \frac{\pi}{2} (1+0.1q) \left[a + \delta(2+a) + \frac{1}{2}\delta^2(1+a) \right] \dots\dots\dots (2.71)$$

$$A_0 = \frac{\pi}{2}(1-\delta) + \frac{\pi}{2}(1+0.1g)[a+\delta(2+a) + \frac{1}{2}\delta^2(1+a)] \dots\dots\dots (2.72)$$

(1.9) 式の δ を用いて (2.6) 式によつて E'_R を計算して、それから繰り返し近接法で計算して次の結果を得た。

$$x \simeq \left[y(2.061\ 178\ 6 - \frac{5.726\ 220\ 4}{y+11.640\ 595}) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (2.8)$$

(2.8) 式の相対誤差の極値は次のようになつた。

y	E'_R
0	-0.000 489 017
1.440 2	+0.000 489 014
5.766 6	-0.000 489 014
10	+0.000 489 016

極値を与える y の近くの y について E'_R を戸田英雄君に計算してたしかめてもらった。

- (1) 山内：正規分布に関する近似関数。1964年1月，プログラミングシンポジウム報告集(N-8) N-107.

本 PDF ファイルは 1965 年発行の「第 6 回プログラミング—シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の検索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者搜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思えます。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日～2021 年 3 月 19 日

掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程

<https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html>