3. 正規分布の百分率点の一次有理関数近似

山 内 二 郎 （慶大工）

前回「正規分布に関する近似関数」と題して報告したもの[(1)]のうち，百分率点の一次有理関数近似の計算方針について述べたが，今回はその結果について報告する．

［1］ 一次有理関数近似

正規分布関数を次のように記す．

$$P(x)=\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \quad \cdots\cdots (1.1)$$

$$y=-\ln 4P(1-P) \quad \cdots\cdots (1.2)$$

前回と同様に一次有理関数近似として（記号を変えた）

$$x^2\simeq\frac{\pi}{2}y\left\{p_0+\frac{y}{y+q}p_1\right\} \quad \cdots\cdots (1.3)$$

と記する，相対誤差$E_R(x)$は

$$1+E_R(y)=\frac{\frac{\pi}{2}y}{x^2}\left\{p_0+\frac{y}{y+q}p_1\right\} \quad \cdots\cdots (1.4)$$

となる．範囲は$0\leqq y\leqq 10$とすると

$$1+E_R(0)=p_0=1-\delta \quad \cdots\cdots (1.5)$$

$$1+E_R(10)=1+\delta \quad \cdots\cdots (1.6)$$

$$\left[\frac{\pi}{2}y/x^2\right]_{y=10}=\frac{1}{1+a}$$ とおくと，

$$a=0.142\ 616\ 170\ 0 \quad \cdots\cdots (1.7)$$

(1.4)式は次のようになる．

$$1+E_R(y)=\frac{\frac{\pi}{2}y}{x^2}\left\{1-\delta+\frac{y}{y+q}(1+0.1q)(a+(2+a)\delta)\right\} \quad \cdots\cdots (1.8)$$

前回の方針に従つて，一様最良化を目指して，繰り返し近接法で計算した結果は次のようになつた．

$$x^2 \simeq y\{2.061\ 178\ 1 - \frac{5.726\ 218\ 8}{y+11.640\ 595} \quad \cdots\cdots \quad (1.9)$$

この近似式の相対誤差の極値は次のようになつた.

y	E_R
0	$-0.000\ 978\ 025$
1.440 4	$+0.000\ 978\ 034$
5.766 6	$-0.000\ 978\ 035$
10	$+0.000\ 978\ 035$

[2] xについて一様最良化

(1.9) 式を出発点としてxについて一様最良化をはかつた. すなわち

$$x \simeq \left[y\left\{A_0 - \frac{A_1}{y+q}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (2.1)$$

の形式で一様最良化をはかるわけである.

この相対誤差を$E'_R(y)$と記すと,

$$y=0 \text{ では } \quad 1+E'_R(0)=(1-\delta)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{8}\delta^2-\frac{1}{16}\delta^3 \quad \cdots\cdots \quad (2.2)$$

であるから,

$$y=10 \text{ では } \quad 1+E'_R(10)=1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2+\frac{1}{16}\delta^3 \quad \cdots\cdots \quad (2.3)$$

よつて

$$\left(1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2+\frac{1}{16}\delta^3\right)^2=1+\delta+\frac{1}{2}\delta^2+\frac{1}{4}\delta^3 \quad \cdots\cdots \quad (2.4)$$

δは前節の結果から, 0.000 978に近いから, $\delta^3/4$は省略してよいであろう. 従つて (1.4) 式におけるp_1は

$$1+\delta+\frac{1}{2}\delta^2=\frac{1}{1+a}\left\{1-\delta+\frac{10}{10+q}p_1\right\}$$

$$p_1=(1+0.1q)\left\{a+\delta(2+a)+\frac{1}{2}\delta^2(1+a)\right\} \quad \cdots\cdots \quad (2.5)$$

となり,

$$x^2 \simeq \frac{\pi}{2}y\left\{1-\delta+\frac{y}{y+q}(1+0.1q)\left[a+\delta(2+a)+\frac{1}{2}\delta^2(1+a)\right]\right\} \quad \cdots \quad (2.6)$$

となるから, (2.1) 式のA_0, A_1は次のようになる.

$$A_1=q\cdot\frac{\pi}{2}(1+0.1q)\left[a+\delta(2+a)+\frac{1}{2}\delta^2(1+a)\right] \quad \cdots\cdots \quad (2.7.1)$$

$$A_0=\frac{\pi}{2}(1-\delta)+\frac{\pi}{2}(1+0.1q)[a+\delta(2+a)+\frac{1}{2}\delta^2(1+a)] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.72)$$

(1.9) 式の δ を用いて (2.6) 式によつて E_R' を計算して，それから繰り返し近接法で計算して次の結果を得た．

$$x \simeq [y(2.061\,178\,6-\frac{5.726\,220\,4}{y+11.640\,595})]^{\frac{1}{2}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.8)$$

(2.8) 式の相対誤差の極値は次のようになつた．

y	E_R'
0	−0.000 489 017
1.440 2	+0.000 489 014
5.766 6	−0.000 489 014
10	+0.000 489 016

極値を与える y の近くの y について E_R' を戸田英雄君に計算してたしかめてもらつた．

---

(1) 山内：正規分布に関する近似関数．1964年1月，プログラミングシンポジウム報告集（N−8） N−107.