オート漫談

竹内郁雄 [1a]

概要　オートマトンに関する漫談ということで，いろいろな話題をオムニバス的に語った講演の報告である．漫談ということで，脈絡はほとんどないが，どこかに楽しめるアイデアを見つけていただければ幸いである．

キーワード　オートマトンとしてのパチンコ，オートマトン理論，パリンドローム，素数スクラブル，子供の情報科学教育，Look and Say，セルオートマトン

1. はじめに

オートマトンやガジェット的なコンピューティングを話題にする夏のプログラミングシンンポジウムで何か話してほしいと言われ，さて，研究的な話題は何もないぞ，ということで，筆者がこれまでオートマトンに関わってきたエピソードをオムニバス的に紹介することにした．他人の褌もだいぶ借りた．全体として脈絡はないものの，楽しめていただけたようである．インターネットで見つけた画像や映像にはすべて出展を明記したので，引用元に感謝したい．この報告は当日用いたPowerPointの焼き直しであるが，発表当日より進展したものについてはその旨とともに記載する．

2. オートマトンとの馴れ初め

私がオートマトンに出会ったのは，少々記憶が怪しいが，小学3年生（1955年）ごろではないかと思う．もちろん，オートマトンという言葉なしでの出会いである．

私の父はお寺の住職兼高校の教師という宗教職・教育職でありながら，パチンコが大好きだった．何らかの免罪符効果を狙ったのか，徒歩10分弱のパチンコ屋に行くときはよく私を連れていってくれた．私は眺めているだけで，たまに景品のキャラメルなどがもらえると単純に喜んでいた．

ある日，処分される中古のパチンコ台をお土産に買ってきてくれた．もちろんパチンコ玉も一緒である．当然のことながら毎日遊んだ．そのときに知ったのだが，パチンコ玉は毎日メンテしていないと（毎日遊ばないと）すぐ錆びる鉄球だということ．

そのうち，パチンコ台の裏側のメカニズムが面白くなり，玉の重さだけで精巧に動く様子を見るのがパチンコそのものより興味深くなった．これが，大人になってまったくパチンコをしなくなる巧まざる教育だったと思う．

記憶がすでにまだらなのだが，インターネットで調べたら，私の記憶に近いパチンコ台が見つかった．

http://www.nagoya-milky.com/sr1561.html

名古屋JR金山駅高架下のアンティークモール「ノスタルジックマーケット金山」内にある【昭和レトロ百貨店】で売っているナゴヤ大成式　最新型当り玉発見機パチンコ台である．見つけたときヤフオクで22,000円の値段がついていたが，上記のページでは32,300円になっている．

表の写真と裏の写真を見ると，表はともかく，裏が記憶とまったく違う．裏に入った玉の動きがブラックボックスになってしまっていて見えない．私は裏の玉の動きを見て楽しんでいたのだから…….

写真1: レトロなパチンコ台

パチンコ台の歴史を調べると，下記のようになっている（原文のまま）．

http://www.jn-alpha.co.jp/business/p/255.html

1942年　戦時体制により、パチンコは不要不急産業として全面禁止。パチンコ店は閉店され、台は処分される。

[1] 東京大学名誉教授
[a] nue@nue.org

1946 年 終戦により、禁止されていたパチンコが復活する。
1948 年 風俗営業取締法（改正前の風営法）制定により、パチンコは許可営業となる。「正村ゲージ」が登場。
1949 年 貸玉料金が 1 円から 2 円に値上げされる。
1951 年 法改正により 18 歳未満の入場が禁止される。
1952 年 菊山徳治考案のオール 20 連発式（機関銃式）が開発される。
1953 年 循環器第 1 号機（高速度連射可能機：160〜180 発/分の玉が自動的に発射）開発。

そこに玉が入るとチューリップの花が幅広く開いて玉の入る確率が高まり，もう一度入るとまた通常の幅に閉じる，その名もチューリップという画期的な発明は 1960 年らしいのだが，不思議なことに私の記憶ではチューリップの記憶が残っている．1960 年は私が中学 2 年のころだから，パチンコ屋に近付くはずがない．実際，私はオートマトンの授業では，女子大であろうと構わず，いつもこれを引き合いに出していた．考えてみれば，学生のうち，パチンコ台のチューリップを知っている子はほとんどいなかったのではなかろうか．

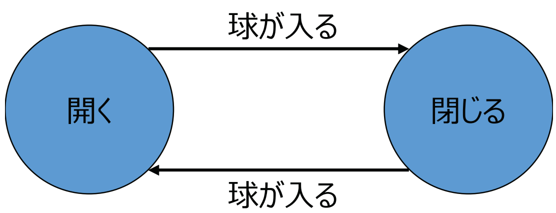

図 1: オートマトンとしてのチューリップ

私の記憶に近い裏側は，

https://www.youtube.com/watch?v=hZ0psgHs2B8

に見える映像だが，こんなに複雑ではない．電気を一切使っていない純粋な機械式だった．

いずれにせよ，私は 60 年前にすでに今日のピタゴラスイッチを楽しんでいた．

本稿を書いていて，父が中古パチンコ台を買ってきてくれたのは実は中学 2 年のころだったのではないかという疑念が湧き起こってきた……．まさか．

3. 野崎昭弘先生のオートマトン理論の講義

理学部数学科で「できない竹内」と呼ばれていたころ，大学院で野崎昭弘先生のオートマトン理論の半期の講義があった．何も覚えていないのだが，工学部でのオートマトンの講義とは多分違う，非常に抽象化された講義だったと記憶している．

当然，期末試験もさっぱり分からなかった．そこで，教養の 1 年のときの経済学の試験で大成功を納めた「それはさておき」作戦を採った．なんとなく，そのころ，頭の中で考えていて分からんなぁと思っていた，オートマトンとは何の関係もない問題である．

問題: 平面上の点集合で，その平面上の任意の直線とちょうど 2 点で交わるものは存在するか？

これにはニアミスが一杯ある．例えば，2 直線，$1/x$ の双曲線，巨大な円など．図形として思いつくような例はなさそうで，私は存在しないだろうと予想した．これを書いたのである．

試験は可でギリギリセーフだったが，この問題が，数学教室内でちょっと話題になった．問題の意味は子供にも分かるし，あるかないかだから答えはクリアなはずだ．すると，ある偉い先生が「うーむ，これは連続体仮説が関係しているかもしれない」と．うーむ，こんなに白黒が明白なことにそんなこと言われても……．

その後，新幹線で多分，京都に移動中，佐藤雅彦さん（元京都大学教授）から，「そう言えば，あの問題，難波莞爾先生の教科書の**練習問題**に出てましたよ」という情報を教えてもらった．米国で超元気農法，もとい，超限帰納法で存在証明がなされたとのこと．つまり，超限帰納法による構成が行なわれた．

練習問題になるような程度の問題だったのかとがっかりしたが，私が年取って，難波莞爾先生と席を並べて年に何日か仕事をする機会があったとき，雑談でこの話をしたら，「ああ，それ Sierpenski の問題ですね」．おお，あの Sierpenski のガスケットと呼ばれる図形の発明者が作った問題だったのだ．

今回の発表の前に，先生の本「集合論」（サイエンス社，サイエンスライブラリ　現代数学への入門 3，1998）第 2 章 3 節の練習問題 8 p.76 を確認したが，数学を離れてン十年の私にはかなりのリハビリが必要なようだった．

4. Palindrome, Prime Scrabble

Palindrome とは回文，つまり逆に読んでも同じ文章になるものを指す．ただし，句読点，濁点，半濁点，小文字などはすべて無視する約束になっている．以前，外山芳人さん（元東北大学教授）が回文 Lisp プログラムを書いたときは，カッコは逆向きに解釈するという約束をした．例えば，`(do od)` を文字通り `)do od(` としたのでは Lisp のプログラムにならない．

もう絶版になっているが，ビックリハウス版・国語辞典「大語解」（パルコ出版，1982）には多数の読者投稿回文が載っていて，まさに回文の宝庫である．傑作の一部を引用しよう．

いま紅き糸結ばれ，弾む吐息が甘い
（いまあかきいとむすはれはすむといきかあまい）
あたし頭の中ばかなの．またあしたァ．
妻，おぬしが死ぬを待つ
怠慢な人間にナンマイダ
春，夜な夜な歌うるさく，また頭腐る．歌うなよな！夜は
けだるき一日，生きるだけ
作りたい，気の利いた理屈

ところで，英語にはこんなすごい palindrome はないだろうと思っていたのだが，調べるとかなりすごいものが見つかった．

https://eikaiwa.weblio.jp/column/knowledge/english-palindromes

からいくつか紹介しよう．英語の場合は空白も無視する．

Go, dog. ゆけ、犬よ
No lemon, no melon. レモンもメロンもねぇ
A Santa at Nasa. サンタが NASA にて
Rats live on no evil star. ネズミは邪悪ではない星に住む
No, it never propagates if I set a gap or prevention. いいえ，もし私がギャップか予防を仕掛ければそれは決して広がりません

特に最後の回文にはただただ感服するばかりである．これより長い palindrome はあり得るのだろうか？

ところで，これがどうしてオートマトンと関係するかというと，palindrome は文脈自由文法（CFG）で簡単に定義できるが，非決定性プシュダウンオートマトン (NDPDA) でしか受理できない，特にタチの悪い文法クラスなのである．調べていて驚いたのだが，かなり最近の論文でこれが真面目に論じられていた．

Terry Anderson, Narad Rampersad, Nicolae Santean, and Jeffrey Shallit: Finite Automata, Palindromes, Powers, and Patterns，LNCS 5196, 2008.

これでオートマトンには義理を果たしたので，あとは回文でひたすら遊ぼう．

2 年ほど前，面白いパズルはないものかと思案していて，Scrabble（図 2）をベースにするアイデアに思い至った．

これは 2 人の競技者がアルファベット 1 文字が書かれた札を何枚か持っていて，それらを並べて盤面の上でクロスワードパズルのように英単語を作るゲームである．札を使ったらまた山から補充する．新しく作る英単語は元からあった英単語につながるかクロスしていないといけない．盤には色のついたマス目があり，そこに単語がかかると色に応じた倍率のボーナスがつく．

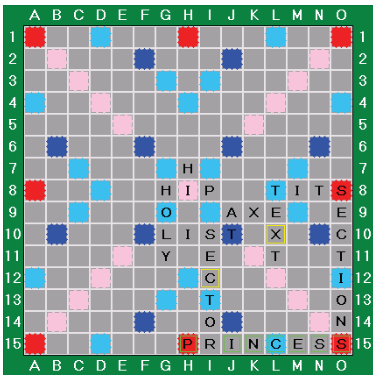

図 2: Scrabble

このゲームの最大の難点は置かれた札が作った文字列が本当に英単語かどうかで論争が起こることだろう．だから，標準的な参照辞書が必要になる．

そこで考えたのが素数を単語とする Prime Scrabble である．対戦ゲームではなく，独り用のパズルである（図 3）．

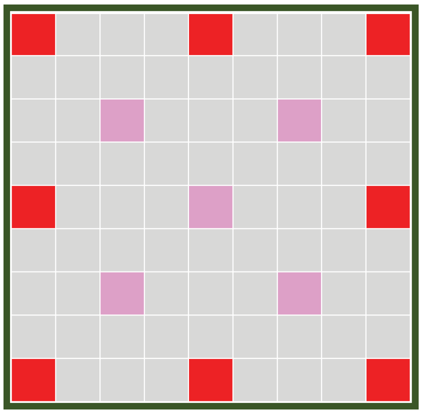

図 3: Prime Scrabble の盤面

まず，0〜9 の札をそれぞれ 5 枚ずつ持つ．5 桁あるいは 3 桁の素数が単語である（これで辞書問題はなくなる）．札は 1 枚 1 点であるが，0 は両端には来れない弱点があるで 2 点と数える．5 桁の素数は 5 枚の札の点の合計，3 桁の素数は 3 枚の札の点の合計の基礎点がつく．素数の両端は空きマスか盤端に接していなければならない．

逆さまから読んでも素数になるもの（可逆素数）は，基礎点が 2 倍になる．盤の端にある 8 つの赤（モノクロだと濃い灰色）のマスに素数がかかると素数の点は 3 倍，内側の 5 つのピンク（モノクロだと薄い灰色）のマスに素数がかかると 2 倍のボーナスがつく．ただし，赤とピ

ンクの両方にかかった場合は，高いほうの 3 倍ボーナスだけがつく．

これらの条件で最大得点を目指せというのが，私が数学セミナー「エレガントな解答をもとむ」(日本評論社，2017 年 9 月号）に出した問題である．あまり数学っぽくないが，オリジナルの Scrabble よりは数学的か．

このパズルは，闇雲に解くのではなく，まず高得点が取れそうな札の配置の設計図を考えるのが得策である．プログラムを書くときも，設計図に基づいて探索範囲を狭めるのが得策である．ただし，設計図が下手だと最高得点の上限が下がってしまう．

設計図の作成自体をコンピュータにやらせることは，一種のメタプログラミングであり，非常に興味深い．

3 桁も 5 桁も素数は十分大量にあり，可逆素数も多い．私のプログラムが間違っていなければ，3 桁の素数は 143 個，可逆素数は 43 個，5 桁の素数は 8363 個，可逆素数は 1499 個である．つまり，設計図を書くときにすべてを可逆素数としても解はありそうだ（これはヤマカン)．するとあとの工夫は 3 倍ボーナス，2 倍ボーナスにかかるような配置と，基礎点が 2 点の 0 を 2 つの素数の交点に置く配置を考えることが重要になる．

コンピュータで探索を始める前に，この設計図を作れば，すべてを可逆素数にできるとしたら最高得点を設計段階で見積もることができる．

数学セミナーにこの問題を出したときは，私の設計図（図 4）で 406 点の最高得点が出ていた（図 5）．ここで，P は 1,3,7,9 のいずれか，Q は 1,3,7,9 以外，R は 1,3,7,9 と 0 以外（2 倍のボーナスしかつかないところに 0 を入れてはいけない)，0 はそこに 0 が来る，という意味である．

P	Q	P	Q	P		P	Q	P
Q		Q		Q				Q
Q		P	R	0	R	P		Q
Q		Q		Q		R		Q
P	Q	P		P	Q	0	Q	P
						R		
P				P	R	P	R	P
Q				Q				Q
P	Q	P	Q	P		P	Q	P

図 4: 私の設計図

ところが，解答者の中にはそれより高い 408 点を出した人が 2 名いた．そのうちの栗原悠太郎氏の設計図（図 6）には驚いた．左上の 3 点ボーナスの赤マスを使っていない．それよりも 0 で素数が交差するほうを優先したのだ．言われてみれば，確かにそうだ．この設計図に基づく解の例を図 6 に示す．

3	8	3	5	1		7	5	7
0		2		0				6
0		1	8	0	8	9		6
2		4		6		2		5
9	5	3		7	8	0	4	1
						4		
9				3	6	1	8	7
2				5				6
9	4	7	2	3		1	4	9

図 5: 図 4 の設計図に基づいた解の一例
別解はいくらでもある

		1	4	9		7	2	7
				0		6		2
9		1	4	0	2	9		4
2		5		5				6
9	0	0	8	9		1	8	1
		5				6		
7	4	3		7	2	0	5	3
6				8		6		5
1	4	3	8	7		3	8	3

図 6: 栗原氏の解

数学セミナーは数学の雑誌なので，ほとんどの人は設計図を作り，素数表と睨めっこしながら埋めていったと思われる．人間の手でできる範囲の問題なのであった．

ここからが今回の新しい話題である．可逆素数は 2 倍だが，逆さまから読んでも同じ数になる回文素数を 3 倍の得点にしたらどうなるか? 可逆素数より回文素数のほうが稀少なので，これは妥当なルールだろう．実際，3 桁の回文素数は 15 個で，143 個の素数の 10 %強，5 桁の回文素数は 93 個で，8363 数の素数の 1.1 %強である．ちなみに 7 桁の素数は 586071 個，回文素数は 668 個で 0.11 %強．この減り方には何か怪しい法則が潜んでいそうだ．ちなみに偶数桁の可逆素数はあるが，回文素数はない．証明は簡単な練習問題である．

プロシンでの発表では準備時間がなかったので提案まで，ここから先は後日談である．実は，新ルールでも以前作ったプログラムが使えるだろうと思ったら，プログ

ラムの改造が予想以上に大変だった．全部回文素数でできるのなら逆に簡単なのだが，どうもそれは無理らしい（手作業ではそうなる）．すると，ただの可逆素数も次善の候補に入れないといけない．これがプログラムを修正する上で意外と面倒だった．

しょうがないので手でやってみたら，プログラムを改造するよりも早く，553 点のかなりいい解が見つかった（図 7）．

		3	5	3		7	2	7
				8		0		2
3		9	4	0	4	9		2
8		8		8				2
3	5	0	5	3		1	0	7
		8				6		
9	4	1		7	4	0	4	7
1				6		6		5
9	6	2	6	9		1	5	1

図 7: 私が手作業で見つけた 553 点の解

この話をとある会合で小川貴英さん（元津田塾大学教授）にしたら，しばらくもしないうちにコンピュータで素晴らしい解が見つかったという知らせが来た．それが 585 点の解である（図 8）．小川さんの設計図の 585 点の解は対称解を含めて総数が 448 個とのこと．

9	6	7	6	9		1	5	1
8		4		4		2		6
3	8	0	8	3		8		0
8		4		4		2		6
9	0	7	0	9		1	0	1
3				9		1	5	7
5				5		6		5
3	2	4	2	3		7	2	7

図 8: 小川さんの 585 点の解

大学を引退して，突然バリバリとプログラムを書き始める人っているのである．こういうパワーはぜひ有効活用すべき！

5. 子供にオートマトンを教える

私は 2014 年から 2 年間ほど，早稲田情報科学ジュニアアカデミー（村岡洋一先生主宰）において，中高生に情報科学を教える企てに参画した．プログラミング教育が流行しているが，ソロバン塾的なプログラミング教育ではなく，**学問としての情報科学の基礎**を教えるという方針だった．それに賛同したのである．この方針は，これからの初等教育に織り込むべきだと私は信じている．

私の担当は「データ圧縮」と「オートマトン，コンピュータ，プログラム」（それぞれ 2 時間）である．つまり，中高生にオートマトンを教えようというわけだ．こういうコースを受けようという子にはゲームを作りたいという子が一定割合以上いるが，ドラクエの多くの謎解きは有限オートマトンそのものだという導入をすると，ちょっと目が輝く．

19 世紀にはすでにからくり人形としてのオートマトンは存在した．Maskelyne & Clarke のトランプゲームをプレイするオートマトン（1875 年）とか，お茶を運ぶ江戸時代の人形などを紹介したあと，パンチロール紙で「プログラム」を読み取る，つまり論理を扱うオートマトンとしてのジャカード自動織機（1800 年）を紹介する．

コンピュータ登場以前には，論理機械（オートマトン），ホレリスの統計機械，バベッジに始まる数値計算機械，この 3 種類の機械が概念的にはばらばらだったが，コンピュータの出現によって根は同じものだということが初めて理解された．中でもコンピュータにとってはオートマトンが重要である．

こういった話をしたあと，簡単な抽象オートマトンの話をする．さすがに，パチンコのチューリップの話はできないので，図 8 のようなドアの鍵の話をする．

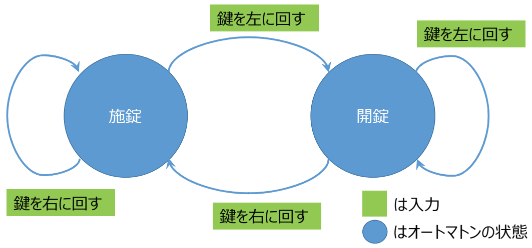

図 9: ドアの鍵を記述するオートマトン

次に 10 キーの錠前のオートマトン．その先も難しいところまでは行けないので，10 進数を入力して 3 で割り切れるかどうかを調べるオートマトンを子供たちにワイワイと描いてもらう．といってもゼロからでは無理なので，ヒントとして「余りが 0」，「余りが 1」，「余りが 2」と書いた大きなマグネット円盤（プラス 2 つの最終状態円盤）をホワイトボードにペタンして，それらの間を状態遷移の矢印で結んでもらう．矢印が 1 つ 2 つできるとあとは一気呵成にできる．これはそのまま 2 進数が 3 で割り切れるかのオートマトンにも使える．

こんな具合に授業を進めていき，なんとその 10 枚ぐらいあとのスライドでは，他のアーキテクチャのコンピュータとその上で動くプログラムをもらうと，それを「真似て」計算をすることができる「万能コンピュータ」の話にまで持っていく．我ながら恐るべき進度での授業である．とはいえ，そのあたり漫画のようなスライドなので，子供たちはなんとなくうなずいて聞いてくれる．

村岡先生はこのアカデミーの成功に味を占めて，小学生対象のクラスへとの拡大路線．私の担当は「情報セキュリティ」だった．小学生相手だと戦略を練り直さないといけない．なにしろ英語はもとより，難しい漢字も使えない．調べると「情報」の「情」も「報」も指導要領では小学 6 年生で教わる漢字とある．受講生は小学 3, 4 年生が主体だったので，これには参った．初出漢字にルビを振ることにしたのだが，PowerPoint にはルビを振る機能がない．いちいちテキストボックスを貼り付けるしかない．結果的には漢字についてのそういう心配は不要だった．「情報」が読めない子が「情報科学アカデミー」を受講するわけがないのだ．

教材そのものは，簡単なゲームで子供たちを実際に遊ばせ，そのあと，そこで行うジャンケンを電話で行うときに，インチキができないようにするにはどうすればいいかという話に持っていく．いくつかの段階を経て例の素因数分解の困難さを利用した不正防止にまで話を進める．待てよ，素数？ 小学 3 年生は知っているのか？と心配になったが，参観しておられた母親によれば OK とのこと．

それにしても，これくらいの子供たちは座学でじっと話を聞き続ける忍耐がない．お互い初対面なのにすぐ打ち解けあって，教材のプラスチックコインを投げ合ったり，紙飛行機を飛ばしたり，……，小学校の先生は大学の先生にはない特殊能力を持っているようだ．

実際，村岡先生は授業開始 1 時間ちょっとで，子供たちを押えきれなくなって，グロッキーになってしまわれた．

```
\input /home/tak/tex/myheader.ptex
\nopagenumbers
\tff\dm
\baselineskip=3.5ex
$$\vbox{\halign{\hfil~~#&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&%
\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&\hfil#\hfil~~&%
\hfil#\hfil~~\cr
&{\tt [0B]}&{\tt [1C]}&{\tt [2D]}&{\tt [3E]}&{\tt [4F]}&{\tt [5G]}&{\tt [6H]}&%
{\tt [7I]}&{\tt [8J]}&{\tt ~9~}&{\tt ~A~}\cr
\noalign{\medskip\hrule height 1.2pt}
0~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 0& 1& 2& 3& 4& 5& 6& 7& 8& 9& A\cr
1~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 9& A& 0& 1& 2& 3& 4& 5& 6& 7& 8\cr
2~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 7& 8& 9& A& 0& 1& 2& 3& 4& 5& 6\cr
3~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 5& 6& 7& 8& 9& A& 0& 1& 2& 3& 4\cr
4~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 3& 4& 5& 6& 7& 8& 9& A& 0& 1& 2\cr
5~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 1& 2& 3& 4& 5& 6& 7& 8& 9& A& 0\cr
6~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & A& 0& 1& 2& 3& 4& 5& 6& 7& 8& 9\cr
7~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 8& 9& A& 0& 1& 2& 3& 4& 5& 6& 7\cr
8~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 6& 7& 8& 9& A& 0& 1& 2& 3& 4& 5\cr
9~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 4& 5& 6& 7& 8& 9& A& 0& 1& 2& 3\cr
A~~~\vrule width 0.8pt height 2.5ex depth 1ex & 2& 3& 4& 5& 6& 7& 8& 9& A& 0& 1\cr
}}$$
\end
```

図 10: $p = 20, x = 11$ の状態遷移表の plainTEX ソース

プロシンで発表するにあたり，何も新たにプログラムを書いてないことに気づいた私は，ここに話題に出した「割り切れる問題」のオートマトンの一般版「p 進法の数 $d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0$ が（10 進法で書いた）x で割り切れるかどうかを調べる」オートマトンの状態遷移表を出力するプログラムを「申し訳」程度に書いた．

しかし，状態遷移表の配列を作るプログラムはわずか 4 行．しょうがなく，状態遷移表を plainTEX で印刷するところま書いた．それでも全体で 30 行弱．申し訳にはならなかった．図 10 はこのプログラムが，$p = 20, x = 11$ の場合に出力した plainTEX ソースである．

6. 謎の数列列

私が早稲田情報科学アカデミーで教えていることを聞きつけたある方から，子供のプログラミング教育についての相談を受けた．そのときもらった「親子で数学パズル」（ユーフォーブックス，Vol.28，2013）という本にとんでもない問題が書かれていた．難易度は幼稚園年中組〜小学 1 年生とある．いわく，

この次にはどんな数字が入るでしょうか？

1
11
21
1211
111221

この問題をご存知ない方は先を読み進める前にちょっと考えていただきたい．年中組？ 各数列の和が 1,2,3,5,8 のフィボナッチ数列風だというのは，足し算が仮定されていない年中組にとっては高度すぎる．ではどんな簡単な規則がこの数列列にあるというのだ．

私は答えが分かるまで，休み休みに考えて，2 日ほどかかった．先日，とあるエンジニアたちの集まり（夕食会）でこの問題を紹介したら，数名が 1 時間ほどで解いてくれた．年中組の発想に立ち戻るのは「できるエンジニア」には困難なようである．

なんと，これはライフゲームで有名な John H. Conway の発明だった！ しかもとんでもない数理が背後に潜んでいた．オート漫談なので，これの解答をオートマトンの状態遷移図で示そう．次ページの図 11 がそれである．状態遷移図の矢印（エッジ）が複雑に交差するので，ワープ記法で書いてある．出の矢印の番号と同じ番号の入りの矢印に入れるのである．図中,「赤字」のところはモノクロの場合,「□で囲まれた数字」と読み替えていただきたい．

とても年中組が理解できる状態遷移図には見えないが，逆に年中組の算術能力ですら，これくらい複雑だということかもしれない．

答えが分かったであろうか？ **せっかくなので**，ここには答えを書かないでおく．

この数列列は Look and Say と呼ばれる．答えが分かってしまうと，確かに年中組レベルである．それにしてもこれを表現するオートマトンが（「オート漫談」に合わせるために描いたのだが）こんなに複雑になるとは予想外だった．少し考えて分かる通り，4 以上の数字は現れない．

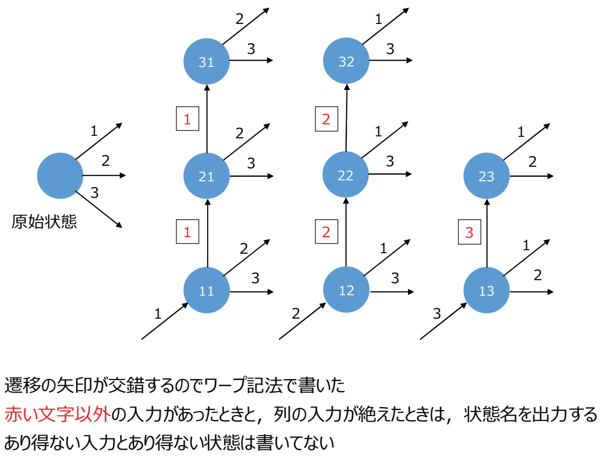

図 11: Look and Say の状態遷移図

答えが分かるまでに時間がかかった腹いせに，これも数学セミナーの問題として出題した．いわく，

この数字列は指数的に長くなっていきますが，任意の $k \geq 1$ について，左端の k 文字は，数字列を順番に作っていくと，いつかはある周期で同じものが繰り返されます．これを証明してください．(数学セミナー「エレガントな解答をもとむ」日本評論社，2016 年 9 月号)

実際にプログラムを作って，Look and Say 数列列を順次打ち出してみるとそうなっていることはほぼ自明なのだが，いざ証明しようとすると，意外と面倒．

命題から見て，数学的帰納法で証明するとよさそうに見えるのだが，実際にやってみると，「$n = 1$ で成立，i で成立すると仮定して，$i + 1$ でも成立することが言えれば，一般の n で成立する」という通常な帰納法ではうまくいかないのである．

その理由は，この列の部分列の長さが単調非減少とならないことがあるからだろう．これ以上の詳細は述べない．

さて，この Look and Say がいかにものすごいかについて簡単に紹介しておく．n 番目の列の長さを L_n と書くと，L_{n+1}/L_n の $n \to \infty$ の極限は Conway 定数 λ と呼ばれ，$\lambda = 1.303577269034\ldots$ である．この数は以下のような巨大な 71 次 (!) 方程式

$$\begin{aligned}0 = {} & x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} \\ & - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} \\ & + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} \\ & + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} \\ & - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} \\ & + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} \\ & + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} \\ & + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} \\ & + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} \\ & + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} \\ & - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6\end{aligned}$$

の正のユニーク解であることが分かっている．ここまで来ると深遠で，もう素人の追随を許さない．

しかし，さらにすごい定理がある．その名も「Conway の宇宙定理」．私が知らなかっただけかもしれないが，これは最初が 3 から始まる Look and Say 数列列が元素周期律表と驚くべき類似性があるというのである．これは Mathematica の作者として有名な Stephen Wolfram の Web ページ

http://mathworld.wolfram.com/CosmologicalTheorem.html

をご覧いただきたい．その冒頭の文が以下である．

There exists an integer N such that every string in the look and say sequence "decays" in at most N days to a compound of "common" and "transuranic elements."

年中組の問題が宇宙定理に結び付くとは……．

7. セルオートマトン

Conway といえばライフゲーム (The Game of Life) である．これについては散々語りつくされているが，3 次元のライフゲームがあるのかどうか，気になるところである．昔買った Andrew Ilachinski の 840 ページもある大著 *Cellular Automata: Discrete Universe* (World Scientific, 2001) をチラ見したかぎりでは，まだ面白いものは見つかっていなかったようだ．

しかし，"3D game of life" を検索すると，YouTube に最近の研究成果がいくつか見える．しかし，どれもいまいち感銘しない．例えば，

https://www.youtube.com/watch?v=b0pmtKtkw9Y

など．

しかし，2 次元ライフゲームに z 軸というか，t 軸（時間軸）を足したもの，つまり，時刻 0 の 2 次元ライフ

ゲームの状態を原平面として，時刻 1 の状態をその下に，時刻 2 の状態をその下にと発展させていくコンピュータグラフィックスが非常に面白い．Caetano Veyssières が 2015 年 12 月に公開したものである．

https://www.youtube.com/watch?v=iiEQg-SHY1g&t=31s

3D 図形のダイナミックな発展を SF 映画さながらのカメラワーク，つまり視点移動とズーム操作で，素晴らしいスペククルムービーに仕上げている．サグラダ・ファミリア顔負けの大伽藍が成長していくのである．これは一見の価値がある（動画の最初のほうは割りとしょぼい違う映像なのだが，少し我慢すると写真 2 のよう画面が出てくる）．

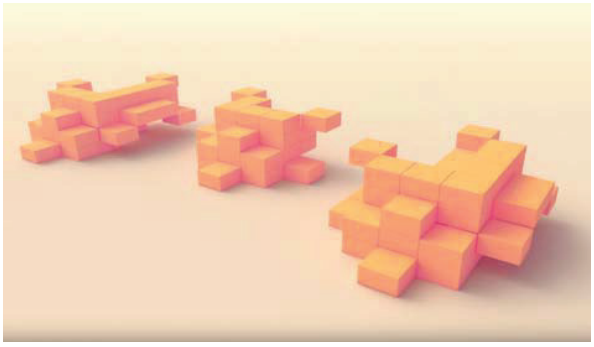

写真 2: 時間軸を足した「3 次元」ライフゲーム
時刻 3 までの様子

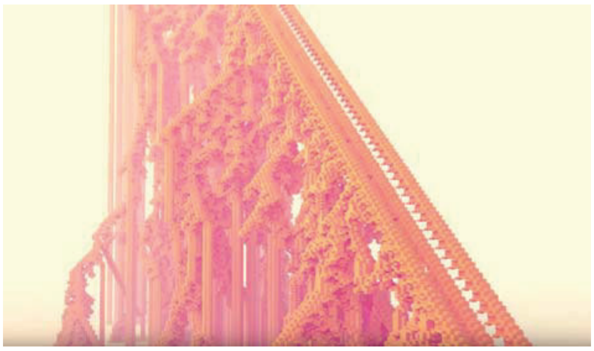

写真 3: 時間軸を足した「3 次元」次元ライフゲーム
大伽藍に成長

またも他人の褌発表になってしまったが，面白いものは面白い．しかし，最後に少しオリジナリティのある「作品」を紹介しておく．

以前，とある試験問題で 1 次元セルオートマトンの問題を出したことがある．簡単に紹介しよう．状態として 0 と 1 を取り得るセルが c_0 から c_{n-1} まで n 個並んだ 1 次元オートマトンがある．左端と右端はつながっている．時刻 $t+1$ の各セルの状態は，時刻 t の左隣り，自分，右隣りの 3 つ状態の関数として表現される．この関数の引数の組み合わせは 8 種類 $(111, 110, \ldots, 000)$ で，それぞれに 0 あるいは 1 の値を割り振るので，関数は全部で 256 種類ある．結果がすべて 0 のものを 0 番，結果がすべて 1 のものを 255 番と順に番号をつけることができる．これをルール番号 R と呼ぶ．

長さ n，ルール番号 R，各セルの $t=0$ での初期状態を与えると，時刻 t の発展にしたがい，状態列を各時刻 1 行ずつに打つと，さきほどの「3 次元」ライフゲーム」と同様に，1 次元セルオートマトンの時間発展が 2 次元的に見える．このとき，状態 0 をピリオド (.)，状態 1 を (#) と出力するようにすると，コンソールでも模様が比較的くっきり見える．

例えば，$n=100$, $R=90$, 初期状態はセル c_{40} のみ 1，ほかはすべて 0 から出発すると図 12 のような Sierpenski のガスケットが見える．環状になっているので，折り返しが起こっている．

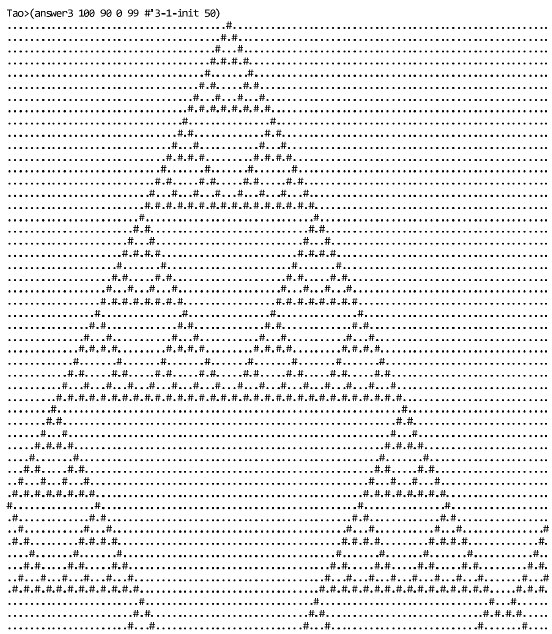

図 12: Sierpenski のガスケット

次は，$n=860$, $R=129$, 初期状態は $c_0=0$，その右が 1, その右は 2 個連続して 0, その右が 1, その右は 3 個連続して 0, といった具合に状態 1 のセルの間隔が 1 つずつ増えていく．これの時間発展を左側 100 個だけ出力したのが図 13 である．熱気球がたくさん上がっているように見える．

ここまでのものは誰かがすでに発見していると思う．しかし，次に 1 次元セルオートマトンが伸び縮みすると

いうルールを加える．つまり，状態遷移のあと，連続して 3 個以上の 0 が並んだら，その並びの左端に 0 の入ったセルが 1 個挿入される．また連続して 3 個以上の 1 が並んだらその並びの左端のセルが 1 個取り除かれてその両隣りが隣接するように間が詰められる．ただし，左端のセルが削除された場合は，右端のセルが左端の位置に移動する．

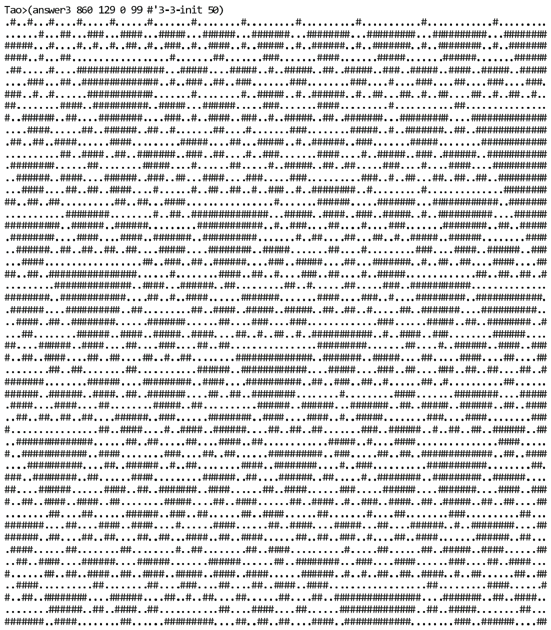

図 13: 熱気球がたくさん上がっている

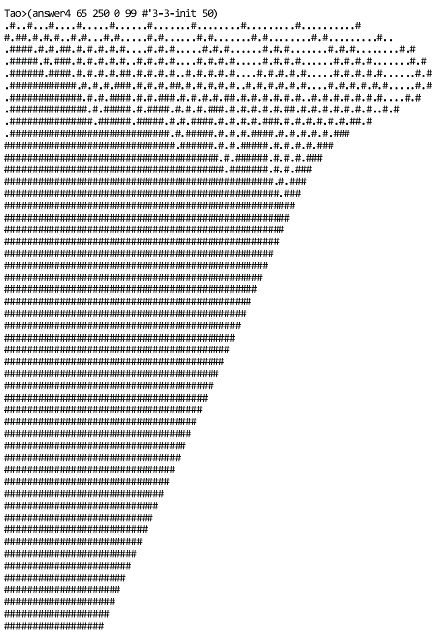

図 14: 聖火台

これで，初期の $n = 65$, $R = 250$，初期状態は上の「熱気球」と同じとすると，図 14 のような模様が出力される．パラメータをいろいろいじっていて偶然見つけたものが，これはオリンピックの聖火台（の右半分）にそっくりである（会場からはビールのジョッキのほうがぴったりなのでは？という声もあった）．こういう炎のような曲線的なパターンが出てくるのは伸縮するセルオートマトンだからこそだと思われる．

2020 年の東京オリンピック・パラリンピックが迫っている．その成功を祈念して，本報告を閉じることにしよう．必要な参考文献や，質疑の内容は本文に埋め込んだ．いろいろな引用をさせていただいた（褌を貸してくださった）偉大な先輩たちに改めて感謝する．