畳敷き戦略では阻止できないが他の方法で阻止できる１次元一般化三並べの目標形

徳久 貴之[1,a)]

概要：一般化三並べは Frank Harary によって提案された 2 人完全情報ゲームである．これは，盤上に石を交互に打ち，先手があらかじめ決められた目標の形を作れば先手の勝ちというゲームである．本論文では，盤面を 1 次元とし，目標の形の左右反転は認めないという条件のもとで，後手は畳敷き戦略では先手が目標の形を作ることを阻止できないが，それ以外の戦略で阻止できるような目標の形が存在することを示す．

Existence of a Creature that is a Paving Winner but still a Loser in One-Dimensional Achievement Games

Takayuki Tokuhisa[1,a)]

Abstract: Frank Harary introduced achievement games as generalized tic-tac-toe. They are perfect information games played by two people. Two players alternately paint one square on a two-dimensional board in each color. If the first player paints the predetermined pattern that is called a creature, the first player wins the game. In this paper, under the condition of one-dimensional board instead of two-dimensional board and not admitting the reverse of creatures, I prove the existence of a creature that is a paving winner but still a loser.

1. はじめに

一般化三並べは Frank Harary によって提案された 2 人完全情報ゲームである．無限に広がる碁盤上に両者が交互に石を 1 個ずつ打ち，あらかじめ決められた目標とする石の配置を先手が実現できれば先手の勝ちというゲームである [1],[2]．目標とする石の配置の 90 度ごとの回転やその裏返した配置を先手が実現した場合も先手の勝ちとみなすのが一般的である．後手の打ち方に依らず，先手が必ず勝利することができるような目標の形を「勝ち型」それ以外の形（後手が阻止し続けられる形）を「負け型」と呼ぶことにする．

先行研究により，目標の形をポリオミノ（複数の正方形を辺でつなげた多角形）に限れば，Snaky（図 1）と呼ばれる 1 つの図形を除いて勝ち型か負け型かが判明している．勝ち型は全部で 11 種類存在する．勝ち型と Snaky を除いた全てのポリオミノは負け型であり，これらは畳敷き戦略（paving）によって負け型であることを証明できる．

畳敷き戦略とは，2 つのマスを 1 組として碁盤を組で敷き詰めておき，先手の手に対して後手は先手が打ったマスと同じ組に属するもう 1 つのマスに石を打つという戦略である．それを続けることで，先手が目標の形を作ることを後手が阻止し続けることができる場合がある．その例として，図 2 を見てほしい．どの 2 × 2 の正方形の中にも組が入っており，その組の両方のマスを先手が打つことは畳敷き戦略の性質上できないため，2 × 2 の正方形は負け型であることがわかる．畳敷き戦略は，負け型であることを証明する際によく用いられる証明方法である．

本論文では，1 次元盤面で目標の形の左右反転を認めないという条件のもとで，畳敷き戦略では負け型と示せないが，それ以外の方法により負け型と示せる形の存在を示す．

1 京都大学 大学院人間・環境学研究科
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University
a) tokuhisa.takayuki.67x@st.kyoto-u.ac.jp

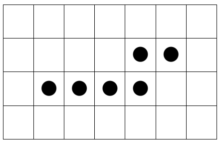

図 1　Snaky

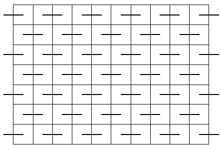

図 2　畳敷き戦略の例

2. 先行研究

はじめに本論文と特に関連が深い3つの結果を紹介する．Harborth らによって，畳敷き戦略では Snaky が負け型であることを示すことが不可能であると証明された [3]．畳敷き戦略では先手が目標の形を作ることを後手は阻止できないということである．また，末續によって，1 次元盤面の一般化三並べにおいては，畳敷き戦略では負け型と示すことができない形が存在することが示され，更にそのような形であるための十分条件が示されている [4]．しかし，それらが勝ち型かどうかは未解決問題として残されている．また，本田によって，畳敷き戦略の拡張である「部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略」という証明方法とその例が示されている [5]．本論文では，この「部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略」を用いて，畳敷き戦略では負け型とは示せない形に対して，その形が負け型であることを証明する．

他にも，一般化三並べについては多くの研究がなされており，盤面の形状を変形させて考察したもの [6],[7],[8]，ゲーム開始時点で先手の石がいくつか置かれている場合を考察したもの [9]，目標の形が複数個ある場合を考察したもの [10],[11]，駒を打つ場所に制限を加えた場合を考察したもの [12] などが存在する．また，書籍 [13] では，Snaky は勝ち型であり，15×15 の広さの盤面であれば先手は後手の着手に依らず Snaky を作ることができると予想されている．

3. 畳敷き戦略では示せない負け型の存在

1 次元一般化三並べで目標の形を図 3 としたときについて考察する．ここでは，先手が目標の形の左右を反転した配置を実現したとしても先手の勝ちとは扱わないルールのもとで考える．目標の形の左右反転を認めた場合については，末續の結果 [4] により，図 3 が負け型であることを畳敷き戦略によって示すことは不可能であることがわかる．目標の形の左右反転を認めない場合も末續の論文 [4] と同様の議論を行うことで，以下の結果を得ることができる．

定理 1. 左右反転なしの 1 次元一般化三並べにおいて，図 3 の形を畳敷き戦略により負け型と示すことは不可能である．

次に，マス目に $\ldots, 12, 13, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 10, 11, 12, 13, 0, 1, \ldots$ と番号を割り振る．盤面を $0, 1, \ldots, 12, 13$ の連続する 14 マスごとに分割し，そのそれぞれをエリアと呼ぶ．

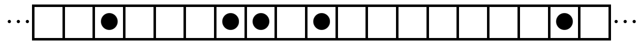

図 3　目標の形

ここで，1 つのエリア内での一般化三並べについて考える．コンピュータを用いた全探索により，以下の主張が成り立つことが確認できる．

補題 2. 1 つのエリアを盤面として，先手から交互に石を打つとき，後手が最善を尽くせば，$\{0,2,10\}, \{0,1,3,11\}, \{1,2,4,12\}, \{2,3,5,13\}, \{3,4,6\}, \{0,4,5,7\}, \{1,5,6,8\}, \{2,6,7,9\}, \{3,7,8,10\}, \{4,8,9,11\}, \{5,9,10,12\}, \{6,10,11,13\}, \{7,11,12\}, \{8,12,13\}$ のうち，いずれかの集合の全ての要素（マス目）に先手が石を打つことは不可能である．

マス目の数が 14 なので考えられるゲームの進行は高々 14！通りであり，工夫をすれば一般的な PC で数秒で計算できる計算量である*1.

この結果をもとに以下の定理を示すことができる．

定理 3. 左右反転なしの 1 次元一般化三並べにおいて，図 3 の形は負け型である．

証明概略. 図 3 が勝ち型である，つまり先手が図 3 の形を作れたと仮定する．図 3 を構成する 5 石のうち，真ん中の石が入っているエリアに注目する．図 4 を参考にすると，そのエリアの $\{0,2,10\}, \{0,1,3,11\}, \ldots, \{8,12,13\}$ のうち，いずれかの集合の全ての要素（マス目）に先手が石を打つ必要があることがわかる．しかし，補題 2 より後手が最善を尽くせばこれは不可能である．以上より，各エリアごとに独立したゲームとみなし，先手の手に対し，後手は同じエリア内の適切なマスに打つという戦略をとることで，そのエリアに真ん中の石が入るような図 3 の配置を先手が実現することを阻止できる．よって図 3 は負け型である． □

4. 部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略について

この「部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略」では，エリアの選び方やエリアを選択したのちの集合の選び方が様々考えられる．エリアと集合をどのように選択するかによって証明の成否が変わってくるため，この選択は非常に重要である．先述の証明では，連続する 14 マスを 1 つのエリアとしたが，一般にエリアが連続しているマス目からなっている必要はない．例えば，図 5 のようにエリアが連続したマス目からなっていなくても，その平行移動らにより盤

*1 プログラムのソースコードは `https://github.com/tokuhisat/Harary`，特にその中の `Harary1dim_WeakWin.cpp` で公開している

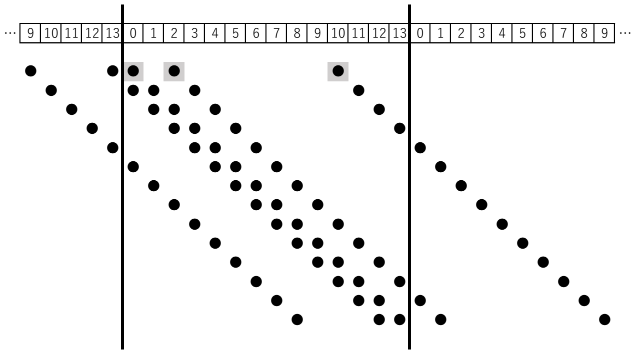

図 4　図 3 を構成する 5 石のうちの真ん中の石が，注目しているエリアに入る場合の列挙

面を重なりなく敷き詰めることが出来る場合には，そのエリアに対して同様に議論を進めることができる．

エリアを決めた後にもまだ選択の余地が残されている．例えば，先述の証明における補題 2 において，$\{0,2,10\},\{0,1,3,11\},\ldots,\{8,12,13\}$ の代わりに $\{9,13\},\{0,1,3,11\},\ldots,\{8,12,13\}$ とした場合について考える．仮に，この新たな補題を示すことができたとすると，このことから図 3 が負け型であるという同様の結論が導けることになる．その理由を以下述べる．まず図 3 を構成する 5 石のうち，真ん中の石が入っているエリアに注目する．そのエリアにおいて真ん中の石が 0 以外の位置にあれば，先手は上記の $\{0,1,3,11\},\ldots,\{8,12,13\}$ のうちのいずれかの集合に属する全てのマス目に石を打つ必要がある．しかし，それは新たな補題より不可能である．また，真ん中の石が 0 の位置にあれば，1 つ左のエリアの 9 と 13 の位置に先手は石を打たなければならないことになるが，上記の集合に $\{9,13\}$ があるため 1 つ左のエリア内の 9 と 13 のマスの両方に先手が石を打つことは不可能である．(注: 実際は，この「新たな補題」は偽であるので，このような集合を選択すると同様の議論では図 3 が負け型であるとを示すことはできない．)

このように，この証明方法にはエリアの決め方，集合の決め方の候補が多く存在し，執筆者は図 3 の形が負け型であることを示すためのエリアの最小サイズは求められていない．この証明方法により図 3 が負け型であると示すことができるようなエリアのうち，執筆者が発見しているものの中でマス目の数が最も小さいものは上記で示した連続する 14 マスからなるエリアである．

この証明方法においては，エリアを大きくとることで計算量は増えてしまうが証明はできやすくなる，すなわち，あるエリアで証明できればそれを含むようなエリアでも証明ができると期待するかもしれない．しかし，この考えに対して疑問を投げかける以下の結果が出ている．以下では目標の形を図 6 とし，盤面を連続する 15 マスごとに分割した場合に関する補題を補題 4，盤面を連続する 16 マスごとに分割した場合に関する補題を補題 5 としている．

図 5　盤面を連結でないエリアによって分割した一例

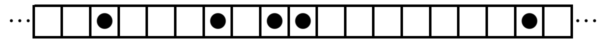

図 6　目標の形

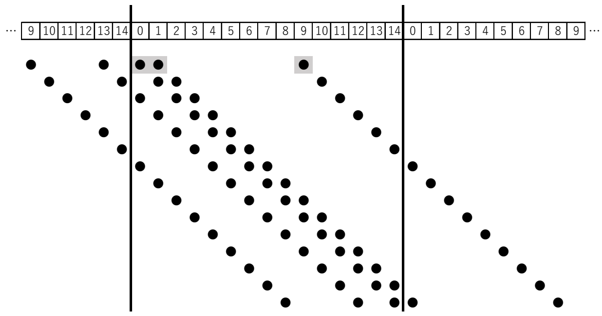

図 7　図 6 を構成する 5 石のうちの真ん中の石が，注目しているエリア（15 マス）に入る場合の列挙

補題 4. 連続する 15 マスからなる 1 つのエリアを盤面とし，先手から交互に石を打つとき，後手が最善を尽くせば，$\{0,1,9\},\{1,2,10\},\{0,2,3,11\},\{1,3,4,12\},$ $\{2,4,5,13\},\{3,5,6,14\},\{0,4,6,7\},\{1,5,7,8\},$ $\{2,6,8,9\},\{3,7,9,10\},\{4,8,10,11\},\{5,9,11,12\},$ $\{6,10,12,13\},\{7,11,13,14\},\{8,12,14\}$ のうち，いずれかの集合の全ての要素（マス目）に先手が石を打つことは不可能である．

補題 5. 連続する 16 マスからなる 1 つのエリアを盤面とし，先手から交互に石を打つとき，後手がどのように打ったとしても，$\{0,1,9\},\{1,2,10\},\{0,2,3,11\},\{1,3,4,12\},$ $\{2,4,5,13\},\{3,5,6,14\},\{0,4,6,7,15\},\{1,5,7,8\},$ $\{2,6,8,9\},\{3,7,9,10\},\{4,8,10,11\},\{5,9,11,12\},$ $\{6,10,12,13\},\{7,11,13,14\},\{8,12,14,15\},\{9,13,15\}$ のうち，いずれかの集合の全ての要素（マス目）に先手が石を打つことが可能である．

以上より，15 マスごとに区切った場合は図 6 が負け型であると示すことができるが（図 7 参考），16 マスごとに区切った場合は同様の議論をしても図 6 が負け型であると示すことはできない（図 8 参考）．この結果からも，単純に大きくエリアをとるのではなく，効果的なエリアを選択することが重要だといえる．

5.　研究の意義と今後の課題

マス目の数が無限である盤面で負け型であることを示す方法としては畳敷き戦略以外の方法がほとんど知られお

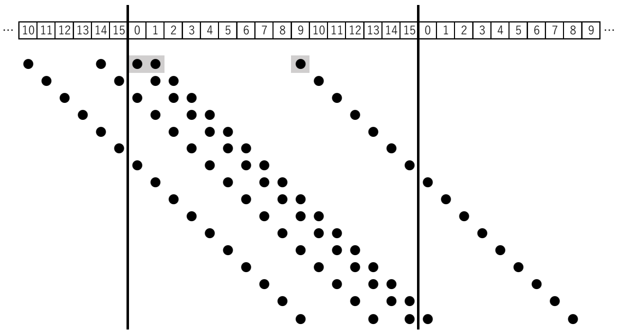

図 8　図 6 を構成する 5 石のうちの真ん中の石が，注目しているエリア（16 マス）に入る場合の列挙

らず，Snaky のような畳敷き戦略では負け型であると証明できない形は paving winner と呼ばれている．その中で，左右反転を認めない 1 次元盤面という条件下で，paving winner だが loser（負け型）である形が存在することを示した点が当研究の成果である．今後は更に，今回の証明に用いた「部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略」では負け型だと証明できないが，実際は負け型であるような形が存在するかについての考察を深めたいと考えている．

今回活用した「部分的に動的戦略をとる畳敷き戦略」には計算時間という大きな問題が伴っている．仮に，1 秒で 10^{18}（100 京）盤面の探索ができるスーパーコンピュータが存在するとして，そのコンピュータを 1 年間動かすとすると，およそ 10^{25} 盤面の探索ができることになる．これは 25 の階乗に近い数である．つまり，エリアを 25 マスとして，単純に全探索を実行しようとすると，この規模の計算が必要になるということである．もちろん，出てきた盤面を辞書に格納し，結果を記憶していくといった方法で計算量を減らすことはできる．しかし，今度はメモリの容量の問題が生じてしまう．総合的に考えて，一般的な PC で全探索を実行できるマス目の数の限界は 20 辺りではないかと感じている．20 マスの範囲で証明できる形は少数だと考えているため，これ以外の証明方法についての考察が不可欠である．今後の課題は，勝ち型，負け型のいずれにおいても新たな証明方法を開拓し実際に証明していくことである．特に，上記の事項を踏まえて，現実的な時間で可能な計算によって証明できる方法を模索していくことが重要である．証明方法を充実させることを通して，Snaky が勝ち型であるか負け型であるかを示すことに近づくことができると考えている．

参考文献

[1] Frank Harary, Achievement and Avoidance Games for Graphs, *North-Holland Mathematics Studies Book series*, Vol.62, pp.111-119, 1982.

[2] 伊藤 大雄, パズル・ゲームで楽しむ数学：娯楽数学の世界, 森北出版, 2010.

[3] H.Harborth and M.Seemann, Snaky is a paving winner, *Bull.inst.Combin.April*, Vol.19, pp.71-78, 1997.

[4] Koki Suetsugu, Achievement Games on a One-dimensional Board, 情報処理学会論文誌, Vol.58, 2017.

[5] 本田 耕一, 一般化三目並べの拡張における勝敗判定に関する研究, 東北大学 大学院情報科学研究科 修士学位論文, 2011.

[6] Nándor Sieben, Snaky is a 41-dimensional winner, *INTEGARS: ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY*, Vol.4, No.G05, 2004.

[7] 石黒 裕也, ディプタラマ, 成澤 和志, 篠原 歩, トーラス盤面における一般化三並べの解析, ゲームプログラミングワークショップ 2015 論文集, pp.162-167, 2015.

[8] Immanuel Halupczok, Achieving snaky, *INTEGERS: ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY*, Vol.7, No.G02, 2007.

[9] Hiro Ito and Hiromitsu Miyagawa, Snaky is a winner with one handicap, In HERCMA2007, 2007.

[10] 八鍬 友貴, 本田 耕一, 篠原 歩, 一般化三並べの変種：負け型のペアは勝てるのか？, ゲームプログラミングワークショップ 2009 論文集, pp.35-42, 2009.

[11] 八鍬 友貴 , 本田 耕一 , 成澤 和志 , 篠原 歩, 一般化三並べの拡張：目標動物の組合せ, 情報処理学会論文誌, Vol.55, 2014.

[12] H.Harborth and M.Seemann, Snaky is an edge-to-edge looser. *Geombinatorics* ,Vol.5, pp.132-136, 1996.

[13] József Beck, Combinatorial games :tic-tac-toe theory, Cambridge University Press, 2008.