分割削除ニムの勝敗判定

安福 智明[1,a)]　坂井 公[2,b)]　篠田 正人[3,c)]　末續 鴻輝[1,d)]

概要：新たな石取りゲームである「分割削除ニム（Split-and-delete Nim）」を提案し，その勝敗判定条件について考察した．このゲームではプレイヤーは自分の手番でまず石の山のいくつかを 2 つに分割し，その後で分割したのと同数の山を選んで削除する操作を行うものであり，従来研究されていた「削除ニム (Delete Nim)」における削除と分割の操作順を逆転させたルールのゲームである．本論文では 2 山の場合の勝敗判定条件を述べるとともに，山数を一般化した場合についても検討を行った．

Determining the Winner of Split-and-delete Nim

Tomoaki Abuku[1,a)]　Ko Sakai[2,b)]　Masato Shinoda[3,c)]　Koki Suetsugu[1,d)]

Abstract: We propose a new combinatorial game named “Split-and-delete Nim” and study its winning or losing conditions. The active player starts with n heaps. He or she selects k heaps and then splits each of the k heaps into two heaps. There is now a total of $n+k$ heaps. The active player then deletes k heaps to return to the original total of n heaps. The order of the operations of deleting and splitting is the reverse of the order in Delete Nim. In this paper, we discuss the winning condition when the number of heaps is two. We also discuss some variants of this game for an arbitrary number of heaps.

1. はじめに

ニム（Nim）は古くからよく知られた石取りゲームの一つである．石取りゲームの基本的なルールでは 2 人のプレイヤーが交互に場の石を取って減らし，石がそれ以上取れなくなった時点で勝敗を判定する．本論文では上記の設定の下で，自分の手番で可能な着手がないと負け（正規形ゲーム）であるルールのみを扱う．

最もポピュラーなニムである 3 山崩しでは，場にいくつかの石で構成される山が 3 つあり，プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び，その山から任意の正の整数個の石を取り除く．このニムは二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため，すべての局面を手番側必勝（その局面で手番であるプレイヤーが必勝戦略を持つ）である $\mathcal{N}$ 局面と手番側必敗（その局面で手番でないプレイヤーが必勝戦略を持つ）である $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．上述のニムにおける $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は [4] で示され, このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．本論文では，上記のルール（ただし石の山の数は 3 山とは限らない）のゲームを単に**ニム**と呼ぶことにする．

ニムで一手で取ることのできる石の条件を変えた様々な亜種のゲームとして Moore のゲーム，佐藤・Welter のゲーム（マヤゲーム），Wythoff のゲーム（**Wythoff のニム**として後述する）などが提案されており, それぞれのルールにおける勝敗条件が調べられその数学的な表示が興味の対象となっている．また石の山を分割するゲームとして Grundy のゲームなども知られている．これらのゲームについては [3], [6], [9] などに詳しい．

本論文では，[1], [11], [12] らによって導入された，石の山を削除し別の山を分割するゲームである削除ニム（Delete Nim）と対比できる新たなルールのニムを提案し，その勝敗条件について考察する．

1 国立情報学研究所
2 神奈川大学
3 奈良女子大学研究院自然科学系
a) buku3416@gmail.com
b) gummosakai@gmail.com
c) shinoda@cc.nara-wu.ac.jp
d) suetsugu.koki@gmail.com

2. 分割削除ニムのルール

既存研究で扱われている削除ニムと本論文で扱う分割削除ニムを対比させて説明するために，まず削除ニムのルールについて，[11] に従った形で説明する．

削除ニムでは場にいくつかの石で構成される山が 2 つあり，手番のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い（この 2 つの操作を合わせて「一手」と呼ぶ)，手番を相手に交代する．自分の手番でこの 2 つの操作が完了できないプレイヤーは負けとなる．

- 片方の山を選び，その山の石をすべて取り去ることで山を削除する．
- 残っているもう 1 つの山の石を，どちらも 1 個以上の石を含むような 2 つの山に分ける．

これに対して本論文で新たに扱う分割削除ニムにおいては，場にいくつかの石で構成される山が 2 つある点は同じである．手番のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- 片方の山を選び，その山をどちらも 1 個以上の石を含むような 2 つの山に分ける．この結果，石の山は 3 つとなる．
- 3 つの山のうち 1 つの山を削除し，2 つの山を残す．

これらのルールでの分割と削除の操作順により，従来の削除ニムは「削除分割ニム」と呼ぶと一手での操作順の違いが明確になるため，本稿では従来の前者のルールを**削除分割ニム**（Delete-and-split Nim)，新たな後者のルールを**分割削除ニム**（Split-and-delete Nim）と読んで区別する．この 2 つのルールは可能な着手に違いがある．たとえば場の 2 つの山の石の数がそれぞれ 2 個と 5 個であるとき，一手で 2 個と 4 個の山にすることが削除分割ニムでは不可能であるが，分割削除ニムではまず 5 個の山を 1 個と 4 個に分割し，1 個の山を削除することで可能である．

3. 分割削除ニムの勝敗判定

削除分割ニムおよび分割削除ニムの局面を 2 つの山の石の数 a, b を用いて $\langle a, b\rangle$ と表す．$\langle a, b\rangle$ と $\langle b, a\rangle$ は同じ局面であり区別しない．正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表すとき，ゲームに現れる局面（どちらの手番かという情報を含まない）全体の集合は $G_2 = \{\, \langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ であり，$\langle 1, 1\rangle$ では手番のプレイヤーが分割の操作を行うことができないため負けとなる．どちらのルールでも G_2 に含まれる各局面は $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．削除分割ニムにおいては，a, b がともに奇数であるとき $\langle a, b\rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面であり，それ以外は $\mathcal{N}$ 局面であることが示されている（[1], [11])．

これに対し今回の研究において，分割削除ニムでの勝敗判定条件を得ることができた．以下に勝敗条件を提示するために記号を定義する．正の整数 a に対し，a が 2^k で割り切れて 2^{k+1} で割り切れないとき a の 2 進付値として $v_2(a) = k$ と表す．a が奇数のときは $v_2(a) = 0$ である．

定理 1 (本論文の主結果 1) 分割削除ニムにおいて $\langle a, b\rangle \in G_2$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，$a = b$ かつ $v_2(a)$ が偶数であることである．

定理 1 の証明 G_2 を $P = \{\, \langle a, a\rangle \mid a \in \mathbb{N}, v_2(a)$ が偶数 $\}$ と $N = G_2 \setminus P$ に分割する．このとき (i) $\langle a, a\rangle \in P$ から一手では P に含まれる局面に移せないこと，および (ii) $\langle a, b\rangle \in N$ ならば一手で P に含まれる局面に移せることを示す．

(i) $\langle a, a\rangle \in P$ とする．この局面から 2 つの山の石の数が等しい局面に一手で移すには，一方の山を等分割し，もう一方の山を削除するよりない．しかしその操作が可能であり $\langle a, a\rangle$ から $\langle a/2, a/2\rangle$ に移したとしても $v_2(a)$ が偶数であることから $v_2(a/2)$ は奇数となり，$\langle a/2, a/2\rangle$ は P に含まれない．

(ii) $\langle a, b\rangle \in N$ であるとする．もし $v_2(a)$ または $v_2(b)$ が奇数であれば $\langle a/2, a/2\rangle \in P$ または $\langle b/2, b/2\rangle \in P$ に一手で移すことができる．$v_2(a), v_2(b)$ がともに偶数であるとき，$\langle a, b\rangle$ が P に含まれないという条件から $a \neq b$ であるので $a < b$ と仮定して一般性を失わず，このときは $\langle a, a\rangle \in P$ に一手で移すことができる． □

4. 2 山ニムの可能着手と勝敗条件の関係

本章では, 山数が 2 のときの 4 種類のニム (ニム, Wythoff のニム，分割削除ニム，削除分割ニム）の勝敗条件を比較して考察を行う．本章では石の山の数を最大 2 つとし，2 人のプレイヤーが交互に場の石を取って減らし，自分の手番で可能な着手がないと負けとなるルールは共通であるものとする．各手番で石を取るルールを改めて確認しておく．

ニム 1 つの山を選び，その山から正の整数個の石を取る．

Wythoff のニム 1 つの山から正の整数個の石を取るか，2 つの山から同数の正の整数個の石を取る．

分割削除ニム 2 つの山の片方を 2 つに分割し（このときどちらの山も 1 つ以上の石を含まなければならない)，3 つの山のうち 1 つを削除する．

削除分割ニム 2 つの山の片方を削除し，もう片方の山を 2 つに分割する（このときどちらの山も 1 つ以上の石を含まなければならない)．

非負整数全体の集合を $\mathbb{N}_0$ で表す．ニムと Wythoff のニムの局面の集合は $\tilde{G}_2 = \{\langle A, B\rangle \mid A, B \in \mathbb{N}_0\}$ であり，ニムの $\mathcal{P}$ 局面の集合は $\{\langle A, A\rangle \mid A \in \mathbb{N}_0\}$ であること, また Wythoff のニムにおいて $\langle A, B\rangle$ ($A \le B$) が $\mathcal{P}$ 局面となるのは $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と非負整数 k を用いて $A = \lfloor k\phi \rfloor, B = \lfloor k\phi^2 \rfloor$ と表されることが必要十分条件であることが知られている（[13])．Wythoff のニムの $\mathcal{P}$ 局面は，k を順に代入する

ことで具体的に $\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 6,10\rangle, \ldots$ と得られる．

本章ではここで，ニムと Wythoff のニムのルールに「山の石を取るとき，それぞれの山に少なくとも 1 個の石を残さなければいけない」ことを加える．このルールでの局面の集合は G_2 となり，終了局面は $\langle 1,1\rangle$ となる．元のルールでの局面 $\langle A,B\rangle$ を追加ルールの下での $\langle A+1,B+1\rangle$ に対応させれば，この追加ルールによってもゲームの勝敗判定条件は本質的に変わりがないことがわかる．従って以下では 4 種類のニムはすべて局面の集合が G_2，終了局面は $\langle 1,1\rangle$ のみである，という共通の設定の下で考えることができる．

改めて，局面 $\langle a,b\rangle$ に一手で到達できる局面の集合を考えることで 4 種類のニムの可能着手を比較する．以下でいずれも t は正の整数であり，それぞれの山から取る石の数を表す．$\langle a,b\rangle$ の直前局面（一手前の局面）はそれぞれ

ニム $\langle a+t,b\rangle$ と $\langle a,b+t\rangle$,

Wythoff のニム $\langle a+t,b\rangle$ と $\langle a,b+t\rangle$ と $\langle a+t,b+t\rangle$,

分割削除ニム $\langle a+t,b\rangle$ と $\langle a,b+t\rangle$ と $\langle a+b,t\rangle$ と $\langle t,a+b\rangle$,

削除分割ニム $\langle a+b,t\rangle$ と $\langle t,a+b\rangle$

である．以上により，可能な着手の多寡の包含関係が明確になる．追加ルールの下で，$\langle 6,8\rangle$ の後続局面（一手で移ることのできる局面）を表 1 から表 4 に示す．これらのゲームは，この表の 1 つのマスにコインを置き，このコインを 2 人のプレイヤが交互に動かして（例えば $\langle 6,8\rangle$ のマスにあるコインは〇印のあるいずれかのマスに動かす）$\langle 1,1\rangle$ にコインを到達させたプレイヤが勝ち，とするものとみなすことができる．このコインゲームでは，ニムはチェスのルーク（将棋の飛車の動きをする駒）を，Wythoff のニムはチェスのクィーン（将棋の飛車＋角の動きをする駒）を用いて $\langle 1,1\rangle$ に近づけていく（離れる方向に進める操作は不可）ものと解釈できる．このときの駒として将棋の竜王（飛車が成り，斜め方向にも 1 マス動ける駒）のようにさらに動きを制限したり，追加したゲームの研究もある（[5], [7]）．表からもわかる通り，ニムで可能な着手は Wythoff のニムおよび分割削除ニムでも可能であり，また削除分割ニムで可能な着手は分割削除ニムでも可能である．

続いて，これらのニムにおける勝敗条件の比較を行う．ここでは各局面の Grundy 数も考察する．Grundy 数は複数のゲームを同時に行う（2 人のプレイヤは自分の手番で 1 つのゲームを選んで着手する）ときの勝敗判定に有用であるなど，各局面の勝敗判定よりもさらに詳しい情報を表すものである．以下で Grundy 数の定義を示す．$\mathbb{N}_0$ の真部分集合 T に対し，$\mathrm{mex}(T) = \min\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \notin T\}$ とする．ゲームの局面 g に対し，g の Grundy 数 $G(g)$ を終了局面から以下のように再帰的に

$$G(g) = \begin{cases} 0 & g\text{ は終了局面} \\ \mathrm{mex}\{G(g') | g'\text{は } g \text{ の後続局面}\} & \text{終了局面以外} \end{cases}$$

と定める．$G(g)=0$ であることと g が $\mathcal{P}$ 局面であることは同値である（詳しくは [3], [6], [9] などを参照のこと）．

本章で取り上げた 4 種類のニムのうち，ニムと削除分割ニムについては Grundy 数の簡潔な表式が得られている．$a,b \in \mathbb{N}_0$ を $a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ と 2 進数表記し，a と b の排他的論理和（ニム和）$a \oplus b$ と論理和 $a \vee b$ を

$$a \oplus b = \sum_i 2^i ((a_i + b_i) \mod 2), a \vee b = \sum_i 2^i \max\{a_i, b_i\}$$

と定める．このとき，一般のニムにおける局面 $\langle a,b\rangle$ の Grundy 数は $G(\langle a,b\rangle) = (a-1) \oplus (b-1)$ であり，削除分割ニムにおける局面 $\langle a,b\rangle$ の Grundy 数は $G(\langle a,b\rangle) = v_2((a-1)\vee(b-1)+1)$ である*1（[1]）．

4 種類のニムについて，石の数の少ない局面の Grundy 数を表 5 から表 8 に示す．前述したコインを動かすゲームとみなせば，各マスの Grundy 数は「そのマスにあるコインを動かせる先のマスに現れない最小の非負整数」であり，そのマスに対応する局面が $\mathcal{P}$ 局面か $\mathcal{N}$ 局面かの判別は $G(g)$ が 0 かどうかでわかる．終了局面はいずれのニムも $\langle 1,1\rangle$ のみであり，一手でこの終了局面に移せる局面の集合の包含関係は可能な着手の包含関係に従うことは自明である．また分割削除ニムの $\mathcal{P}$ 局面の集合はニムの $\mathcal{P}$ 局面の集合に含まれるが，可能な着手の包含関係から $\mathcal{P}$ 局面の集合の一般的な包含関係や Grundy 数の大小関係は成立しないことがわかる．局面の Grundy 数はその局面の後続局面の個数以下であることが定義から言えるため，可能な着手の多い Wythoff のニムや分割削除ニムでは大きな Grundy 数が現れやすい傾向がありその簡潔な表式を得ることは未解決な課題として残っている．なおごく部分的な結果として，分割削除ニムにおける Grundy 数が 1 の局面については以下のように表せることがわかる．

命題 2 分割削除ニムで局面 $\langle a,b\rangle$ の Grundy 数が 1 である必要十分条件は，$\langle a,b\rangle$ が以下の N_1, N_2, N_3, N_4 のいずれかに含まれることである．

$$\begin{aligned} N_1 &= \{\langle 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}\rangle \mid l \in \mathbb{N}\}, \\ N_2 &= \{\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \mid l \in \mathbb{N}\}, \\ N_3 &= \{\langle 2(2k+1), 2(2k+1)\rangle \mid k \in \mathbb{N}\}, \\ N_4 &= \{\langle 2^{l+1}(2k+1)-1, 2^{l+1}(2k+1)+1\rangle \mid k,l \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

この命題の証明は付録で示す．このように分割削除ニムにおいて Grundy 数が特に小さい局面の集合については，具体的に表示することが可能だと考えられる．

*1 ここでは「山に少なくとも 1 個の石を残す」という追加ルールの下での Grundy 数である．他の文献を参照する場合には注意すること

表 1 ニムでの $\langle 6,8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	×	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	×	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	×	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	×	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 2 Wythoff のニムでの $\langle 6,8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	○	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	○	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	○	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	○	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 3 分割削除ニムでの $\langle 6,8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	○	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	○	×	×	×
4	×	○	×	○	×	○	×	×	×
5	○	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	○	×	×	×	○	×	×	×
7	○	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 4 削除分割ニムでの $\langle 6,8 \rangle$ の後続局面

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	×	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	×	×	×	×
4	×	○	×	○	×	×	×	×	×
5	○	×	○	×	×	×	×	×	×
6	×	○	×	×	×	×	×	×	×
7	○	×	×	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 5 ニムの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0

表 6 Wythoff のニムの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	0	4	5	3	7	8	6
3	2	0	1	5	3	4	8	6	7
4	3	4	5	6	2	0	1	9	10
5	4	5	3	2	7	6	9	0	1
6	5	3	4	0	6	8	10	1	2
7	6	7	8	1	9	10	3	4	5
8	7	8	6	9	0	1	4	5	3
9	8	6	7	10	1	2	5	3	4

表 7 分割削除ニムの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	3	0	5	6	7	4	9	10
4	3	4	5	0	1	8	9	10	6
5	4	5	6	1	0	2	8	11	12
6	5	6	7	8	2	1	3	12	11
7	6	7	4	9	8	3	0	1	2
8	7	8	9	10	11	12	1	2	3
9	8	9	10	6	12	11	2	3	0

表 8 削除分割ニムの Grundy 数

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	2	0	1	0	3	0
2	1	1	2	2	1	1	3	3	1
3	0	2	0	2	0	3	0	3	0
4	2	2	2	2	3	3	3	3	2
5	0	1	0	3	0	1	0	3	0
6	1	1	3	3	1	1	3	3	1
7	0	3	0	3	0	3	0	3	0
8	3	3	3	3	3	3	3	3	4
9	0	1	0	2	0	1	0	4	0

5. 山数を一般化した分割削除ニム

5.1 半数分割削除ニム

削除分割ニムでは，場の山の数を一般化する拡張ゲームがいくつか提案されている．以下，山の数 n は 2 以上の整数とする．拡張ゲームにおいて手番のプレイヤーは下記の操作を行う．なお石の山を分割する際には，どの山も 1 個以上の石を含むようにする．このためゲームの進行中，各手番終了後の石の山の数 n は一定であることに注意する．

- ABO ニム（All-but-one-delete Nim，[10]） n 個の山のうちから $n-1$ 個の山を選び削除し，残っている 1 つの山を n 個の山に分ける．
- 1 山削除ニム (Single-delete Nim，[8]，[10]) n 個の山のうちから 1 つの山を選んで削除し，残っている $n-1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける．
- 半数削除ニム（Half-delete Nim，n は偶数，[2]） n 個の山のうちから半数の山を選んで削除し，残っている半数の山を 2 つずつの山に分ける．
- 半数以下削除ニム（Less-than-half-delete Nim，[2]） n 個の山のうちから半数以下の山を選んで削除し，削除したのと同数の山を 2 つずつの山に分ける．

これらのルールの $n=2$ の場合はすべて 2 山での削除分割ニムに一致する．山数を一般化したこれらの削除分割ニムでは，それぞれ異なる数学的にも興味深い勝敗判定条件が得られている．このことから本研究では，分割削除ニムにおいても山数を一般化する拡張ゲームを考えることとした．そのうちの 1 つとして半数削除ニムに対応する以下のゲーム（半数分割削除ニム）を考え，$n=4$ の場合における勝敗判定条件を得た．以下で得られた結果について述べる．

4 山での半数分割削除ニムのルールを改めて述べる．いくつかの石で構成される山が 4 つあり，手番のプレイヤーは以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- 4 つの山から 2 つの山を選び，その山をそれぞれ 1 個以上の石を含む 2 つずつの山に分ける．この結果，6 つの石の山ができる．
- 6 つの山のうち 2 つの山を削除し，4 つの山を残す．

ゲームに現れる局面（どちらの手番かという情報を含まない）全体の集合は $G_4 = \{\, \langle a,b,c,d\rangle \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\}$ であり，$\langle 1,1,1,d\rangle$ (d は任意の正の整数) では手番のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる．なお G_4 に含まれる局面 $\langle a,b,c,d\rangle$ を $a \le b \le c \le d$ をみたす形で表記したものを局面の昇順表記と呼ぶ．

このルールにおいての勝敗条件を述べるためにいくつかの記号を導入する．2 でちょうど偶数回割れる正の整数の集合を S とする．すなわち $S=\{1,3,4,5,7,9,11,\cdots\}$ である．この記号を用いれば，定理 1 での $\mathcal{P}$ 局面の集合は $\{\langle a,a\rangle | a \in S\}$ と書ける．さらに $a \in S$ に対し，a 以上の正の整数の集合 $D(a)$ を以下のように定義する．まず $D(1)=\mathbb{N}$ とする．$a \in S$ かつ $a \neq 1$ に対しては $D(a)$ は以下の条件をみたすように定める．

- $m < a$ に対しては $m \notin D(a)$.
- $a \le m \le 2a-1$ に対しては $m \in D(a) \iff m \in S$.
- $m \ge 2a$ に対しては $m \in D(a) \iff m-a \notin D(a)$ と，S に含まれるかどうかを小さい m から順次定める．

たとえば $D(4)=\{4,5,7,10,12,13,15,18,20,21,23,\cdots\}$ となる．この記法を用いて，4 山の半数分割削除ニムにおける勝敗判定条件は以下のように述べることができる．

定理 3 (本論文の主結果 2) 4 山半数分割削除ニムにおける局面 $\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，$\langle a,b,c,d\rangle$ の昇順表記 $\langle a',b',c',d'\rangle$ において $a'=b'=c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ であることである．

5.2 定理 3 の証明

4 山半数分割削除ニムにおける局面 $\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ を昇順表記した $\langle a',b',c',d'\rangle$ が $a'=b'=c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ をみたすとき $\langle a,b,c,d\rangle \in P$，また $N = G_4 \setminus P$ とする．以下の証明において P が $\mathcal{P}$ 局面の集合であり N が $\mathcal{N}$ 局面の集合であること，すなわち N に含まれる局面は一手で P に含まれる局面に移すことが可能であり P に含まれる局面から移せる局面はすべて N に含まれることを示す．

定理 3 の証明 $D(1)=\mathbb{N}$ であることから $\langle 1,1,1,d\rangle$ は P に含まれるが，これは 4 山半数分割削除ニムの終了局面である．また局面 $\langle 1,b,c,d\rangle$ が $b<c\le d$ であるときは，c を 1 と $c-1$，d を 1 と $d-1$ に分割し $c-1$ と $d-1$ を削除して $\langle 1,1,1,b\rangle \in P$ に一手で移すことができるので $\mathcal{N}$ 局面である．以下，$\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ が $2 \le a \le b \le c \le d$ をみたすとき，一手で

(i) $a \notin S$ ならば P の局面に移せる
(ii) $a \in S$ かつ「$a=b=c$ でない」とき P の局面に移せる
(iii) $a \in S, a=b=c$ かつ $d \notin D(a)$ のとき P の局面に移せる
(iv) $a \in S, a=b=c, d \in D(a)$ のとき P の局面に移せない

ことを順に示す．

(i) $a \notin S$ であるとき，a が 2 で偶数回割れることから $a/2 \in S$ である．従って，$b \in D(a/2)$ であれば a を $a/2$ と $a/2$，c を $a/2$ と $c-a/2$ に分割し，$c-a/2$ と d を削除して $\langle a/2,a/2,a/2,b\rangle \in P$ に移すことができる．$b \notin D(a/2)$ であるときは，$b \ge a$ によって $b-a/2 \ge a/2$ であることから $b-a/2 \in D(a/2)$ であるので a を $a/2$ と $a/2$，b を $a/2$ と $b-a/2$ に分割し，c と d を削除して $\langle a/2,a/2,a/2,b-a/2\rangle \in P$ に移すことができる．

(ii) まず $a=b<c\le d$ のときを考える．$a \in S$ により $a \in D(a)$ であるから，c と d をそれぞれ a と $c-a$，a と $d-a$ に分割し $c-a$ と $d-a$ を削除することで $\langle a,a,a,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

次に $a < b \le c \le d$ のときを考える．もし $b \in D(a)$ であればやはり c と d をそれぞれ a と $c-a$，a と $d-a$ に分割し $c-a$ と $d-a$ を削除することで $\langle a,a,a,b\rangle \in P$ に一手で移すことができる．$b \notin D(a)$ かつ $b \ge 2a$ であれば $b-a \in D(a)$ であるので，b を a と $b-a$，c を a と $c-a$ に分割し $c-a$ と d を削除することで $\langle a,a,a,b-a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．$b \notin D(a)$ かつ $a < b < 2a$ であれば $b/2 \in S$ であり $b/2 < a < b$ から $a \in D(b/2)$ でもあるので，b を $b/2$ と $b/2$，c を $b/2$ と $c-b/2$ に分割し $c-b/2$ と d を削除することで $\langle b/2,b/2,b/2,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

(iii) $\langle a,a,a,d\rangle$（$d \notin D(a)$）について，もし $d \ge 2a$ ならば $d-a \in D(a)$ であるので 1 つの a を適当に分割し (両方削除する)，d を a と $d-a$ に分割することで $\langle a,a,a,d-a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．もし $a < d < 2a$ ならば $d \notin S$ であるので $d/2 \in S$ であり，$d/2 < a < d$ なので $a \in D(d/2)$ である．従って 1 つの a を $d/2$ と $a-d/2$，d を $d/2$ と $d/2$ に分割して a と $a-d/2$ を削除することで $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

(iv) P に含まれる局面では少なくとも 3 つの数が同じであることに注意する．$\langle a,a,a,d\rangle$（$a \in S, d \in D(a)$） から一手で移れる局面で少なくとも 3 つの数が同じであるものは，移った結果が

1) $\langle a,a,a,d-a\rangle$　2) $\langle d/2,d/2,d/2,a-d/2\rangle$
3) $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle$　4) $\langle a/2,a/2,a/2,*\rangle$（$*$ は任意）

のいずれかしかない．

1) $d \in D(a)$ の条件から $d-a \notin D(a)$ であるので $\langle a,a,a,d-a\rangle$ は P に含まれない．

2) $\langle d/2,d/2,d/2,a-d/2\rangle \in P$ であるためには $d/2 \le a-d/2$，すなわち $a \ge d$ が必要だがこのとき $a = d$ でなくてはならず，$d/2 \notin S$ となり P の条件に反する．

3) $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ であるためには $d/2 \le a$，すなわち $a \le d \le 2a$ が必要である．もし $a \le d < 2a$ であるならば $d \in D(a)$ を考え合わせると $d \in S$，つまり $d/2 \notin S$ となってしまう．また $d = 2a$ のときは $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ とすると $a \in D(d/2)$，すなわち $d/2 \in D(a)$ であるが，これは仮定の $d \in D(a)$ に反する．

4) $a \in S$ から $a/2 \notin S$．よって $\langle a/2,a/2,a/2,*\rangle \notin P$．□

5.3 1 山分割削除ニム

本節では分割削除ニムの山数一般化の別の例として，1 山分割削除ニムを考察する．このゲームのルールを改めて説明する．いくつかの石で構成される山の数は n（$n \ge 2$）であり，手番のプレイヤーは以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- n 山のうちの 1 つの山を選び，その山をそれぞれ 1 個以上の石を含む 2 つの山に分ける．この結果，石の山の数は全部で $n+1$ となる．
- これら $n+1$ 山のうちの 1 つの山を削除し，残った山の数が n となるようにする．

$n = 2$ の場合は 2 章で述べた分割削除ニムに一致する．このゲームでの勝敗判定条件は $n = 3$ においても未解決であるが, 部分的な結果と現在の研究状況について報告する．$n = 3$ の場合，このゲームは 3 つの山のうちの 1 つを分割して全部で 4 つの山とし，この中から 1 つの山を削除して着手が完了する．ゲームに現れる局面（どちらの手番であるかという情報を含まない）全体の集合は $G_3 = \{\langle a,b,c\rangle | a,b,c \in \mathbb{N}\}$ であり，終了局面は $\langle 1,1,1\rangle$ のみである．このゲームの $\mathcal{P}$ 局面の集合を P，$\mathcal{N}$ 局面の集合を N とする．ゲームの進行により場の石の総数は単調減少であるため，P の要素として $\langle 1,1,1\rangle, \langle 2,2,2\rangle, \langle 1,3,3\rangle, \langle 1,4,4\rangle, \langle 2,3,5\rangle, \langle 1,5,7\rangle$ などを順に挙げることができる．1 山分割削除ニムではある 1 つの山の石だけを減らすことが可能であることから，以下の命題が成り立つことは明らかである．

命題 4　$a,b \in \mathbb{N}$ に対し，$\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c は高々 1 つである．

表 9 として，a,b に対して $\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c を掲げる．存在しない場合は×で示している． a と b が近い値であるときは c は小さい値となる傾向がある程度見て取れる．特に $a = b$ である場合は次の命題が成り立つ．

命題 5　$\langle a,a,c\rangle \in P$ ならば，$a \ge c$ である．

証明 $\langle a,a,c\rangle \in P$ かつ $a < c$ をみたす a,c が存在すると仮定する．このとき $\langle a,a,1\rangle, \langle a,a,2\rangle, \langle a,a,3\rangle, \ldots, \langle a,a,a\rangle$ はすべて $\mathcal{N}$ 局面である $(*)$．特に $\langle a,a,a\rangle \in N$ であることから，この局面から一手で移すことのできる $\mathcal{P}$ 局面が存在する．しかし $\langle a,a,a\rangle$ から移せる局面は $\langle a,a,i\rangle$（$i < a$）または $\langle a,a',a''\rangle$（$a'+a'' = a$）のいずれかであり，前者が $\mathcal{P}$ 局面であれば $(*)$ に反し，後者が $\mathcal{P}$ 局面であれば $\langle a,a,c\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面であることに反する．　□

$\langle a,b,c\rangle \in P$ であるための条件を得る前段階である，a,b に対して $\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c が存在する条件もまだ得られず，$\mathcal{P}$ 局面と $\mathcal{N}$ 局面の完全な分類には至っていない．

6. まとめ

削除ニムにおける「山の削除」と「山の分割」の手順の前後を入れ換えた新たなゲーム「分割削除ニム」を導入し，石の山の数が 2 つである場合の勝敗判定条件を示した．このゲームを従来から知られているニム，Wythoff のニム，削除分割ニムと比較し考察を行った．さらにこのゲームの山数を増やす拡張の 1 つとして 4 山半数分割削除ニムを考え，その勝敗判定条件を示した．今後も様々な拡張ゲームの勝敗判定条件を調べるとともに，これらの様々な石取りゲームを俯瞰する観点からの研究を行っていく．

表 9　a, b に対して $\langle a, b, c \rangle \in P$ となる c

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	×	3	4	7	×	5	×	10	9	14	×	13	11	15	16	18	17	×	20
2	×	2	5	×	3	6	7	×	13	11	10	×	9	×	17	19	15	23	16	25
3	3	5	1	×	2	9	×	8	6	12	17	10	18	19	×	×	11	13	14	26
4	4	×	×	1	×	10	8	7	12	6	18	9	17	20	×	×	13	11	22	14
5	7	3	2	×	×	11	1	×	14	16	6	12	15	9	13	10	×	21	20	19
6	×	6	9	10	11	2	×	×	3	4	5	×	19	×	21	×	20	22	13	17
7	5	7	×	8	1	×	2	4	×	14	16	×	22	10	23	11	21	29	28	30
8	×	×	8	7	×	×	4	3	17	18	×	15	16	21	12	13	9	10	23	31
9	10	13	6	12	14	3	×	17	×	1	×	4	2	5	×	×	8	24	×	32
10	9	11	12	6	16	4	14	18	1	×	2	3	×	7	×	5	22	8	24	33
11	14	10	17	18	6	5	16	×	×	2	×	×	×	1	×	7	3	4	21	×
12	×	×	10	9	12	×	×	15	4	3	×	5	×	×	8	20	×	27	29	16
13	13	9	18	17	15	19	22	16	2	×	×	×	1	×	5	8	4	3	6	×
14	11	×	19	20	9	×	10	21	5	7	1	×	×	×	25	23	×	30	3	4
15	15	17	×	×	13	21	23	12	×	×	×	8	5	25	1	×	2	×	×	×
16	16	19	×	×	10	×	11	13	×	5	7	20	8	23	×	1	×	×	2	12
17	18	15	11	13	×	20	21	9	8	22	3	×	4	×	2	×	×	1	×	6
18	17	23	13	11	21	22	29	10	24	8	4	27	3	30	×	×	1	×	×	×
19	×	16	14	22	20	13	28	23	×	24	21	29	6	3	×	2	×	×	×	5
20	20	25	26	14	19	17	30	31	32	33	×	16	×	4	×	12	6	×	5	1

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP21K12191, JP22K13953 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Abuku,T. and Suetsugu,K. : Delete Nim, *Journal of Mathematics, Tokushima University* **55**, 75-81 (2021).

[2] 安福智明, 坂井公, 篠田正人, 末續鴻輝：拡張削除ニム，情報処理学会研究報告，Vol. 2022-GI-48, No.14, 1-5 (2022).

[3] Albert,M.H., Nowakowski, R.J. and Wolfe, D.（川辺治之訳）：組合せゲーム理論入門-勝利の方程式-，共立出版 (2011).

[4] Bouton, C.L.: Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory, *Annals of Mathematics* **3**, 35-39 (1902).

[5] Fraenkel,A.S. and Lorberbom, M. : Nimhoff games, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, **58**, 1-25 (1991).

[6] 一松信: 石取りゲームの数理，森北出版 (1968).

[7] 宮寺良平，福井昌則，井上理哲人，中屋悠資，戸國友貴: Corner the Queen problem の変種についての研究，情報処理学会研究報告，Vol. 2016-GI-35，No.6，1-6 (2016).

[8] 坂井公: 数学でピザを切り分ける！パズルの国のアリス 4，日経サイエンス社 (2021).

[9] 佐藤文広: 石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).

[10] 篠田正人: Delete Nim の一般化と勝敗判定，情報処理学会研究報告，Vol. 2022-GI-47, No.5, 1-8 (2022).

[11] Stankova Z. and Rike T. (eds.) : *A Decade of the Berkeley Math Circle Vol.1*, Mathematical Circles Library, 159 (2008).

[12] 末續鴻輝: 不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2019-GI-41, No.22, 1-7 (2019).

[13] Wythoff, W.A. A modification of the game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **7**, 199-202 (1907).

付　　録

A.1　命題 2 の証明

$$
\begin{aligned}
P &= \{\langle a, a\rangle \mid v_2(a) \text{ が偶数 }\},\\
N_1 &= \{\langle 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}\rangle \mid l \in \mathbb{N}\},\\
N_2 &= \{\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \mid l \in \mathbb{N}\},\\
N_3 &= \{\langle 2(2k+1), 2(2k+1)\rangle \mid k \in \mathbb{N}\},\\
N_4 &= \{\langle 2^{l+1}(2k+1)-1, 2^{l+1}(2k+1)+1\rangle \mid k, l \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

を再掲する．定理 1 により P に含まれる局面の Grundy 数は 0 である．$N^1 = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$ とする．N^1 に含まれる局面の Grundy 数は 1 であることをここで示す．証明に先立ち，$i \neq j$ に対し $N_i \cap N_j = \emptyset$ であること，$k, l \in \mathbb{N}$ のとき $2^{l+1}(2k+1)$ は「3 以上の奇数因数を持つ 4 の倍数」であること，4 の倍数はすべて $2^{2l}, 2^{2l+1}, 2^{l+1}(2k+1)$ のいずれか 1 つの形で表せること，を注意しておく．

命題 2 の証明　以下で k, l はいずれも正の整数とする．まず $\langle a, b\rangle$（$a \leq b$ とする）が P および N^1 に含まれないとき，一手で N^1 に含まれる局面に移せることを示す．

局面 $\langle a, a\rangle$（$v_2(a) = 2l+1$）において，$a = 2^{2l+1}$ であるときは $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+1}(2k+1)$ であるときは $\langle 2^{2l}(2k+1)-1, 2^{2l}(2k+1)+1\rangle \in N_4$ に移せる．

以下，$a < b$ である局面 $\langle a, b\rangle$ について，a による場合

分けをして順に示す．

(i) $v_2(a) \geq 3$ とする．$a = 2^{2l+1}$ のとき $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+2}$ かつ $b > a+1$ のとき $\langle 2^{2l+2}, 2^{2l+2}+1\rangle \in N_2$ に移せる．それ以外の a については，$b > a+1$ であれば $\langle a/2-1, a/2+1\rangle \in N_4$ に移せる．

(ii) $v_2(a) = 2$ とする．$a = 4$ かつ $b > 5$ のときは $\langle 4, 5\rangle \in N_2$ に移せる．$a \neq 4$ のときは $\langle a/2, a/2\rangle \in N_3$ に移せる．

(iii) $v_2(a) = 1$ とする．$a = 2$ のときは $\langle 1, 2\rangle \in N_1$ に移せる．$a \neq 2$ のときは $\langle a, a\rangle \in N_3$ に移せる．

(iv) $v_2(a) = 0$ であり，$a-1$ が 4 の倍数であるとする．$a = 1$ かつ $b > 2$ のときは $\langle 1, 2\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l}+1$ のときは $\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \in N_2$ に移せる．$a = 2^{2l+1}+1$ のときは $\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \in N_2$ に移せる．それ以外の a については $\langle a-2, a\rangle \in N_4$ に移せる．

(v) $v_2(a) = 0$ であり，$a+1$ が 4 の倍数であるとする．$a = 2^{2l}-1$ のときは $\langle 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+1}-1$ かつ $b > a+1$ のときは $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．それ以外の a については，$b > a+2$ ならば $\langle a, a+2\rangle \in N_4$ に移せる．$b = a+1$ のときは，もし $a+1$ が 8 の倍数であれば $\langle (a-1)/2, (a+3)/2\rangle \in N_4$ に移せる．もし $a+1$ が 8 の倍数でなければ $\langle (a+1)/2, (a+1)/2\rangle \in N_3$ に移せる．

次に，N^1 に含まれる局面は一手で N^1 に含まれる局面に移せないことを示す．N^1 に含まれる局面の石の数に現れる

$$\begin{gathered} 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}, 2^{2l}, 2^{2l}+1, 2(2k+1), \\ 2^{l+1}(2k+1)-1, 2^{l+1}(2k+1)+1 \end{gathered} \tag{A.1}$$

は $k, l \in \mathbb{N}$ に対して全く重複しないため，分割削除ニムにおける「1 つの山を分割し，分割されてできた 2 山の片方を削除する」(=片方の山から正の整数個の石を取る）という一手では，N^1 に含まれる局面から N^1 に含まれる局面には移せないことがわかる．よって「1 つの山を分割し，分割されなかった山を削除する」という一手で不可能であることを示せばよい．この一手によって局面を移すとき，後続局面の石数の和は元の局面の片方の山の石数に等しくなければならない．N_1, N_2, N_3, N_4 それぞれに含まれる局面について石数の和を求めると

$$\begin{aligned} &(2^{2l-1}-1)+2^{2l-1} = 2^{2l}-1, \\ &2^{2l}+(2^{2l}+1) = 2^{2l+1}+1, \\ &2(2k+1)+2(2k+1) = 4(2k+1), \\ &(2^{l+1}(2k+1)-1)+(2^{l+1}(2k+1)+1) = 2^{l+2}(2k+1) \end{aligned}$$

であり，これらの右辺の数は (A.1) とは全く重複しない．よって一手で N^1 に含まれる局面に移すことが不可能だと示された． □