6K-06

無限正方格子上でのライト付き移動ロボットの集合 *

高山龍弥 † 首藤裕一 ‡

法政大学 情報科学部

1 はじめに

本研究では、無限正方格子グラフ $G = (V, E)$ 上を移動する移動ロボット群をあるひとつの頂点に集める集合問題に取り組む。集合問題は、移動ロボット（以下、ロボット）の計算に関わる最も一般的な問題のひとつであり、広く研究されている。

移動ロボットの計算モデルとしては様々なものが存在するが、本研究では、主要な計算モデルのひとつである **LCM モデル**（Look-Compute-Move model）を対象とする。このモデルでは、各ロボット r は Look フェーズ、Compute フェーズ、Move フェーズを繰り返しながらグラフ上を移動していく。Look フェーズでは、グラフの上の r の現在地およびロボット群の配置状況を観測する。Compute フェーズでは、Look フェーズで取得した情報をもとに、現在地のどの隣接頂点に移動するか、 あるいは現在地にとどまるかを決定する。Move フェーズでは、決定した移動先に移動する。現在地にとどまるとCompute フェーズで決定した場合には、Move フェーズでは何も行わない。本モデルの特筆すべき事項として、ロボットは**忘却型** (oblivious) である。すなわち、Move フェーズが完了した時点でロボットはすべての情報を忘れる。したがって、Compute フェーズで決定するロボットの移動先は、直前の Look フェーズで取得した情報においてのみ決定され、それ以前の Look フェーズで取得した情報や過去に行った決定に関する情報は一切反映されない。また、ロボットは共通の方向感覚がない。実行開始時、すべてのロボットは相異なる頂点に配置されているものとする。

Di Stefano ら [2] は、無限正方格子グラフ上の集合問題が解けるためのロボット群の初期状況の必要十分条件を明らかにした。具体的には、(i) 分割的な自己同型写像（2 節で定義）が存在する状況、(ii) 2 台のロボットのみ存在する状況、(iii) ちょうど 4 台のロボットが存在して正方格子中の長方形の四隅に 1 台ずつロボットが配置されている状況を初期状況として実行を開始する場合には総移動数に関わらず集合が不可能であり[*1]、そうでないとき、常に集合達成可能であることを示した。さらに、集合が達成可能ないかなる状況からでも、常に最小の総移動数で集合が達成できることを示した。ここでいう最小の総移動数とは、ロボット群をひとつの頂点に集めるために必要なロボットの移動回数の合計である。

本研究では、LCM モデルのロボットが忘却的であるという制限を外し、各ロボットが自分自身および他のロボットから視認可能なライトを保持するようにモデルを拡張したときに、上記の必要十分条件がどのように変化するかどうかを明らかにする。ロボットがライトを有するモデルは LCM モデルの典型的な拡張モデルとして広く研究されており、その拡張モデルにおいて、最も基本的な問題のひとつである集合問題が解けるための初期配置の完全な特徴づけを明らかにすることは重要である。

なお、LCM モデルにはロボット群の同期性として完全同期、半同期、非同期の 3 種類の同期性があるが、本研究では半同期を仮定して上の必要十分条件を明らかにする。

2 定義

時刻 0 において n 台のロボットが無限正方格子 $G = (V, E)$ の任意の相異なる頂点に存在する。ロボットは k 色の異なる色 $\{1, 2, \ldots, k\}$ を点灯するライトを保持する。ライトの色数 k はアルゴリズムが決定する。$k = 1$ のとき、1 節冒頭に記載した標準的な LCM モデルと一致する。各頂点 $v \in V$ に滞在しているロボットのうち

* Gathering by Mobile Robots with Lights on an Infinite Grid

† Tatsuya Takayama, Hosei University

‡ Yuichi Sudo, Hosei University

*1 (i) の状況に対する不可能性は一般のグラフにおいて成り立つことが同一の著者ら [1] によって [2] 以前に証明されている。

各色 $c \in \{1, 2, \ldots, k\}$ のライトを発光しているロボットの台数 (v, c) を与える関数 $\ell : V \times \{1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{N}$ を状況と呼ぶ。状況 ℓ において、すべてのロボットのライトの色が 1 であり、かつどのロボットも相異なる頂点に位置しているとき、ℓ を**初期状況**という。状況 ℓ と ℓ' は、全単射関数 $\varphi : V \to V$ が存在して次の条件をすべて満たすとき、**同型**であるという。

- $\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$
- $\forall v \in V, \forall c \in \{1, 2, \ldots, k\} : \ell(v, c) = \ell'(\varphi(v), c)$

ℓ と ℓ' が上の関係にあるとき、ℓ' を $\varphi(\ell)$ と書く。

時刻 $t \in \mathbb{N}$ における状況を ℓ_t と表記する。各時刻 $t = 0, 1, \ldots$ において、敵対者は n 台のロボットのうち少なくともひとつのロボットを選択する。選択された各ロボット r は Look フェーズ、Compute フェーズ、Move フェーズを以下の通り実行し、結果として状況が ℓ_{t+1} に遷移する。なお、r は ℓ_t において頂点 $v \in V$ に位置しているものとする。

- Look フェーズ：スナップショットを取得する。スナップショットは、状況 ℓ_t と同型なある状況 $\varphi(\ell_t)$、ロボットの r の $\varphi(\ell_t)$ における現在地 $\varphi(v)$、r の現在のライトの色 $c_r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ で構成される。
- Compute フェーズ：Look フェーズで取得したスナップショットに基づき、自身のライトの色を変更する（現在の色と同じ色を維持しても良い）とともに、現在地のどの隣接頂点に移動するか、あるいは現在地にとどまるかを決定する。
- Move フェーズ：Compute フェーズで決定した移動先に（移動すると決めた場合には）移動する。

ここで、敵対者の選択 $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ は任意であるが、敵対者はどのロボットも無限回選択しなければならない。初期状況 ℓ から実行を開始するとき、アルゴリズム A に従うロボット群が、敵対者の選択 $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ に依らずいずれ全ロボットが同一頂点 $v \in V$ に位置し、その後ロボットが v にとどまり続けるとき、アルゴリズム A は初期状況 ℓ に対して集合問題を解くという。集合問題を解くアルゴリズムが存在する状況 ℓ を**集合可能な状況**と呼ぶ。

定義 1. ℓ を任意の状況とする。ある関数 $\varphi : V \to V$ と整数 $p \geq 2$ が存在して次のすべての条件を満たすとき、ℓ は分割的であるという。

- $\ell = \varphi^p(\ell)$
- $\forall i \in [1, p-1], \forall v \in V : \varphi^i(v) \neq v$
- 任意の整数 $i \geq 1$ について ℓ と $\varphi^i(\ell)$ は同型。

3 本研究の成果

本研究では、定理 1, 2, 3 で示すように、ライト付きモデルで集合可能な初期状況を完全に特徴づける。紙面の都合上、証明は割愛する。

定理 1. いかなる分割的な状況も集合可能ではない。

任意の状況 ℓ に対して、すべてのロボットを包含する最小の長方形を $\mathcal{R}(\ell)$ と書く。

定理 2. ℓ を任意の状況とする。状況 ℓ において *2* 台のロボットのみ存在し、$\mathcal{R}(\ell)$ が正方形である（すなわち、*2* 台のロボットが無限正方格子 G 上のある正方形の対角線の両端点に位置している）ならば、ℓ は集合不可能である。

上の 2 つの定理はライトの色数に依らず成り立つ。すなわち、どれだけ多くの色数のライトを用いても、上記の定理の条件に該当する状況から集合問題を解くことはできない。逆に、そうでない状況からであれば、集合問題は必ず 2 色のライトで、かつ、最小の総移動数で解くことができるということを次の定理で示す。

定理 3. ℓ を任意の状況とする。ℓ におけるロボットの数が *2* ではないか、$\mathcal{R}(\ell)$ が正方形でないかのいずれかが成り立ち、かつ、ℓ が分割的ではないのであれば、ℓ は集合可能である。

定理 4. 集合可能な任意の状況から、最小の総移動数で集合問題を解く色数 *2* のアルゴリズムが存在する。

参考文献

[1] G. Di Stefano and A. Navarra. Optimal gathering of oblivious robots in anonymous graphs. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 213–224. Springer, 2013.

[2] G. Di Stefano and A. Navarra. Gathering of oblivious robots on infinite grids with minimum traveled distance. *Information and Computation*, 254:377–391, 2017.