6K-05

Dieudonne らの集合アルゴリズムの時間計算量の改善 *

鈴木 雄大 †　首藤裕一 ‡

法政大学 情報科学部

1 はじめに

n 頂点からなる無向連結グラフ上の頂点に任意に配置された k 台のロボット群をひとつの頂点に集める**集合問題**を考える。ロボットはグラフの辺を移動することで頂点間を自由に移動できる。また、同一時刻に同一頂点に位置するロボットは互いに通信を行い情報交換することができる。ロボットは一意な識別子（以下、ID）を持つが、グラフ上の頂点に ID は存在しない。頂点に ID が存在すると、ID が最小の頂点にすべてのロボットが移動することで集合問題が容易に解けるからである。

集合問題は分散計算理論の分野で古くから取り組まれてきたが、本研究では、ロボット群のなかに**ビザンチンロボット**が混在した場合の集合問題に取り組む。ビザンチンロボットとは、アルゴリズムに従わず、任意の敵対的な動作をするロボットである。ビザンチンロボットの動作を制御することはできないので、すべてのロボットをひとつの頂点に集合させることはあきらかに不可能である。したがって、集合問題の問題設定を自然な方法で緩和する。具体的には、すべてのロボットがひとつの頂点に集合することを要求せず、代わりに、すべての非ビザンチンロボット (以下、**正常ロボット**) がひとつの頂点に集合すればよいものとする。

ビザンチンロボットは、同一頂点に存在する正常ロボットに対して自身の ID を偽って通信することができる**強ビザンチンロボット**と自身の ID を偽ることができない**弱ビザンチンロボット**に分類される。本稿では、弱ビザンチンロボットのみを考える。また、グラフ上のロボット群が**同期**して動作することを仮定する。すなわち、各単位時刻（ラウンド）において、各ロボットは同一頂点に存在するロボットと情報を交換し、（移動することを選択した場合には）ちょうど一回の移動を行うことができる。

Dieudonné ら [1] は、$k \le n$ であり、かつ、頂点数 n およびロボットの ID の最大長 λ がロボットに既知であるときに、ビザンチンロボットの数に依存せず集合問題を解くアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは $O(n^9\lambda\log n)$ ラウンドで停止する。ただし、n と λ は正確な値が既知である必要はなく、十分に小さな共通の上界、すなわち、$n' \ge n, n' = O(n)$ および $\lambda' \ge \lambda, \lambda' = O(\lambda)$ であるような共通の n',λ' が既知であれば良い。

2 本研究の成果

3 節でみるように、Dieudonné ら [1] のアルゴリズムにおいては、すべての（正常）ロボットがある規則に従い T ラウンド動作し、T ラウンド後に一斉に停止する。T ラウンドは n および λ から一意に定まる値であり、Dieudonné ら [1] は十分大きな定数 c に対して $T = cn^9\lambda\log n$ とすることで T ラウンド経過後にすべての正常ロボットが同一頂点に位置することを示し、アルゴリズムの正当性を証明した。なお、n および λ に加えて k および f（の十分に小さな上界）が既知である場合、$k \le n$ の仮定がなくとも、Dieudonné ら [1] の解析を自然に拡張すると $T = \Theta(n^5k^2f^2\lambda\log n)$ で十分であることがいえる。ここで、$f(0 \le f \le k-1)$ はビザンチンロボットの数である。

本研究では、より小さい T で十分であることを示す。具体的には、本アルゴリズムに従う正常ロボットは $O(n^5kf\lambda)$ ラウンド後には同一の頂点に位置することを証明する。この結果は、n,λ,k,f の十分に小さい共通の上界が既知であるという仮定のもと、Dieudonné ら [1] のアルゴリズムの時間計算量を $O(n^5kf\lambda\log n)$ ラウンドに削減する。k,f の上界が既知でなくても、$k \le n$ を仮定すると、$f < k \le n$ がいえるので時間計算量が $O(n^7\lambda\log n)$ ラウンドに改善される。

3 Dieudonné ら [1] のアルゴリズム

Dieudonné ら [1] のアルゴリズムは Ta-Shma と Zwick[2] のアルゴリズム $TZ(\ell)$ をモジュールとして

* Improvement on the Time Complexity of the Gathering Algorithm of Dieudonne et. al.
† Yudai Suzuki, Hosei University
‡ Yuichi Sudo, Hosei University

用いる。ここで、ℓ は任意の非負整数である。十分に大きな正整数 c' と相違なる任意の非負整数 ℓ, ℓ' に対して、2 台のロボット r_1, r_2 がそれぞれ $TZ(\ell)$ と $TZ(\ell')$ を $c'n^5 s \log n$ ラウンドのあいだ実行すれば、その間に r_1 と r_2 は少なくとも一度は同一頂点に位置することが知られている。ここで、$s = \min(\log \ell, \log \ell')$ である。$TZ(\ell)$ と $TZ(\ell')$ は同時に開始する必要がない。すなわち、$TZ(\ell)$ と $TZ(\ell')$ をそれぞれ時刻 t と t' で開始したとすると、時刻 $\max(t, t') + c'n^5 s \log n$ までに r_1 と r_2 が同一頂点に位置する時刻が存在したことが保証される。

Dieudonné ら [1] のアルゴリズムを Algorithm 1 に示す。ここで、$\mathcal{R}_a(t)$ は時刻 t においてロボット a と同一頂点にいるロボットの集合であり、$\mathcal{B}_a(t)$ は時刻 t において a がビザンチンロボットであることを確信しているロボットの（部分）集合である。$\mathcal{B}_a(t)$ を時刻 t におけるロボット a の**ブラックリスト**と呼ぶ。各ロボット a は巧妙にブラックリスト $\mathcal{B}_a(t)$ を作成することで、同一頂点にいる正常ロボットが常に同一のブラックリストを保持することを保証する。また、各ロボットは、同一頂点に存在しブラックリストに含まれないロボットの ID のうち、最小の ID を ℓ として $TZ(\ell)$ を実行し続ける。結果として、2 台の正常ロボットが一度合流すると、その後、常に同じ経路を移動し、二度と離れることがなくなる。また、異なる頂点上に存在する正常ロボットは、異なる ℓ と ℓ' を用いて $TZ()$ を実行することになるので、$TZ()$ の性質からやがて合流する。紙面の都合上、ブラックリストの構成法は割愛するが、Dieudonné ら [1] は、アルゴリズムの実行ラウンド数 T を十分に大きい定数 c に対して $T = cn^9 \lambda \log n$ とすることですべての正常ロボットを同一頂点に集められることを証明した。

Algorithm 1: *WeakByzKnownSize*(a)[1]

// ロボット a の動作を規定

$t \leftarrow 0$
$\ell \leftarrow \min\{r.id \mid r \in \mathcal{R}_a(t)\}$
$TZ(\ell)$ を初期化
$TZ(\ell)$ を 1 ラウンド実行
while $t \le T$ **do**
  $t \leftarrow t + 1$
  if $\begin{pmatrix} \mathcal{R}_a(t) \not\subseteq \mathcal{B}_a(t) \cup \mathcal{R}_a(t-1) \\ \vee\, \ell \notin \mathcal{R}_a(t) \end{pmatrix}$ **then**
    $\ell \leftarrow \min\{r.id \mid r \in \mathcal{R}_a \cup \{a\} \setminus \mathcal{B}_a(t)\}$
    $TZ(\ell)$ を初期化
  $TZ(\ell)$ を 1 ラウンド実行

4 時間計算量の改善

紙面の都合上、解析のおおよその流れのみ示す。Dieudonné ら [1] の解析によると、$k \le n$ の仮定のもと、各ロボットが $TZ()$ のパラメータ ℓ を変更するのは高々 $2n^2$ 回である。この解析を拡張することで、$k \le n$ の仮定に依らず、ℓ の変更回数が高々 $2kf$ 回であることがいえる。2 台の正常ロボット r_1, r_2 が $c'n^5 \lambda \log n$ ラウンドのあいだ相異なる ℓ, ℓ' を用いて初期化することなく $TZ()$ を行えば r_1, r_2 が合流することはいえるので、十分大きな定数 c に対して $T = ckfn^5 \lambda \log n$ ラウンドとすれば、時刻 $[0, T]$ のあいだに、r_1, r_2 ともに初期化せずに $TZ()$ を $c'n^5\lambda$ ラウンド実行する期間が必ず存在する。したがって、T ラウンド以内に正常ロボット r_1, r_2 は合流する。r_1, r_2 は任意の正常ロボットであったから、$T = ckfn^5 \lambda \log n = \Theta(n^5 kf \lambda \log n)$ としても Dieudonné ら [1] のアルゴリズムが集合問題を解くことがいえた。

5 おわりに

本研究では、Dieudonné ら [1] のアルゴリズムの挙動を解析し、$O(n^5 kf \lambda \log n)$ ラウンドで正常ロボットが集合することを示した。本アルゴリズムは集合を達成したことを確信するまで正常ロボットが移動し続ける構成を取っている。ゆえに、このラウンド数の見積もりの改善は $k \le n$ の仮定のもとでアルゴリズムの時間計算量そのものを $O(n^9 \lambda \log n)$ から $O(n^7 \lambda \log n)$ に短縮したことを意味する。

参考文献

[1] Y. Dieudonné, A. Pelc, and D. Peleg. Gathering despite mischief. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 11(1):1–28, 2014.

[2] A. Ta-Shma and U. Zwick. Deterministic rendezvous, treasure hunts and strongly universal exploration sequences. In *Symposium on Discrete Algorithms: Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, volume 7, pages 599–608, 2007.