6K-03

Braessパラドックスが起こり得ない有向グラフの多項式時間判定アルゴリズム

斎藤　優至 †　　　松林　昭 ‡

金沢大学大学院電子情報科学専攻 †　金沢大学電子情報通信学系 ‡

1　はじめに

Braess パラドックスとは，各辺にコスト関数を備え，出発地 (始点) と目的地 (終点) を表す 2 点 s, t が指定されたグラフ G 上で，辺の追加がナッシュフローのコストを増加させる好ましくない現象である [1]．この現象の有無を判定する問題は一般に NP 完全であることが知られている．本稿では，グラフ G と s, t を入力とし，どのような辺コスト関数でも Braess パラドックスが起こらないか否かを判定する問題を考える．

Milchtaich [2] はこの問題に対して,「どのような辺コスト関数でも Braess パラドックスが起こらないことの必要十分条件は，G が 2 端子直並列であること」と主張した．しかし厳密にはこの必要十分条件は「全ての s-t パスで誘導される (和として得られる) G の部分グラフ $\tilde{G}$ が 2 端子直並列であること」と言い換えられるべきである (図 1)．

この修正された特徴づけに基づき，本稿で考える問題は $\tilde{G}$ の構成に帰着できることが分かる．G が無向である場合には $\tilde{G}$ は容易に多項式時間で構成できる [3]．しかし G が有向である場合は $\tilde{G}$ を構成することが NP 困難であり [4]，この帰着によって多項式時間アルゴリズムが得られることはありそうにない．

本稿では，G が有向である場合に，$\tilde{G}$ を構成することなしに $\tilde{G}$ の直並列性を多項式時間で判定するアルゴリズムを提案する．

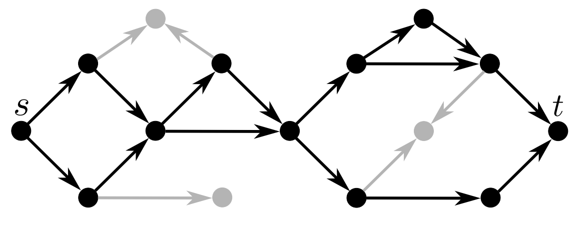

図 1: G (黒と灰色) と $\tilde{G}$ (黒) の例．G は直並列ではないが，$\tilde{G}$ は直並列である．G の s-t パスは灰色の点や辺を通らないため，G で Braess パラドックスは起こらない．

2　準備

本稿で使用する表記と必要な概念を述べる．始点と終点を表す異なる 2 点を持つグラフを **2 端子グラフ**と呼ぶ．本稿を通して，G を任意の弱連結単純 2 端子有向グラフとし，s, t をそれぞれ G の始点と終点とする．始点 u と終点 v を持つ G の任意の (単純) パスを u-v パスと呼ぶ．全ての s-t パスで誘導される (すなわち全ての s-t パスの和として得られる) G の部分グラフを G の **s-t パス誘導部分グラフ**あるいは**経路誘導部分グラフ**と呼び，$\tilde{G}$ で表す．全ての s-t パスに含まれる点を**不可避点**と呼ぶ．G の点集合の部分集合 U で誘導される G の部分グラフを $G[U]$ で表す．

始点 s_1 と終点 t_1 を持つ 2 端子有向グラフ G_1 と，始点 s_2 と終点 t_2 を持つ 2 端子有向グラフ G_2 に対して，t_1 と s_2 を同一視することによって，始点 s_1 と終点 t_2 を持つ 1 つの 2 端子グラフを得る操作を G_1 と G_2 の**直列接続**と呼ぶ．また，s_1 と s_2，および t_1 と t_2 をそれぞれ同一視して始点 $s_1 = s_2$ と終点 $t_1 = t_2$ を持つ 1 つの 2 端子グラフを得る操作を G_1 と G_2 の**並列接続**と呼ぶ．**(2 端子) 直並列グラフ**は次のように再帰的に定義される．

1. 始点から終点への単一辺からなるグラフは直並列である．

2. 2 つの 2 端子直並列グラフを直列接続または並列接続して得られる 2 端子グラフは直並列である．

A Polynomial Time Algorithm for Deciding Directed Graphs Invulnerable to Braess's Paradox

†Yushi Saito, Division of Electrical Engineering and Computer Science, Kanazawa University

‡Akira Matsubayashi, Faculty of Electrical, Information and Communication Engineering, Kanazawa University

3　アルゴリズムの定義

提案アルゴリズムのアイデアを述べ，その後具体的な定義を与える．

提案アルゴリズムは，入力される2端子有向グラフ G に対して直列接続と並列接続の逆の操作である直列分解と並列分解に似た操作を繰り返して試み，単一辺の集合が得られるか否かによって $\tilde{G}$ の直並列性を判定する．判定アルゴリズムの重要な性質は，各分解操作において $\tilde{G}$ が正しく直並列分解されるように G が分解されるが，$\tilde{G}$ に含まれない G の点や辺は維持されることも取り除かれることもどちらもあり得ることである．したがって，判定アルゴリズムは $\tilde{G}$ の直並列性を判定しつつも，$\tilde{G}$ の点集合や辺集合の具体的な情報を与えることはない．

提案アルゴリズム (RSPTest と呼ぶ) の定義を述べる．RSPTest は入力グラフ G に対して $\tilde{G}$ の直列分解と並列分解にそれぞれ相当する RSDecomp と RPDecomp を部分手続きとして実行する．

`RSDecomp`(G, s, t)

入力 弱連結単純有向グラフ G，G の始点 s と終点 t．

出力 G の2端子部分グラフ $G_1, \ldots, G_k$．ただし，$\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_k$ を直列接続すると $\tilde{G}$ が得られ，k はそのような部分グラフ数の最大値である．

1. G の任意の s-t パス上でこの順で現れる全ての不可避点の列 $v_0 = s, v_1, \ldots, v_k = t$ を求める．
2. $i = 1$ から k まで1ずつ増やしながら以下を実行する: G 上で v_{i-1} を出発点として探索を行い，到達可能な点の集合 V_i を求める．ただし，v_i から出る辺や V_j $(j < i)$ の点を辿ることはしない．始点 v_{i-1} と終点 v_i を持つ2端子グラフとして $G[V_i]$ を出力する．

`RPDecomp`(G, s, t)

入力 弱連結単純有向グラフ G，G の始点 s と終点 t．

出力 G の2端子部分グラフ $G_1, \ldots, G_k$．ただし，$\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_k$ を並列接続すると $\tilde{G}$ が得られ，k はそのような部分グラフ数の最大値である．

1. G の独立 (内点素) な s-t パス $P_1, \ldots, P_\ell$ をグリーディに求める (このような ℓ を極大化する)．各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して，P_i の点集合を V_i とする．
2. 各 $1 \leq i \leq \ell$ と $G - P_i$ の任意の点 x に対して，u-x パスと x-v パスが存在するような，P_i の2点 u, v (ただし $u \neq t$，$v \neq s$，$\{u, v\} \neq \{s, t\}$) が存在するならば，V_i に x を加える．
3. 各 $1 \leq i < j \leq \ell$ に対して，V_i と V_j が s でも t でもない点を共有するなら $V_i = V_i \cup V_j$，$V_j = \emptyset$ とする操作を可能な限り実行する．
4. $V_i \neq \emptyset$ であるような各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して，始点 s と終点 t を持つ2端子グラフとして $G[V_i]$ を出力する．

`RSPTest`(G, s, t)

入力 弱連結単純有向グラフ G，G の始点 s と終点 t．

出力 $\tilde{G}$ の直並列性．

1. G が単一辺 (s, t) なら yes を出力して終了．
2. `RSDecomp`(G, s, t) を実行．
3. 2で出力された各部分グラフ G' とその始点 s' と終点 t' に対して `RPDecomp`(G', s', t') を実行し，その結果，もし単一辺 (s', t') でない G' が単独で出力されたら no を出力して終了．
4. 3で実行される各 RPDecomp において出力された各部分グラフ G'' とその始点 s'' と終点 t'' に対して再帰的に `RSPTest`(G'', s'', t'') を実行する．全ての実行で yes が出力されたら yes を出力し，そうでなければ no を出力する．

詳細は省略するが，RSPTest は入力グラフ G の点数と辺数をそれぞれ n, m とすると $\mathcal{O}(n^3 m^2)$ 時間で実行できる．また紙面の都合により正当性の証明を省略する．

4　おわりに

本稿では，2端子有向グラフに対して Braess パラドックスが起こり得ないか否かを判定する多項式時間アルゴリズムを提案した．今後の課題としては，多端子有向グラフに対して Braess パラドックスが起こり得ないことの必要十分条件，ならびにそれを判定する多項式時間アルゴリズムを設計することが挙げられる．

参考文献

[1] D. Braess. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12:258–268, 1968.

[2] I. Milchtaich. Network topology and the efficiency of equilibrium. *Games and Economic Behavior*, 57:321–346, 2006.

[3] 坪田. Braess パラドックスが起こり得ないグラフの判定アルゴリズムに関する研究. 卒業論文, 金沢大学, 2018.

[4] 沖谷. 2端子 st 有向グラフにおける st パス誘導部分グラフの基本的性質に関する研究. 卒業論文, 金沢大学, 2021.