Vol.2022-QS-7 No.13
2022/10/27

量子ダイナミクスを利用した局在判定

工藤 和恵[1,2,a)]

概要：量子系の多体局在の判定に，量子コンピューティングを利用する方法を提案する．多体局在は，アンダーソン局在を拡張した概念であり，ランダムな量子多体系で起こる局在現象である．多体局在の判定には高励起固有状態を使う場合が多いが，本研究では量子ダイナミクスを利用した判定方法を議論する．量子アニーラの使用を想定して，横磁場イジング模型を用い，磁化と twist overlap の時間発展を数値的に計算した．これらは，時間発展後に量子ビットの測定から容易に算出できる量である．今回は従来型計算機で数値計算を行い，サンプル平均から局在相と熱平衡相の違いが判別できることを示す．

Localization detection using quantum dynamics

1. はじめに

量子コンピューティングを利用した量子多体系のシミュレーションの研究が，近年盛んになりつつある．特に，比較的規模の大きい量子アニーラでは，直接量子多体系をシミュレーションする研究もなされている．例えば，量子相転移のダイナミクスの研究 [1], [2] や，多体局在の研究 [3] などがある．これらは，数値計算可能な系のサイズを超えて量子現象を研究できる可能性を示している．

多体局在は，アンダーソン局在を拡張した概念であり，近年盛んに研究されている [4], [5]．アンダーソン局在は，金属中の電子の波動関数が，局所ポテンシャルの乱れのために，空間的に局在する現象である．アンダーソン局在が 1 粒子波動関数の局在現象であるのに対して，多体局在は相互作用のある量子多体系で起こる．

多体局在の判定方法にはさまざまなものが提案されている．数値的に研究する場合は，高励起固有状態を使った計算で，エンタングルメント・エントロピーや準位統計などを調べるのが代表的な方法である [6], [7], [8]．ただし，数値計算で扱える量子多体系のサイズは小さい．計算に必要な状態空間の次元が指数関数的に増大するからである．実験で多体局在を判定する方法として比較的簡便なのは，時間発展後に初期状態の記憶がどれだけ保たれているか (記憶効果) を調べる，量子ダイナミクスに基づいた方法である [9], [10], [11]．

多体局在転移は，数値的に有限サイズスケーリングによって観察されてきた．しかし最近の研究では，それは真の転移点ではないとされ，本当に多体局在相が存在するかどうかすら，議論の対象となっている [12]．多体局在転移を数値的に捉えることが難しい原因の一つは，有限サイズ効果にある．多体局在がサイズに依存する性質をもつ一方で，数値計算で扱える量子多体系のサイズは限られている．量子コンピューティングを利用して大きな系を扱えるようになれば，多体局在に関する新たな知見を得られるかもしれない．

しかし，量子アニーラもゲート型量子コンピュータも，現在の実機はノイズの影響が避けられない．このため，固有状態の計算が必要となる方法での多体局在の判定は難しい．一方で，量子ダイナミクスの性質を利用した判定方法なら，固有状態を求める必要がない．多体局在の特徴である記憶効果は，量子ダイナミクスを利用して判定できるうえに，ノイズの影響を受けにくい．量子アニーラを用いた多体局在の研究 [3] でも，局在の判定に記憶効果を利用している．

本研究では，量子ダイナミクスを利用した，多体局在の判定方法を議論する．特に，量子アニーラの使用を想定して，横磁場イジング模型を用いる．量子アニーラでは逆アニーリングという手法を使うと，古典的な初期状態から，量子ゆらぎを加えた状態にクエンチして，その状態を一定時間保った後に再び古典状態にクエンチするといった操作

1 お茶の水女子大学
Ochanomizu University, Bunkyo, Tokyo 112–8610, Japan
2 東北大学
Tohoku Uniersity
a) kudo@is.ocha.ac.jp

ができる．すなわち，横磁場の強さを一定に保ったまま時間発展させ，最後に量子ビットを測定するという操作ができる．量子ビットの測定から容易に算出できる量として，今回は磁化と twist overlap を採用し，時間発展を数値的に計算する．本稿では，それらの乱れの強さへの依存性から局在を判定した研究 [13] について報告する．

2. 模型と方法

以下では，次式の 1 次元横磁場イジング模型を用いる．

$$H = \sum_{j=1}^{L-1} J_j \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \sum_{j=1}^{L} h_j \sigma_j^z - \sum_{j=1}^{L} \Gamma_j \sigma_j^x. \tag{1}$$

ここで，L は系のサイズ，σ_j^x と σ_j^z はそれぞれ，j 番目のサイトのパウリ行列の x 成分と z 成分である．局所磁場 h_j は，$[-w, w]$ の範囲の一様乱数で与える．w は乱れの強さである．相互作用 J_j と横磁場 Γ_j は $1 + r_j$ で与える．ただし，r_j は $[-\sigma, \sigma]$ の範囲の一様乱数である．この J_j と Γ_j のランダム性を，ここでは静的ノイズとよぶことにする．σ はノイズの強さである．

波動関数の時間発展は，時間依存シュレーディンガー方程式の解として得られる．$|\psi_0\rangle$ を初期状態とすると次式で表せる．

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi_0\rangle. \tag{2}$$

これは，ハミルトニアン H を対角化すれば，簡単に計算できる．初期状態を，H の固有状態 $\{|\phi_k\rangle\}$ の重ね合わせとして $|\psi_0\rangle = \sum_k c_k |\phi_k\rangle$ と表せば，次式のように書き換えられる．

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{2^L} c_k \exp(-iE_k t)|\phi_k\rangle. \tag{3}$$

ただし，E_k は $|\phi_k\rangle$ に対応する固有値である．

量子ビットの測定から容易に算出できる量として，磁化の z 成分 $M_z \equiv \langle\psi|\sum_j \sigma_j^z|\psi\rangle$ と，twist overlap $z \equiv \langle\psi|U_{\text{twist}}|\psi\rangle$ を扱う．ここで，U_{twist} はツイスト演算子とよばれており

$$U_{\text{twist}} = \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{L}\theta_j \sigma_j^z\right] \tag{4}$$

と定義される．ただし，$\theta_j = 2\pi j/L$ である．計算基底を $\{|s\rangle\}$ として，$\sigma_j^z|s\rangle = s_j^z|s\rangle$ とすると，j 番目のスピンの向き $s_j^z = \pm 1$ は量子ビットの測定結果に対応する．波動関数を，計算基底の 1 次結合として $|\psi\rangle = \sum_s \alpha_s |s\rangle$ と表すと，

$$M_z = \sum_s |\alpha_s|^2 \sum_{j=1}^{L} s_j^z \tag{5}$$

となる．twist overlap についても同様にして

$$z = \sum_s |\alpha_s|^2 \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{L}\theta_j s_j^z\right]. \tag{6}$$

と表せる．$|\alpha_s|^2$ はスピン配置 $s = (s_1^z, s_2^z, \ldots, s_L^z)$ の実現確率を意味するので，M_z は $\sum_j s_j^z$ の期待値，z は $\sum_j \exp[\frac{i}{2}\sum_j \theta_j s_j^z]$ の期待値である．したがって量子デバイスによる計算では，測定結果 $(s_1^z, s_2^z, \ldots, s_L^z)$ から算出した $\sum_j s_j^z$ および $\exp[\frac{i}{2}\sum_j \theta_j s_j^z]$ の，多数回の平均をとればよい．

ツイスト演算子 U_{twist} は，スピンを z 軸周りに角度 $\theta_j = 2\pi j/L$ 回転させることで，スピン波的な励起を起こす [14], [15]．熱平衡相での固有状態にツイスト演算子を作用させると，元の状態と直交した状態になるため $z \simeq 0$ になると予想される．逆に局在相での固有状態には，ツイストによる長波長の摂動があまり影響しないため，twist overlap z は有限の値をもつと予想される．

3. 計算結果

3.1 固有状態を用いた計算

量子ダイナミクスを調べる前に，固有状態を用いて局在の性質を確認しておく．固有状態に基づく結果から熱平衡相と局在相での性質の違いを確認するとともに，量子ダイナミクスに基づく結果と比較するためである．ノイズなし $(\sigma = 0)$ のハミルトニアンを厳密対角化し，エネルギー・スペクトルの中央付近の 20 個の固有状態に関して，エンタングルメント・エントロピーと twist overlap を計算して平均をとる．この計算を，$L = 8$ に対しては 10^4 個，$L = 10, 12$ に対しては 10^3 個のサンプルに対して行い，それぞれの平均と分散を計算する．

エンタングルメント・エントロピーは次式で定義される．

$$S_E = -\text{Tr}\rho_A \log \rho_A, \tag{7}$$

ここで，ρ_A は部分系 A の縮約密度行列である．本研究では，部分系 A をスピン鎖の前半部分にとる．エンタングルメント・エントロピーは，熱平衡相では体積則，局在相では面積則に従うとされている．つまり，熱平衡相から局在相への転移が起こると S_E が減少する．その転移点付近では S_E の分散がピークをもつことが，報告されている [7]．

図 1 は，ノイズのない場合 $(\sigma = 0)$ の，エンタングルメント・エントロピーと twist overlap の乱れ強度 w への依存性を表している．図 1(a) はエンタングルメント・エントロピー S_E，図 1(c) は twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ で，図 1(b) と (d) はそれぞれの標準偏差である．

エンタングルメント・エントロピーは，w の小さい領域ではほぼ一定の値をもち，$w > 1$ では w の増加に伴い減少している．その分散は $w \simeq$ 5–10 付近でピークをもつ．このピークの付近で転移またはクロスオーバーが起きているといえる．すなわち，それより w の小さい領域は熱平衡相，大きい領域は局在相に対応する．

twist overlap に関しては，$|z|^2$ の平均も分散も，w の小さい領域ではほぼゼロで，w の大きい領域では増加してい

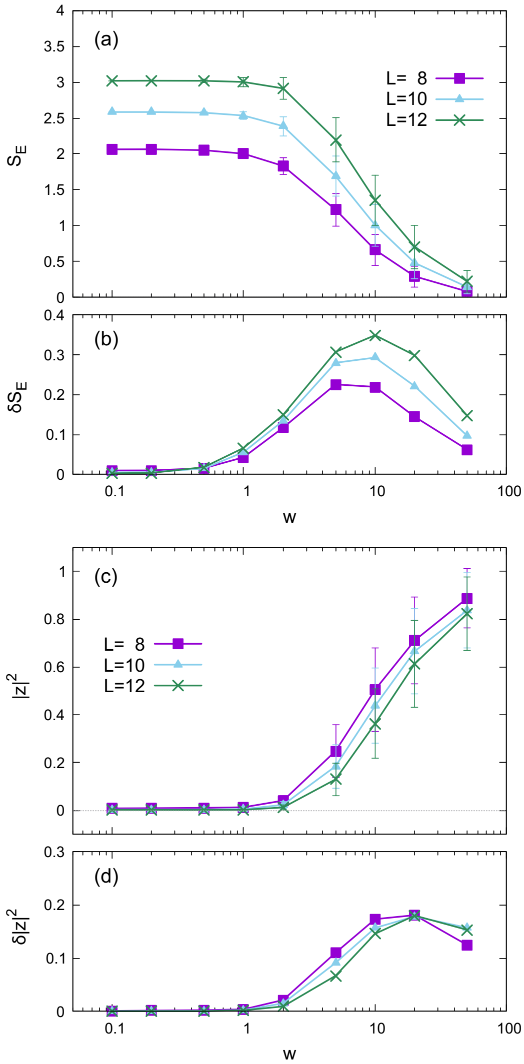

図 1 ノイズのない場合 ($\sigma = 0$) の固有状態から算出した，異なる系のサイズ L に対する，エンタングルメント・エントロピー (a, b)，および twist overlap (c, d) の乱れ強度 w への依存性 [13]．(a) エンタングルメント・エントロピー S_E の平均．(b) S_E の標準偏差 δS_E．(c) twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ の平均．(d) $|z|^2$ の標準偏差 $\delta|z|^2$．(a, c) のエラーバーは標準偏差．

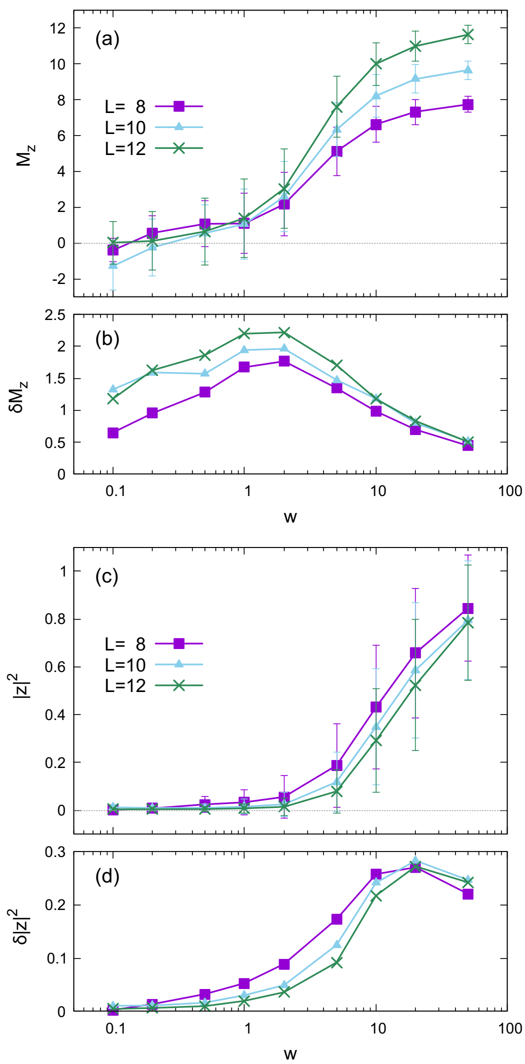

図 2 ノイズのない場合 ($\sigma = 0$) の，時間発展の最終時刻での波動関数から算出した，異なる系のサイズ L に対する，磁化 (a, b)，および twist overlap (c, d) の乱れ強度 w への依存性 [13]．(a) 磁化の z 成分 M_z の平均．(b) M_z の標準偏差 δM_z．(c) twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ の平均．(d) $|z|^2$ の標準偏差 $\delta|z|^2$．(a, c) のエラーバーは標準偏差．

る．w の非常に大きい領域で分散がピークをもつように見えるのは，値が最大値 $|z|^2 = 1$ に接近しているためであり，エンタングルメント・エントロピーのピークとは性質が異なる．$|z|^2$ の平均は熱平衡相でほぼゼロで，局在相で有限の値をもつという点では，予想通りの結果である．ただし，分散も w に依存するという様子は，模型の少し異なる場合 [15] には観察されていない．

3.2 量子ダイナミクスを用いた計算

ここでは，最終時刻 $t = T_{\rm fin}$ での波動関数を式 (3) によって求め，$M_z = \langle\psi(T_{\rm fin})|\sum_j \sigma_j^z|\psi(T_{\rm fin})\rangle$ と $z = \langle\psi(T_{\rm fin})|U_{\rm twist}|\psi(T_{\rm fin})\rangle$ を算出する．この計算を，$L = 8$ に対しては 10^4 個，$L = 10, 12$ に対しては 10^3 個のサンプルに対して行い，それぞれの平均と分散を計算する．初期状態はすべてのスピンが上向きの状態，最終時刻は $T_{\rm fin} = 10$ とする．

図 2 は，ノイズのない場合 ($\sigma = 0$) の，磁化と twist overlap の乱れ強度 w への依存性を表している．図 2(a) は磁化の z 成分 M_z，図 2(c) は twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ で，図 2(b) と (d) はそれぞれの標準偏差である．

磁化の平均は w の小さい領域では $M_z \simeq 0$ であり，熱平衡相の性質を示している．w の十分大きな領域では $M_z \simeq L$ であり，これは初期状態での値を保つ傾向があると言える．すなわち，局在相の特徴である記憶効果を示している．分散は全体的に大きく，そのピークは，図 1(b) のエンタングルメント・エントロピーのものよりも小さい w の領域にある．これは，後述するように，磁化の時間依存性によると

Vol.2022-QS-7 No.13
2022/10/27

ころが大きい．

twist overlap も同様に，w の小さい領域では $|z|^2 \simeq 0$ であり，熱平衡相の性質を示している．しかし，w の十分大きな領域では，初期状態での値 $|z|^2 = 1$ には届いていないうえに，分散も大きい．すなわち，記憶効果を示しているとは言えない．むしろ図 2(c,d) は，図 1(c,d) と同様の傾向を示している．このことから，量子ダイナミクスから求めた twist overlap は，固有状態の性質を強く反映していると解釈できる．

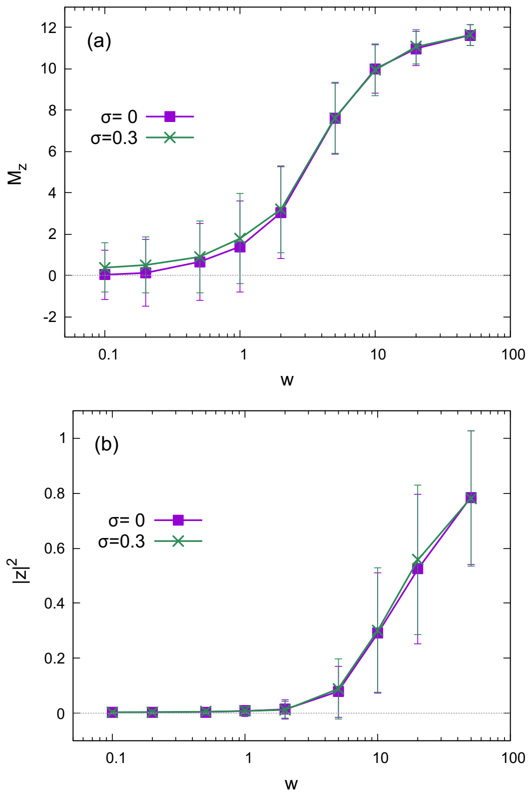

図 3 静的ノイズのある場合 ($\sigma = 0.3$) とない場合 ($\sigma = 0$) の，時間発展の最終時刻での波動関数から算出した，磁化および twist overlap の乱れ強度 w への依存性 [13]．(a) 磁化の z 成分 M_z．(b) twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$．エラーバーは標準偏差．系のサイズは $L = 12$．

図 3 に示すように，静的ノイズのある場合も，ノイズのない場合と同様の性質が見られる．図 3(a) は磁化の z 成分 M_z，図 3(b) は twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ であり，静的ノイズのある場合とない場合のデータがほぼ重なっている．すなわち，静的ノイズの影響がほとんど見られない．しかしながら，後述するように，磁化も twist overlap も，時間発展には静的ノイズの影響が現れる．図 3 では，サンプル平均を取ることで時間発展の細かな違いがかき消された結果，静的ノイズの影響が無視できるほど小さくなったと考えられる．

3.3 時間発展

波動関数の時間発展が式 (3) で表されることを利用すると，磁化の時間発展は次式のように表せる．

$$M_z(t) = \sum_{k,l=1}^{2^L} c_k c_l^* \langle\phi_l| \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^z |\phi_k\rangle e^{-i(E_k - E_l)t}. \qquad (8)$$

同様に，twist overlap の時間発展は次式で表せる．

$$z(t) = \sum_{k,l=1}^{2^L} c_k c_l^* \langle\phi_l| U_{\mathrm{twist}} |\phi_k\rangle e^{-i(E_k - E_l)t}. \qquad (9)$$

式 (8)(9) に $e^{-i(E_k - E_l)t}$ が含まれていることから，$M_z(t)$ も $z(t)$ も振動する要素があることがわかる．実際には，異なる振動数と振幅をもつ振動の重ね合わせであるため，時系列は複雑な挙動を示す場合が多い．また，局所磁場がサンプルごとに違うため，同じ時刻 $t = T_{\mathrm{fin}}$ で値を算出しても，サンプルごとに値が大幅に異なる場合がある．

図 4 は，すべてのスピンが上向きの状態を初期状態とした場合の，磁化と twist overlap の時間発展を示している．上段と下段はそれぞれ，磁化の z 成分 M_z と twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ で，それぞれのパネルには，10 本の時系列がプロットされている．上下の組み合わせ [(a) と (e), (b) と (f), ...] では，同じ波動関数の時系列のセットを使用している．つまり，同じ列のパネルの同じ色の曲線は，同じ波動関数の時系列から算出したものである．

図 4(a)–(c) は，ノイズのない場合 ($\sigma = 0$) の，磁化の z 成分 M_z の時間発展である．初期状態では $M_z = L = 12$ で，w が小さい場合 [図 4(a)] は，$M_z \simeq 0$ へと減衰する．これは，熱平衡相に特徴的な振る舞いであるといえる．ただし，$t = T_{\mathrm{fin}} = 10$ 付近では少しゆらぎが大きくなっており，図 2(a) のエラーバーの大きさに寄与している．w が中程度の場合 [図 4(b)] は，M_z は減少するものの，有限な値のまわりでゆらぐような振る舞いが見られる．w が大きい場合 [図 4(c)] は，M_z はほとんど減少せず，初期値の近傍でゆらいでいる．これは，局在相に特徴的な記憶効果によるものだと解釈できる．

図 4(d) は，静的ノイズのある場合 ($\sigma = 0.3$) の，磁化の z 成分 M_z の時間発展である．w の値は図 4(a) のものと同じだが，$M_z \simeq 0$ まで近づかずに有限な値のまわりでゆらぐサンプルもある．つまり，静的ノイズの有無は時間発展に影響している．一方で，$t = 10$ での値のバラつき具合は，図 4(a) と同程度である．このことから，図 3 で静的ノイズの影響が目立たなかったのは，最終時刻での値のサンプル平均を取ったためだと解釈できる．

図 4(e)–(g) は，ノイズのない場合 ($\sigma = 0$) の，twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ の時間発展である．初期状態では $|z|^2 = 1$ で，w が小さい場合 [図 4(e)] は，急速に $|z|^2 = 0$ へと減衰し，その後も $|z|^2 \simeq 0$ を保つ．これは，熱平衡相に特徴的な振る舞いである．w が中程度の場合 [図 4(f)] は，

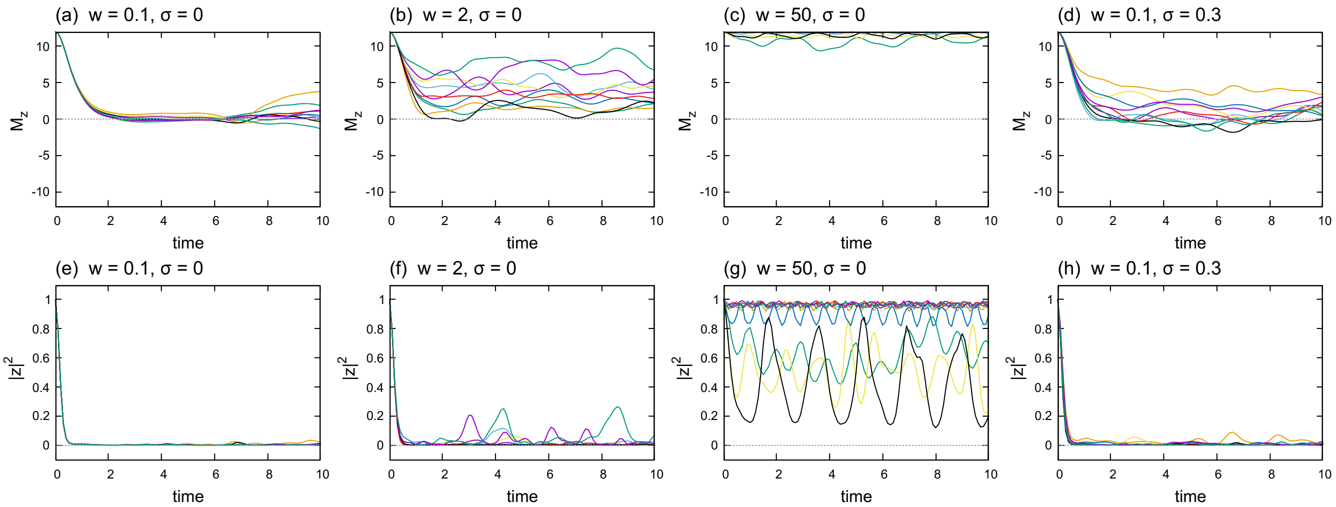

図 4 磁化と twist overlap 時間発展 [13]．(a)–(d) 磁化の z 成分 M_z．(e)–(h) twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$．それぞれのパネルに 10 本の時系列をプロットした．上下の組み合わせ [(a) と (e), (b) と (f), ...] では，同じ波動関数の時系列のセットを使用している．系のサイズは $L = 12$．

急速に $|z|^2 = 0$ へと減衰した後，やや大きな変動があるサンプルが見られる．w が大きい場合 [図 4(g)] は，$|z|^2 \simeq 1$ 近傍で小さく振動するサンプルもあれば，大振幅の振動を示すサンプルもある．つまり twist overlap は，局在相に特徴的な記憶効果を，必ずしも示さないことがわかる．

図 4(h) は，静的ノイズのある場合 ($\sigma = 0.3$) の，twist overlap の絶対値の 2 乗 $|z|^2$ の時間発展である．同じ w の値のものである図 4(e) と，ほぼ同様であるが，小さな変動が見えるサンプルもある．磁化の時系列と比較すると，静的ノイズは時間発展にもあまり影響していないと言える．

ここで，図 2(c)(d) および図 3(b) の，$|z|^2$ の分散の w 依存性を考察する．式 (9) より，twist overlap の振動の振幅は $\langle \phi_l | U_{\mathrm{twist}} | \phi_k \rangle$ に依存する．つまり，固有状態の組み合わせに依存する．図 1(c)(d) からわかるように，熱平衡相では，固有状態から算出した twist overlap がほぼゼロであることから，ほとんどの場合 $\langle \phi_l | U_{\mathrm{twist}} | \phi_k \rangle \simeq 0$ で，$|z|^2 \simeq 0$ を保つと考えられる．一方で局在相では，固有状態から算出した twist overlap も大きな分散を持つ．このため，$\langle \phi_l | U_{\mathrm{twist}} | \phi_k \rangle$ 自体が多様である．すなわち，w が大きい場合に分散が大きい理由は，単に $t = T_{\mathrm{fin}}$ における値が振動のためにバラついているためだけではなく，$\langle \phi_l | U_{\mathrm{twist}} | \phi_k \rangle$ の多様性のためでもある．以上より，ここで見られた twist overlap の時間発展の様子は，固有状態の特徴を反映していると解釈できる．

4. まとめ

本稿では，量子アニーラの使用を想定した，局在判定の方法の研究 [13] について報告した．横磁場イジング模型の局所磁場をランダムに与えた多数のサンプルに関して，磁化と twist overlap の時間発展を計算し，平均をとることで，局所磁場の乱れの強さへの依存性を議論した．数値計算によって，熱平衡相と局在相での振る舞いの違いを明らかにした．磁化の時間発展は静的ノイズの影響を受ける一方で，磁化と twist overlap の最終時刻での平均には静的ノイズの影響がほとんど現れない．

本研究の条件下では，twist overlap を固有状態から算出した場合と，時間発展の最終時刻での波動関数で算出した場合で，ほぼ同様の傾向が見られた．すなわち，量子ダイナミクスから求めた twist overlap は，固有状態の特徴を反映しうると言える．twist overalp は，量子ビットの測定から容易に算出できるため，量子コンピューティングを利用した多体局在の判定方法として有望であると言える．

参考文献

[1] Bando, Y., Susa, Y., Oshiyama, H., Shibata, N., Ohzeki, M., Gómez-Ruiz, F. J., Lidar, D. A., Suzuki, S., del Campo, A. and Nishimori, H.: Probing the universality of topological defect formation in a quantum annealer: Kibble-Zurek mechanism and beyond, *Phys. Rev. Research*, Vol. 2, No. 3, p. 033369 (online), DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.033369 (2020).

[2] King, A. D., Suzuki, S., Raymond, J., Zucca, A., Lanting, T., Altomare, F., Berkley, A. J., Ejtemaee, S., Hoskinson, E., Huang, S., Ladizinsky, E., MacDonald, A. J. R., Marsden, G., Oh, T., Poulin-Lamarre, G., Reis, M., Rich, C., Sato, Y., Whittaker, J. D., Yao, J., Harris, R., Lidar, D. A., Nishimori, H. and Amin, M. H.: Coherent quantum annealing in a programmable 2,000 qubit Ising chain, *Nature Physics*, pp. 1–5 (online), DOI: 10.1038/s41567-022-01741-6 (2022).

[3] Filho, J. L. C. d. C., Izquierdo, Z. G., Saguia, A., Albash, T., Hen, I. and Sarandy, M. S.: Localization transition induced by programmable disorder, *Phys. Rev. B*, Vol. 105, No. 13, p. 134201 (online), DOI: 10.1103/PhysRevB.105.134201 (2022).

[4] Alet, F. and Laflorencie, N.: Many-body localization:

An introduction and selected topics, *Comptes Rendus Physique*, Vol. 19, No. 6, pp. 498–525 (online), DOI: 10.1016/j.crhy.2018.03.003 (2018).
[5] Abanin, D. A., Altman, E., Bloch, I. and Serbyn, M.: Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 91, No. 2, p. 021001 (online), DOI: 10.1103/RevModPhys.91.021001 (2019).
[6] Luitz, D. J., Laflorencie, N. and Alet, F.: Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain, *Phys. Rev. B*, Vol. 91, No. 8, p. 081103 (online), DOI: 10.1103/PhysRevB.91.081103 (2015).
[7] Khemani, V., Lim, S., Sheng, D. and Huse, D. A.: Critical Properties of the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. X*, Vol. 7, No. 2, p. 021013 (online), DOI: 10.1103/PhysRevX.7.021013 (2017).
[8] Khemani, V., Sheng, D. and Huse, D. A.: Two Universality Classes for the Many-Body Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, No. 7, p. 075702 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.075702 (2017).
[9] Bordia, P., Lüschen, H., Scherg, S., Gopalakrishnan, S., Knap, M., Schneider, U. and Bloch, I.: Probing Slow Relaxation and Many-Body Localization in Two-Dimensional Quasiperiodic Systems, *Phys. Rev. X*, Vol. 7, No. 4, p. 041047 (online), DOI: 10.1103/PhysRevX.7.041047 (2017).
[10] Kohlert, T., Scherg, S., Li, X., Lüschen, H. P., Das Sarma, S., Bloch, I. and Aidelsburger, M.: Observation of Many-Body Localization in a One-Dimensional System with a Single-Particle Mobility Edge, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 122, No. 17, p. 170403 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.170403 (2019).
[11] Rubio-Abadal, A., Choi, J.-y., Zeiher, J., Hollerith, S., Rui, J., Bloch, I. and Gross, C.: Many-Body Delocalization in the Presence of a Quantum Bath, *Phys. Rev. X*, Vol. 9, No. 4, p. 041014 (online), DOI: 10.1103/PhysRevX.9.041014 (2019).
[12] Abanin, D. A., Bardarson, J. H., De Tomasi, G., Gopalakrishnan, S., Khemani, V., Parameswaran, S. A., Pollmann, F., Potter, A. C., Serbyn, M. and Vasseur, R.: Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems, *Annals of Physics*, Vol. 427, p. 168415 (online), DOI: 10.1016/j.aop.2021.168415 (2021).
[13] Kudo, K.: Localization Detection Based on Quantum Dynamics, *Entropy*, Vol. 24, No. 8, p. 1085 (online), DOI: 10.3390/e24081085 (2022).
[14] Nakamura, M. and Todo, S.: Order Parameter to Characterize Valence-Bond-Solid States in Quantum Spin Chains, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 89, No. 7, p. 077204 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.077204 (2002).
[15] Kutsuzawa, T. and Todo, S.: Nested Iterative Shift-invert Diagonalization for Many-body Localization in the Random-field Heisenberg Chain, e-print arXiv:2203.09732 (2022).