複数の道路信号に対するオフセットとスプリットの系統制御：分散協調学習アプローチ

田端 心吾[1]　長江 剛志[2]

概要：本研究では，複数の一般的な信号交差点に対して，分散協調制御ルールを提案する．具体的には，まず，信号交差点での待ち行列の発生・進展・消滅を変分モデルを用いて記述する枠組の下で，信号制御問題を，大規模な混合整数計画問題として定式化する．次に，Benders 分解原理を適用することで，この問題を，信号現示を与件として総遅れ時間を求めるサブ問題と，過去に実現した総遅れ時間を最小化する信号現示を求めるマスター問題とに分解する．本研究では，マスター問題の (本来ミニマックス型の) 目的関数を，ログサム関数を用いて平滑化近似した上で，部分線形近似を行う．こうして得られた近似問題が，各信号を個別に制御するエージェント同士の分散協調制御と見なせることを示す．

An Automous Collaborative Learning Approach for Coordinated Traffic Signal Control

SHINGO TABATA[1]　TAKESHI NAGAE[2]

1. はじめに

交通渋滞は，排ガスによる環境汚染や経済損失などの問題の要因になっている．そのため，渋滞を解消するための分析，制御手法が求められている．本研究では，特に信号交差点で生じる交通渋滞の削減方法に注目する．一般に，交通渋滞とは，路線上を上流から下流に向かって流れる車両群にあって，密度（単位空間あたりの車両数）が急激に上昇し，流量 (単位時間あたりに断面を通過する車両数) が急激に減少する現象であり，赤信号などで生じる車両の減速が後続車両へと伝搬する後進波に上流から流れる前進波が衝突する衝撃波と見なせる．複数の信号交差点で構成される路線においては，下流側の信号交差点で発生した渋滞が延伸し，上流側の信号交差点への流入が阻害される現象（”spill-back 現象”）が発生する．そのため，隣り合う信号同士の影響を考慮した系統制御が必要となる．

渋滞現象の発生・進展・消滅を変分理論 [1], [2] を用いて信号を制御する問題を取り扱った研究として，[3], [4], [5] がある．これらの研究では，道路ネットワーク上の全ての信号現示を同時に決定する中央集権的な制御を行っている．この方法は，交通量などのデータを一箇所に集約し，大規模な計算により全ての信号の現示を求めるものである．しかし，データの集約や信号現示の計算に時間がかかるため，即応性が低く，リアルタイムな制御が困難である．これに対し，本研究では，信号ごとに設置されたエージェントが，互いに協調しながら現示を改訂する分散協調制御手法を提案する．

信号現示には，サイクル長，オフセット，スプリットの 3 つのパラメータが存在する．サイクル長は，信号の青現示が開始してから，黄，赤となり，次に青現示が開始されるまでの 1 サイクルの時間である．オフセットは，基準とした時間と青現示開始時間の差である．スプリットは，サイクル長に対する青現示時間の長さである．信号制御においては，全ての信号に対し，この 3 つパラメータを渋滞が解消されるよう決定する必要がある．本研究では，3 つのうち，オフセットとスプリットを同時に決定する手法を用いる．

本研究の目的は，複数の信号交差点からなる道路ネットワークの渋滞を解消するために，隣り合う信号同士の影響を考慮した，最適な信号のオフセットとスプリット制御を

[1] 東北大学 工学研究科
[2] 博士（情報科学）　東北大学准教授　工学研究科

行うことである．具体的には，まず，信号間の spill-back 現象を記述できる変分理論 [1], [2] の枠組を用いて，信号制御問題を大規模な混合二値計画問題として定式化する．次に，この問題に Benders 原理 [6] を適用することで，ある信号現示が与えられたとき，どこでいつ渋滞が発生し，どれだけの遅れ時間が生じるかを求める**サブ問題**と，複数のサブ問題の解に基づいて信号現示を改訂する**マスター問題**とに分解する．こうして得られたマスター問題は max-min 二値計画問題であるため，そのままでは解くことが困難である．そこで，本研究では，区分線形関数であるマスター問題の目的関数を連続微分可能な平滑化関数で近似することで凸計画問題に帰着させ，部分線形化法を用いて解く近似解法を開発する．その際，この近似解法が，単にマスター問題の解を効率的に改訂するだけでなく，個々の信号が，共有情報をアップデートしながら，それぞれ信号現示を計算する分散協調学習プロセスとして解釈できることを明らかにする．最後に，静岡市を対象とした 16 路線・17 信号の道路ネットワークに提案手法を適用し，ランダムに与えられた流入交通量パターンに対して，遅れ時間を軽減させる望ましい信号現示を効率的に計算できることを明らかにする．

2. モデル

本研究では，Wada et al. [5] によって提案された枠組を複数路線が交錯する道路ネットワークへと拡張したものを用いる．

2.1 問題の枠組

分析時間帯を $[0,T]$ とする．分析時間帯は T 個の離散的な **時点**に等分割され，その長さを ΔT とする．時点にはそれぞれ $i=1,2,\cdots,\mathrm{T}$ と順にインデックスがつけられ，そのインデックス集合を $\mathcal{T}=\{1,\cdots,\mathrm{T}\}$ とする．時点 i の **期末** の絶対時刻を $t_i=i\Delta T$ で表す．便宜上，分析開始時刻 $t=0$ を期末時刻とするような仮想的な時点を **初期時点** と呼び, $i=0$ で表す．初期時点を含む時点集合を $\hat{\mathcal{T}}=\{0\}\cup\mathcal{T}$ で表す．

分析対象は複数の路線と信号交差点で構成される**図 1** のような任意の構造の道路ネットワークとする．ネットワークを構成する路線のインデックス集合を $\mathcal{M}=\{1,\cdots,\mathrm{M}\}$, 信号交差点のインデックス集合を $\mathcal{K}=\{1,\cdots,\mathrm{K}\}$ とする．双方向通行路線の場合は，各方向を，それぞれを 1 つの路線と見なす (例えば，**図 1** の例において, $m=1$ と $m=2$ は，それぞれ東向き，西向きに対応する)．

路線 $m\in\mathcal{M}$ の長さを L_m で表し，上流端を $y=0$, 下流端を $y=L_m$ とする．路線 $m\in\mathcal{M}$ 上の信号交差点の集合を $\mathcal{K}_m\subseteq\mathcal{K}$ とし，その数を $\mathrm{S}_m=|\mathcal{K}_m|$ とする．信号交差点 $k\in\mathcal{K}$ を含む路線の集合を $\mathcal{M}_k=\{m:\mathcal{K}_m\ni k\}$ で表す．信号交差点は, 各路線の上流から順に $1,\ldots,\mathrm{S}_m$ とインデックスがつけられるものとする (例えば，**図 1** の例では，路線 $m=5$ 上の交差点は，上流から順に, $k=2,3,4$ であり，逆方向の路線 $m=6$ 上の交差点は，上流から順に, $k=4,3,2$ である)．路線 $m\in\mathcal{M}$ について，$k\in 1,\cdots,\mathrm{S}_m$ 番目信号の上流端からの相対位置を $\ell_{m,k}$ で表す．表記の簡便化のために，$\ell_{m,0}=0$ および $\ell_{m,\mathrm{S}_m+1}=L_m$ とする．

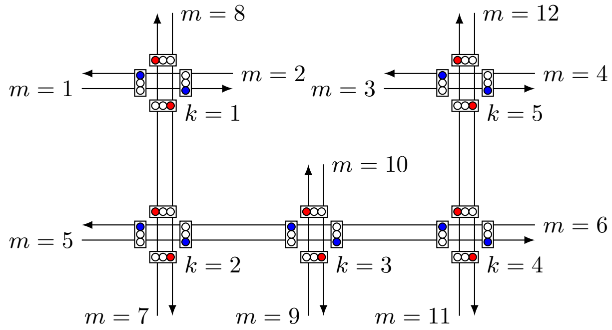


図 1: 対象道路ネットワーク (11 路線 5 信号交差点の例)

各信号は，主路線 ($f=0$) と副路線 ($f=1$) のそれぞれの面に対する現示を持つ．任意の時点 $i\in\mathcal{T}$ において，1 つ前の期末から当該時点の期末直前までの期間 $[(i-1)\Delta T,i\Delta T)$ における，信号 $k\in\mathcal{K}$ の面 $f\in\{0,1\}$ に対する現示を，以下の二値変数 $x_{k,f}(i)$ で表す:

$$x_{k,f}(i):=\begin{cases}1 & \text{if 信号 } k \text{ の面 } f \text{ に対する現示が青}\\ 0 & \text{if 信号 } k \text{ の面 } f \text{ に対する現示が赤}\end{cases} \tag{1}$$

時点 $i\in\mathcal{T}$ における信号 $k\in\mathcal{K}$ の現示を $\boldsymbol{x}_k(i)=[x_{k,f}(i):f\in\{0,1\}]$ で表し，$\boldsymbol{x}_k=\{\boldsymbol{x}_k(i):i\in\mathcal{T}\}$, $\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_k:k\in\mathcal{K}\}$ とする．信号 k の可能な現示の集合を $\mathcal{X}_k$ で表し，全信号の可能な信号の現示集合を $\mathcal{X}=\prod_{k\in\mathcal{K}}\mathcal{X}_k$ で表す．

路線 $m\in\mathcal{M}$ と信号交差点 $k\in\mathcal{K}_m$ の接続関係を, 以下の Kronecker デルタ $a_{m,k,f}$ で表す:

$$a_{m,k,f}:=\begin{cases}1 & \text{if 信号 } k \text{ が路線 } m \text{ に対して}\\ & \text{面 } f \text{ を向けている}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2}$$

2.2 偏格子ネットワークによる時空間表現

本稿では，道路区間は全て一様であるとし，FW (*forward wave*, 前進波) 速度 u, BW (*backward wave*, 後進波) 速度 $-w$ および最大流量 $q_{\max}$ であるところの三角形の FD (*fundamental diagram*, 基本図) で特徴づけられるとする．路線 $m\in\mathcal{M}$ の空間 $[0,L_m]$ を, 一定の幅 ΔX で離散化し，上流から順に $l=0,1,\cdots,\mathrm{L}_m$ とインデックスをつける．上流から l 番目の空間 $[l\Delta X,(l+1)\Delta X)$ の上流側の位置を地点 l と呼び，$\ell_{m,l}=l\Delta X$ で表す．便宜上，各路線の下流端の位置を $\ell_{m,\mathrm{L}_m}=\mathrm{L}_m\Delta X=L_m$ で表す．

簡単のため，任意の路線 m の長さおよび上流端からの各

交差点までの距離は ΔX の整数倍であると仮定する．路線 $m \in \mathcal{M}$ の $s = 1, \cdots, \mathrm{S}_m$ 番目信号の地点を $l_{m,s}$ で表し，その集合を $\mathcal{L}_m = (l_{m,s})_{s=1,\cdots,\mathrm{S}_m}$ で表す．

変分理論では，こうして離散化された時空間を，**図 2** のような **偏格子ネットワーク** (lopsided network) を用いて表現する．偏格子ネットワークは，以下のようにして構成される:

(1) 各路線について時空間上に偏格子の格子点集合 γ_m を構成する．具体的には，まず，路線 $m \in \mathcal{M}$ の任意の地点 $l = 0, 1, \cdots, \mathrm{L}_m$ について，上流端から FW 速度 u で移動する観測者が位置 $\ell_l = l\Delta X$ に到達するまでの時間 (自由走行時間) を $\Delta\tau_{m,l} = (l\Delta X)/u$ とする．次に，任意の時点 $j \in \hat{\mathcal{T}}$ について，期末時刻 $j\Delta T$ に路線 m の上流端を出発して FW 速度 u で移動する観測者が地点 j に到着する時刻 (以下, **相対時刻**) を

$$\tau_{m,l}(j) := j\Delta T + \Delta\tau_{m,l} = \left(j + \frac{w}{u+w} l\right) \Delta T \quad (3)$$

とする．最後に，任意の $(j, l) \in \hat{\mathcal{T}} \times \{0, 1, \cdots, \mathrm{L}_m\}$ について，相対時刻 $\tau_{m,l}(j)$ と位置 x_l の組からなる格子点の集合を

$$\gamma_m := \left\{(\tau_{m,l}(j), \ell_{m,l}) : j \in \hat{\mathcal{T}}, l = 0, \cdots, \mathrm{L}_m\right\} \quad (4)$$

とし，そのインデックス集合を $\{(j,l) : j \in \hat{\mathcal{T}}, l = 0, \cdots, \mathrm{L}_m\}$ で表す．

本稿では，この各格子点が FW 速度 u および BW 速度 $-w$ のいずれの傾きに対しても並行となる (i.e. 格子を形成する)，すなわち，離散化された時点幅 ΔT および地点幅 ΔT とが以下の関係を満たすとする：

$$\Delta T = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right) \Delta X \quad (5)$$

(2) γ_m 上の隣合う格子点を，FW 速度 u および BW 速度 $-w$ に等しい傾きを持つ有向リンク (それぞれ，**FW リンク** および **BW リンク** と呼ぶ) および傾き 0 の **信号リンク** で結び，偏格子ネットワークを構成する．具体的には，任意の格子点 (j, l) について，以下のルールに従ってリンクを構成する:

(a) $j < \mathrm{T}$ かつ $l < \mathrm{L}_m$ なら, 格子点 $(j+1, l+1)$ へ傾き u の FW リンクを張る;

(b) $j < \mathrm{T}$ かつ $l > 0$ なら, 格子点 $(j+1, l-1)$ へ傾き $-w$ の BW リンクを張る;

(c) $j < \mathrm{T}$ かつ地点 l に信号が存在する (i.e. $l \in \mathcal{L}_m$) なら, 格子点 $(j+1, l)$ へ傾き 0 の信号リンクを張る．

2.3 変分理論による遅れ時間評価

上述の偏格子ネットワークを用いることで，信号パターン $\boldsymbol{x}$ に対する路線 $m \in \mathcal{M}$ での遅れ時間を変分理論より算出できる．

変分理論では，(i) 時空間上のある境界 $\mathcal{D}_m$ で観測される (あるいは既知の) 累積交通量と，(ii) この境界上の任意の点から有効な波速 (valid wave velocities) に沿って観測者が移動する時の交通量の “変分” に基づいて求める．以下，記述を簡単にするために，境界条件として，(a) 分析開始時点 $t = 0$ における各路線の初期累積交通量 $\boldsymbol{N}_m(0) = \{N_m(0, l) : l = 0, \cdots, \mathrm{L}_m\}$; および (b) 各路線への流入パターン (i.e. 上流端での累積交通量) $\boldsymbol{A}_m(t) = \{N_m(t, 0) : t \in \mathcal{T}\}$ のみを考え，$\boldsymbol{N}_m(0) = \boldsymbol{0}$ としよう[*1]．ある信号パターン $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ と，各路線への流入パターン $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{A}_m(t)\}$ が与えられたとき，路線 $m \in \mathcal{M}$ の偏格子上の格子点 (j, l) について，時刻 $\tau_{m,l}(j)$ までに位置 ℓ_l を通過する累積交通量を

$$N_m(j, l; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}) \quad (6)$$

で表す．以下，記述を簡単にするため，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}$ を省略し，単に $N_m(j, l)$ とした表現も用いる．

変分理論より，路線 $m \in \mathcal{M}$ について，任意の格子点 (j, l) における累積交通量 $N_m(j, l)$ は，下記の 4 つの不等式を満たす中で最大のもので表される：

$$N_m(j, l) \leq N_m(j, l-1) \quad (7a)$$

$$N_m(j, l) \leq N_m(j-1, l+1) + \Delta N \quad (7b)$$

$$N_m(j, l_{m,s}) \leq N_m(j-1, l_{m,s}) + \hat{x}_{m,s}(j)\Delta N \quad \forall l_{m,s} \in \mathcal{L}_m \quad (7c)$$

これに加えて，上流端 $j = 0$ においては，以下の境界条件も満たす必要がある．

$$N_m(j, 0) \geq A_m(j), \quad j = 0, 1, \cdots, \mathrm{T} \quad (8)$$

ここで，$\Delta N := q_{\max}\Delta T = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right) q_{\max}\Delta X$ は，三角形 FD において，観測者が $[-w, u]$ の範囲内の有効波速で移動する時，この観測者を時間 ΔT(もしくは空間 ΔX) の間に追い越せる車両の上限 (相対交通容量) を表す[*2]．

式 (7) において，$\hat{x}_{m,s}(j)$ は，路線 m の s 番目信号の相対時点 j (時点 $\tau_{m,l_{m,s}}(j)$) における現示であり，

$$\hat{x}_{m,s}(j) := \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i=0}^{\mathrm{T}} \sum_{f \in \{0,1\}} \delta_{m,s}(i, j) a_{m,k,f} x_{k,f}(i) \quad (9)$$

と定義される．$\delta_{m,s}(i, j)$ は絶対時点 i と路線 m の s 番目信号地点 $l_{m,s}$ における相対時点 j の関係を表す Kronecker's delta であり，以下の式で定義される:

[*1] 本稿の枠組は，プローブ車両の走行軌跡などによって境界条件が与えられる場合にも容易に一般化可能である．

[*2] 観測者を追い越す車両数が最大となるのは，観測者が BW 速度 $-w$ で ΔX だけ移動する (BW リンクに沿って移動する) 場合，もしくは，信号が青の時にその場に ΔT だけ留まる (信号リンクに沿って移動する) 場合である．

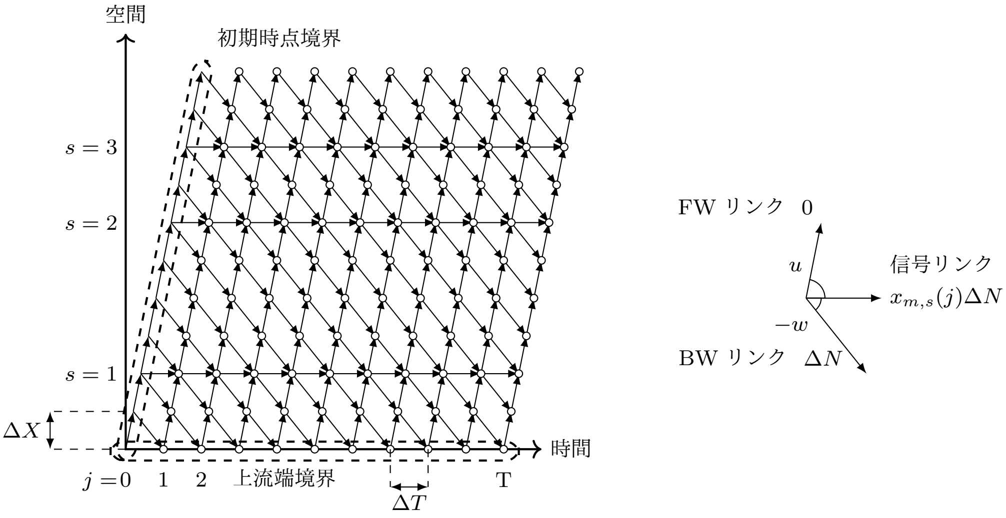


図 2: 変分理論で用いられる偏格子ネットワーク

$$\delta_{m,s}(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{if } i\Delta T = \tau_{m,l_{m,s}}(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

式 (9) は，行列とベクトルを用いて以下のようにも表せる：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_m = \sum_{k\in\mathcal{K}} \boldsymbol{\Lambda}_{m,k}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Lambda}_m \boldsymbol{x} \tag{11}$$

で表される．ここで，$\hat{\boldsymbol{x}}_m = \{\hat{x}_{m,s}(j) : j \in \mathcal{T}, s = 1,\cdots,\mathrm{S}\} \in \mathcal{R}^{\mathrm{TS}_m}$ である．$\boldsymbol{\Lambda}_{m,k} \in \mathcal{R}^{(\mathrm{TS}_m)\times(2\mathrm{T})}$ は，路線 $m \in \mathcal{M}$ と信号交差点 $k \in \mathcal{K}$ との接続行列であり，その代表的要素が以下で表される：

$$(\boldsymbol{\Lambda}_{m,k})_{(j,s),(i,f)} := a_{m,k,f}\,\delta_{m,s}(i,j) \tag{12}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_m := (\boldsymbol{\Lambda}_{m,k})_{k\in\mathcal{K}}$ である．

路線 $m \in \mathcal{M}$ について，信号パターン $\boldsymbol{x}$ と流入パターン $\boldsymbol{A}_m$ が与えられたとき，変分理論に基づいて各格子点上の累積交通量 $\boldsymbol{N}_m = \{N_m(j,l) : j \in \mathcal{T}, l = 0,\cdots,\mathrm{L}_m\}$ を求める問題は，下流端 L_m における累積交通量の総和 $\sum_{j\in\mathcal{T}} N_m(j,L_m)$ を最大化する以下の線形計画問題として定式化できる:

[Sub-P$_m$]

$$\max_{\boldsymbol{N}_m} \quad Z_{m,P}(\boldsymbol{N}_m;\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{e}_m^{\top}\boldsymbol{N}_m \tag{13a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{B}_m^{\mathrm{FW}}\boldsymbol{N}_m \leq \boldsymbol{0}_m \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{B}_m^{BW}\boldsymbol{N}_m \leq \boldsymbol{1}_m\Delta N \tag{13c}$$

$$\boldsymbol{B}_m^{SG}\boldsymbol{N}_m \leq \hat{\boldsymbol{x}}_m\Delta N \tag{13d}$$

$$\boldsymbol{B}_m^{0}\boldsymbol{N}_m \leq -\boldsymbol{A}_m \tag{13e}$$

$$\boldsymbol{N}_m \geq \boldsymbol{0} \tag{13f}$$

ここで，$\boldsymbol{0}_m, \boldsymbol{1}_m$ は，それぞれ，全ての要素が 0 および 1 の TL_m 次元列ベクトルである．$\boldsymbol{e}_m$ は TL_m 次元列ベクトルで，その (j,l) 格子に対応する要素 $(\boldsymbol{e}_m)_{(j,l)}$ が以下で定義される：

$$(\boldsymbol{e}_m)_{(j,l)} := \begin{cases} 1 & \text{if } l = \mathrm{L}_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

式 (13b) ，(13c) および (13d) は，それぞれ，(7a) ，(7b) および (7c) をベクトル・行列表示したもので，行列 $\boldsymbol{B}_m^{FW}, \boldsymbol{B}_m^{BW} \in \mathcal{R}^{\mathrm{TL}_m\times\mathrm{TL}_m}, \boldsymbol{B}_m^{SG} \in \mathcal{R}^{\mathrm{TS}_m\times\mathrm{TL}_m}$ は，それぞれの要素が以下で表される：

$$(\boldsymbol{B}_m^{FW})_{(j,l),(p,q)} := \begin{cases} 1 & \text{if } (p,q) = (j,l) \\ -1 & \text{if } (p,q) = (j,l-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

$$(\boldsymbol{B}_m^{BW})_{(j,l),(p,q)} := \begin{cases} 1 & \text{if } (p,q) = (j,l) \\ -1 & \text{if } (p,q) = (j-1,l+1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

$$(\boldsymbol{B}_m^{SG})_{(j,s),(p,q)} := \begin{cases} 1 & \text{if } (p,q) = (j,l_s) \\ -1 & \text{if } (p,q) = (j-1,l_s) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

式 (13e) は上流端境界での境界条件 (8) をベクトル・行列表示したもので，行列 $\boldsymbol{B}_m^0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{T}\times\mathrm{TL}_m}$ は，その要素が以下で定義される．

$$(\boldsymbol{B}_m^0)_{j,(p,q)} := \begin{cases} -1 & \text{if } (p,q) = (j,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

なお，路線 m のサブ問題 [Sub-P$_m$] の目的関数を，上流端への累積流入量の総和から引いたもの:

$$D_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) := \sum_{j\in\mathcal{T}} \left(A_m(j) - N_m(j,\mathrm{L}_m)\right)\Delta T \tag{19}$$

は，当該路線で生じる遅れ時間に他ならない．従って，問題 [Sub-P$_m$] は，路線 m への流入パターン $\boldsymbol{A}_m$ と信号パターン $\boldsymbol{x}$ を与件として遅れ時間を最小とする累積台数 $\boldsymbol{N}_m$ を求める問題としても解釈できる．

2.4 信号制御問題

本研究が取り扱う信号制御問題は，全ての路線における遅れ時間の総和

$$D(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) := \sum_{m\in\mathcal{M}} D_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{A}) \tag{20a}$$

$$= \sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{j\in\mathcal{T}} \{A_m(j) - N_m(j,\mathrm{L}_m)\} \tag{20b}$$

をなるべく小さくするような信号パターンを求める．流入パターン $\boldsymbol{A}$ は与件であるため，この信号制御問題は，以下のように定式化できる:

$$\text{[P0]} \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{N}} \sum_{m\in\mathcal{M}} \boldsymbol{e}_m^\top \boldsymbol{N}_m, \tag{21}$$

$$\text{s.t. (13b) - (13e)} \quad \forall m\in\mathcal{M}$$

3. Benders 分解

問題 [P0] は信号パターン $\boldsymbol{x}$ と交通量 $\boldsymbol{N}$ を同時に求める大規模な組合せ計画問題であり，そのままでは解くことが難しい．そこで，本研究では，問題 [P0] に Benders 分解原理を適用することで，「信号パターン $\boldsymbol{x}$ を与件として総遅れ時間を求める問題 (サブ問題)」と「サブ問題 (の双対問題) の解集合を用いて信号パターン $\boldsymbol{x}$ を改訂する問題 (マスター問題)」とを交互に解く問題に分解する．

3.1 路線ごとの遅れ時間評価問題

ある信号現示 $\boldsymbol{x}$ が与えられた時，路線 $m\in\mathcal{M}$ の総遅れ時間は，式 (13) の線形計画問題 [Sub-P$_m$] の最適値として求められる．以下では，この問題 [Sub-P$_m$] を**路線 m のサブ問題**と呼ぶことにする．路線 m のサブ問題の制約条件 (13b), (13c), (13d) および (13e) に対する Lagrange 乗数を，それぞれ，$\boldsymbol{f}_m,\boldsymbol{h}_m,\boldsymbol{g}_m,\boldsymbol{d}_m$ とし，これらをまとめて $\boldsymbol{Y}_m = (\boldsymbol{f}_m,\boldsymbol{h}_m,\boldsymbol{g}_m,\boldsymbol{d}_m)$ で表すと，[Sub-P$_m$] の双対問題 (以下では「路線 m のサブ双対問題」と呼ぶ) は，以下のように定式化される．

[Sub-D$_m$]

$$\min_{\boldsymbol{Y}_m} \quad Z_{m,D}(\boldsymbol{Y}_m;\boldsymbol{x})$$

$$:= \left(\boldsymbol{h}_m^\top \boldsymbol{1}_m + \boldsymbol{g}_m^\top \hat{\boldsymbol{x}}_m - \boldsymbol{d}_m^\top \boldsymbol{A}_m\right)\Delta N \tag{22a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{f}_m^\top \boldsymbol{B}_m^{FW} + \boldsymbol{h}_m^\top \boldsymbol{B}_m^{BW} + \boldsymbol{g}_m^\top \boldsymbol{B}_m^{SG} + (\boldsymbol{d}_m)^\top \boldsymbol{B}_m^0 \geq \boldsymbol{e}_m^\top \tag{22b}$$

$$\boldsymbol{f}_m,\boldsymbol{h}_m,\boldsymbol{g}_m,\boldsymbol{d}_m \geq \boldsymbol{0} \tag{22c}$$

Wada et al.[5] は，この路線 m のサブ問題 [Sub-D$_m$] が，1 起点多終点の最短経路探索問題に帰着する— 偏格子ネットワークの各リンクに沿った相対容量を当該リンクの “コスト” と見なしたとき，各格子点における累積交通量 $N_m(j,l)$ が，(ダミー起点から) 当該格子点までの “最短経路費用” と見なせる— ことを明らかにしている．具体的には，路線 $m\in\mathcal{M}$ サブ問題 [Sub-P$_m$] は，

(1) 偏格子上の FW リンクおよび BW リンクのそれぞれの “コスト” を, 0 および ΔN とする．
(2) s 番目信号の相対時点 j における信号リンクのコストを $\hat{x}_{m,s}(j)\Delta N$ とする．
(3) 「ダミー起点」および「ダミー起点から境界上の格子点 (j,l) 格子点へのダミーリンク」を導入し，そのコストを，当該格子点における既知の累積交通量 $\bar{N}_m(j,l)$ とする．
(4) ダミー起点から下流端の格子点 $\{(j,L_m) : j = 0,1,\cdots,\mathrm{T}\}$ のそれぞれに対して 1 単位の観測者が移動するとする．各移動観測者は，終点となる下流端格子点までの間に自分が追い越す車両数 (交通量の増分) が最小となるように偏格子ネットワーク上を移動する．

としたときの，移動観測者の偏格子ネットワーク上への最短経路配分 (all-or-nothing 配分) と見なせる．サブ双対問題 [Sub-D$_m$] の解 $\boldsymbol{f}_m,\boldsymbol{h}_m,\boldsymbol{g}_m,\boldsymbol{d}_m$ の代表的要素を $f_m(j,l),h_m(j,l),g_{m,s}(j),d_m(j)$ と表せば，これらは，偏格子ネットワーク上の下記リンク上の**移動観測者フロー**を表している：

- $f_m(j,l),h_m(j,l)$: それぞれ, 格子点 (j,l) へ向かう FW リンクおよび BW リンク;
- $g_{m,s}(j)$: s 番目信号リンク上の格子点 $(j,l_{m,s})$ へ向かう信号リンク;
- $d_m(j)$: 上流端の格子点 $(j,0)$ からの FW リンク．

3.2 Benders 分解アルゴリズム

ある信号パターン $\boldsymbol{x}$ に対して，全路線での総遅れ時間を最小化 (累積流出量の総和を最大化) する問題:

$$\text{[Sub-P]} \quad \max_{\boldsymbol{N}} Z_P(\boldsymbol{N};\boldsymbol{x}) := \sum_{m\in\mathcal{N}} Z_{m,P}(\boldsymbol{N}_m;\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

およびその双対問題:

$$\text{[Sub-D]} \quad \min_{\boldsymbol{Y}} Z_D(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{x}) := \sum_{m\in\mathcal{N}} Z_{m,D}(\boldsymbol{Y}_m;\boldsymbol{x}) \tag{24}$$

を，それぞれ「サブ問題」および「サブ双対問題」と呼ぼう．

このとき，サブ双対問題 [Sub-D] の未知変数 $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_m)_{m\in\mathcal{M}}$ の許容領域 $\Omega_D = \prod_{m\in\mathcal{M}}\{\boldsymbol{Y}_m|\text{(13b) to (13e)}\}$ は，信号パターン $\boldsymbol{x}$ とは独立であることに注意されたい．サブ双対問題 [Sub-D] の最適解は，この許容領域の端点 $\mathcal{V} = \left\{\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{Y}^{(P)}\right\}$

の中で $Z_D(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{x})$ を最小化するものだから，元の信号制御問題 [P0] は，以下の**マスター問題**と呼ばれる問題に帰着する：

$$[\mathrm{P0'}] \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} H(\boldsymbol{x}) := \min_{p=1,\cdots,\mathrm{P}} Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x}) \tag{25}$$

ここで，$Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x}) := Z_D(\boldsymbol{Y}^{(p)};\boldsymbol{x})$ は，信号パターン $\boldsymbol{x}$ を与件としたときの端点 $\boldsymbol{Y}^{(p)}$ に対応する総遅れ時間であり，以下の線形式で表せる:

$$Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x}) := Z_{D,0}^{(p)} + \sum_{k\in\mathcal{K}} Z_{D,k}^{(p)}(\boldsymbol{x}_k) \tag{26}$$

ここで，

$$Z_{D,0}^{(p)} := \sum_{m\in\mathcal{M}} \left(\mathbf{1}_m^\top \boldsymbol{h}_m^{(p)} - \boldsymbol{A}_m^\top \boldsymbol{d}_m^{(p)}\right)\Delta N \tag{27}$$

$$Z_{D,k}^{(p)}(\boldsymbol{x}_k) := \boldsymbol{x}_k^\top \boldsymbol{c}_k^{(p)} \tag{28}$$

は，それぞれ，p 番目端点に対応して信号リンク以外で生じる遅れ時間および信号 k で生じる遅れ時間であり，

$$\boldsymbol{c}_k^{(p)} := \sum_{m\in\mathcal{M}} \boldsymbol{\Lambda}_{m,k}^\top \boldsymbol{g}_m^{(p)} \Delta N \tag{29}$$

は，各路線の信号リンク上の観測者フロー $\left(\boldsymbol{g}_m^{(p)} : m\in\mathcal{M}\right)$ を，信号 $k\in\mathcal{K}$ の各面・各現示について集計した 2T 次元列ベクトルである．以下では，$\boldsymbol{c}_k^{(p)}$ を，サブ双対解 $\boldsymbol{Y}^{(p)}$ における**信号 k 上の移動観測者フロー**と呼び，それを並べた 2KT 次元ベクトル：

$$\boldsymbol{c}^{(p)} := \left(\boldsymbol{c}_k^{(p)}\right)_{k\in\mathcal{K}} \tag{30}$$

を，**信号上の移動観測者フロー**と呼ぶ．

一般に，サブ問題の全ての端点 $\mathcal{V} = \left\{\boldsymbol{Y}^{(1)},\boldsymbol{Y}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{Y}^{(P)}\right\}$ を予め列挙しておくことは非効率であるため，通常は，これを逐次的に生成する方法が用いられる．その手続きは，下記のステップアルゴリズムで書き下せる：

[Alg-Benders]

Step 0 (初期化)　マスター問題の初期実行可能解 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathcal{X}$ を与える．サブ問題の端点集合を $\mathcal{V}^{(0)} := \emptyset n := 1$ とする．

Step 1 (サブ問題の求解)　$\boldsymbol{x}^{(n-1)}$ を与件としてサブ問題 [Sub-D] の解 $\boldsymbol{Y}^{(n)}$ を得る．

Step 2 (収束判定)　サブ問題の解が端点集合に含まれている (i.e. $\boldsymbol{Y}^{(n)}\in\mathcal{V}^{(n-1)}$) なら $\boldsymbol{x}^{(n)}$ を最適信号パターンとして終了．そうでなければ, $\mathcal{V}^{(n)} := \mathcal{V}^{(n)} \cup \{\boldsymbol{Y}^{(n)}\}$ とする．

Step 3 (マスター問題の解の改訂)　端点集合を $\mathcal{V}^{(n)}$ としたマスター問題:

$$[\mathrm{P0}^{(n)}] \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} H^{(n)}(\boldsymbol{x}) := \min_{p=1,\cdots,n} Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x}) \tag{31}$$

を解き，新たなマスター問題の解 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ を得る．$n := n+1$ として **Step 1** に戻る．

4. マスター問題 [P0$^{(n)}$] の近似解法

前節で求めたマスター問題 [P0$^{(n)}$] は，それ自身が max-min 組合せ最適化問題であるため，その厳密解を求めることは困難である．そこで，本節では，まず，4.1 でマスター問題に対して，目的関数の平滑化および線形近似を用いた近似解法 (heuristics) を示す．次に， 4.2 において，この近似解法の手続きが,「信号交差点ごとの仮想エージェント」と「統括エージェント」とで構成される系における分散協調学習として解釈できることを示す．

4.1 平滑化と線形近似

マスター問題 [P0$^{(n)}$] の目的関数は連続微分できないため，これを，以下のように平滑化しよう[*3]：

$$H^{(n)}(\boldsymbol{x}) \approx \hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x}) := -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{p=1}^{n}\exp\left[-\theta Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x})\right] \tag{32}$$

ここで，$\theta > 0$ は所与の定数で，平滑化パラメータと呼ばれる．平滑化された目的関数 $\hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x})$ は，以下の特徴を備える:

(1) $\theta\to 0$ の極限において，$\hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \to H^{(n)}(\boldsymbol{x})$ である;
(2) $\boldsymbol{x}$ について連続微分可能であり，狭義凹である．このため，$\hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x})$ は，$\boldsymbol{x}$ が連続で許容領域が凸であれば大域的最適解を持つ．

次に，平滑化された目的関数を最大化する問題:

$$[\mathrm{P1}^{(n)}] \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \tag{33}$$

を ($\boldsymbol{x}$ が連続変数であった場合に) Frank-Wolfe 法によって解くことを考えよう．暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ が与えられたとき，平滑化目的関数 $\hat{H}_\theta^{(n)}$ を $\hat{\boldsymbol{x}}$ の周りで線形近似したものは,

$$\hat{H}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \approx \hat{\hat{H}}_\theta^{(n)}(\boldsymbol{x};\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{34}$$

$$= \hat{H}_\theta^{(n)}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \nabla\hat{H}_\theta^{(n)}(\hat{\boldsymbol{x}})^\top(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{35}$$

と表せる．定義 (32)　より，平滑化された目的関数の勾配 $\nabla\hat{H}^\theta(\hat{\boldsymbol{x}})$ は,

$$\nabla\hat{H}^\theta(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\sum_{p=1}^n \exp\left[-\theta Z_D^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]\nabla Z_D^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})}{\sum_{q=1}^n \exp\left[-\theta Z_D^{(q)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]} \tag{36}$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{\exp\left[-\theta Z_D^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]\boldsymbol{c}^{(p)}}{\sum_{q=1}^n \exp\left[-\theta Z_D^{(q)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]} \tag{37}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{c}^{(p)}$ は式 (30)　で定義される信号上の移動観測者フローである．

いま，n 個のサブ問題の端点 $\mathcal{V}^{(n)} = \{\boldsymbol{Y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{Y}^{(n)}\}$ について,

[*3] log-sum 関数や neural network 関数 [7], [8], [9] などとして知られている．

$$\pi^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}}) := \frac{\exp\left[-\theta Z_D^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]}{\sum_{q=1}^{n}\exp\left[-\theta Z_D^{(q)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]}, \quad p = 1, 2, \cdots, n \tag{38}$$

と定義すれば，式 (37) は，

$$\nabla \hat{H}^{\theta}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{p=1}^{n} \pi^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{c}^{(p)} =: \bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{39}$$

と表せる．式 (38) の $\pi^{(p)}$ は，$\pi^{(p)} > 0$ $(\forall p = 1, \cdots, n)$ かつ $\sum_{p=1}^{n}\pi^{(p)} = 1$ であることから，$\mathcal{V}^{(n)}$ 内の p 番目のサブ双対解 $\boldsymbol{Y}^{(p)}$ に対する**相対的重要度**と解釈できる．そして，$\bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ は，それまでに得られているサブ双対解における信号上の観測者フロー $\{\boldsymbol{c}^{(p)} : p = 1, \cdots, n\}$ を，暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ で評価した重要度 $\boldsymbol{\pi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = (\pi^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ に応じて加重平均したものと解釈できる．

式 (39) を式 (35) に代入すれば，

$$\hat{H}_{\theta}^{(n)}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{x}^{\top}\bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \text{const.} \tag{40}$$

を得る．従って，平滑化された目的関数 $\hat{H}_{\theta}^{(n)}$ を暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ の周りで一次近似したものを最大化する問題 (以下，補助問題と呼ぶ) は，所与の定数 $\bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ を用いた以下の線形計画問題に帰着する：

$$[\mathsf{Aux}(\hat{\boldsymbol{x}})] \quad \hat{\boldsymbol{y}} := \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \boldsymbol{x}^{\top}\bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{41}$$

4.2 マスター問題 [P0$^{(n)}$] に対する近似解法

補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] の解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を用いれば，平滑化された目的関数 $\hat{H}_{\theta}^{(n)}$ の降下方向は $\Delta\boldsymbol{x} := \hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{x}}$ と表せる．ここで，信号パターン $\boldsymbol{x}$ の許容領域 $\mathcal{X}$ が連続かつ凸ならば，適当なステップ・サイズ $\alpha \in [0, 1]$ を用いた現在の解と補助解の凸結合:

$$\boldsymbol{z}(\alpha) = (1-\alpha)\hat{\boldsymbol{x}} + \alpha\hat{\boldsymbol{y}} \quad \alpha \in [0, 1] \tag{42}$$

によって解を改訂する Frank-Wolfe 法が適用できる．しかし，本稿が対象とする信号現示 $x_{k,f}(i)$ は二値変数であるため，$\boldsymbol{z}(\alpha)$ 二値空間への射影:

$$[\boldsymbol{z}]_B = \left\{ [z_i]_B = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le z_i < 0.5 \\ 1 & \text{if } 0.5 \le z_i \le 1 \end{cases} \middle| \, i = 1, \cdots, N \right\} \tag{43}$$

を用いて，目的関数が改善される (i.e. $H^{(n)}([\boldsymbol{z}(\alpha)]_B) > H^{(n)}(\hat{\boldsymbol{x}})$ となる) ような α^* を探索する近似解法を採用する．そのような α^* が見つかった場合は，$\hat{\boldsymbol{x}} := [\boldsymbol{z}(\alpha^*)]_B$ と解を改訂し，そうでなければ暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ をマスター問題 [P0$^{(n)}$] の近似解とする．以下では，このヒューリスティクスを，便宜上，疑似 Frank-Wolfe 法と呼ぶ．その手続きは，以下のように整理される：

[PFW-P0$^{(n)}$]

Step 0 (初期化) 適当な初期実行可能解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を与える．

Step 1 (補助解の取得) 補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] を解いて補助解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を得る．

Step 2 (ステップサイズの決定) $H^{(n)}([\boldsymbol{z}(\alpha)]_B) > H^{(n)}(\hat{\boldsymbol{x}})$ となる α^* を探索する．そのような α^* が見つからなければ，$\hat{\boldsymbol{x}}$ をマスター問題 [P0$^{(n)}$] の近似解として終了．

Step 3 (解の改訂) $\hat{\boldsymbol{x}} := [\boldsymbol{z}(\alpha^*)]_B$ として **Step 1** へ．

本研究では，信号制御問題 [P0] に対して Benders 分解アルゴリズム [Alg-Benders] を適用し，その **Step 3** において，マスター問題 [P0$^{(n)}$] の近似解を疑似 Frank-Wolfe 法 [PFW-P0$^{(n)}$] で求めるヒューリスティクスを提案する．以下では，この提案ヒューリスティクスを，便宜上，[PFW-Benders] と記述する．なお，[Alg-Benders] の **Step 1** において，補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] を解く際は，信号パターンをオフセット・スプリットの関数として扱う．信号現示とオフセット・スプリットとの変換については，付録に記載する．

5. 分散協調学習としての解釈

5.1 補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] の解法

補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] の目的関数は，以下のように信号交差点ごとの項の和に分解できる：

$$\boldsymbol{x}^{\top}\bar{\boldsymbol{c}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{\top}\bar{\boldsymbol{c}}_k(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{44}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{c}}_k(\hat{\boldsymbol{x}})$ は，信号 $k \in \mathcal{K}$ の観測者フローを，暫定解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ で評価した重要度 $\boldsymbol{\pi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \left(\pi^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}})\right)_{p=1,\cdots,n}$ を用いて加重平均したもの:

$$\bar{\boldsymbol{c}}_k(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{p=1}^{n} \boldsymbol{c}_k^{(p)}\pi^{(p)}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{45}$$

である．さらに，未知変数 $\boldsymbol{x}$ の許容領域 $\mathcal{X}$ は，各信号交差点ごとの許容領域の直積 $\mathcal{X} = \prod_{k\in\mathcal{K}}\mathcal{X}_k$ であるから，補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] の解は，個々の信号交差点 $k \in \mathcal{K}$ についての問題を独立に解いた解:

$$[\mathsf{Aux}(\hat{\boldsymbol{x}})_k] \quad \hat{\boldsymbol{y}}_k := \arg\max_{\boldsymbol{x}_k\in\mathcal{X}_k} \boldsymbol{x}_k^{\top}\bar{\boldsymbol{c}}_k(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{46}$$

を並べた以下の式で得られる：

$$\hat{\boldsymbol{y}} := (\hat{\boldsymbol{y}}_k : k \in \mathcal{K}) \tag{47}$$

5.2 分散強調学習システムとしての解釈

このことは，提案ヒューリスティクス [PFW-Benders] が，下記のような，個々の信号交差点ごとの仮想エージェント (以下，信号交差点エージェント) $k \in \mathcal{K}$ と統括エージェントからなる分散強調学習システムで実装し得ることを示唆している．

5.2.1 信号交差点エージェントの処理

n 回目繰返しにおいて，信号交差点エージェント $k \in \mathcal{K}$ は，自身の上のこれまでの観測者フロー $\boldsymbol{c}_k^{(1)}, \boldsymbol{c}_k^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{c}_k^{(n-1)}$

を個別に保持しており，サブ双対解の重要度 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}^{(n-1)})$ が与えられると，以下の 2 つを求めて統括エージェントに伝達する：

a) 新たな信号パターン 式 (45) から求めた観測者フローの加重平均 $\bar{\boldsymbol{c}}_k^{(n)}$ を与件とした，自身についての補助問題 [Aux$_k^{(n)}$] の解 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(n)}$ (i.e. 自らの新しい信号パターン).

b) 改定後の信号に対する遅れ時間 この新しい信号パターン $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(n)}$ に対応するこれまでの観測者フロー $\boldsymbol{c}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{c}^{(n-1)}$ の遅れ時間の列 $\boldsymbol{Z}_k^{(n)} = \left(Z_k^{(1)}(\boldsymbol{x}_k^{(n)}),\cdots,Z_k^{(n-1)}(\boldsymbol{x}_k^{(n)})\right)$. ここで，$Z_k^{(p)}(\boldsymbol{x}_k^{(n)})$ は式 (28) で定義される.

これらは，統括エージェントが新たな重要度を計算するのに用いられる.

5.2.2 統括エージェントの処理

n 回目繰返しにおいて，統括エージェントは，それまでの信号リンク以外で生じる遅れ時間 $Z_{D,0}^{(1)},\cdots,Z_{D,0}^{(n-1)}$ を保持しており，これを各信号交差点エージェントから収集した下記の情報:

(1) 新たな信号パターン $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(n)} : k \in \mathcal{K}\right)$

(2) サブ双対解 $\boldsymbol{Y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{Y}^{(n-1)}$ に対応する遅れ時間列 $\left(\boldsymbol{Z}_k^{(p)}(\boldsymbol{x}_k^{(n)}) : p = 1,\cdots,n-k \in \mathcal{K}\right)$

と組み合わせることで，各信号上の観測者フロー $\left(\boldsymbol{c}_k^{(n)} : k \in \mathcal{K}\right)$ および新たなサブ双対解の重要度 $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ を求め，これを各信号エージェントに伝達する．具体的には，まず，新たな信号パターン $\boldsymbol{x}^{(n)}$ を与件としてサブ双対問題 [Sub-D$^{(n)}$] を解き，式 (27) および (28) から信号リンク以外での遅れ時間 $Z_{D,0}^{(n)}$ および各信号上の観測者フロー $\boldsymbol{c}_k^{(n)} : k \in \mathcal{K}$ を求める．次に，最新の信号パターン $\boldsymbol{x}^{(n)}$ に対するサブ双対問題の最適値 (総遅れ時間):

$$Z_D^{(n)}(\boldsymbol{x}^{(n)}) = Z_{D,0}^{(n)} + \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\boldsymbol{c}_k^{(n)}\right)^\top \boldsymbol{x}^{(n)} \tag{48}$$

および，これまでのサブ双対解に対する総遅れ時間

$$Z_D^{(p)}(\boldsymbol{x}^{(n)}) = Z_{D,0}^{(p)} + \sum_{k\in\mathcal{K}} Z_k^{(p)}(\boldsymbol{x}_k^{(n)}) \tag{49}$$

を求め，これを式 (38) に代入して，新たなサブ双対解の重要度 $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \left(\pi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(n)}),\cdots,\pi^{(n)}(\boldsymbol{x}^{(n)})\right)$ を求める．最後に，個々の信号交差点エージェント $k \in \mathcal{K}$ に対して，当該信号上の最新の観測者フロー $\boldsymbol{c}_k^{(n)}$ および共通のサブ双対解の重要度 $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ を伝達する.

マスター問題 [P0$^{(n)}$] は max-min 組合せ最適化問題であるために，大域的最適解を厳密に求めることが著しく困難である上に，繰返し回数を重ねるごとに制約条件が 1 つ増えるために計算コストがかかる．それに対し，信号交差点ごとに分解された補助問題 [Aux$_k^{(n)}$] は，加重平均された観測者フロー $\bar{\boldsymbol{c}}_k(\boldsymbol{x}^{(n)})$ を係数とする線形最適化問題であるため，貪欲法で効率的に解くことができる．さらに，信号現示と遅れ時間列は個々の信号交差点エージェントが求めるため，統括エージェントが全ての計算を担う方法に比べて大幅に計算負荷を軽減できる．このため，交通事故などで特定の地点の走行性能が変化したり，日常的な需要の変動や自然災害などによって各路線への流入パターンが変化したりした場合にも，観測情報に応じた迅速な信号現示の改訂が期待できる.

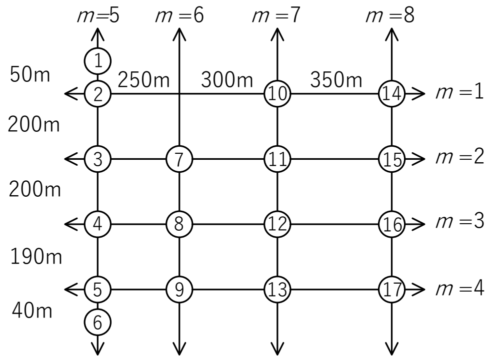


図 3: 対象道路ネットワーク

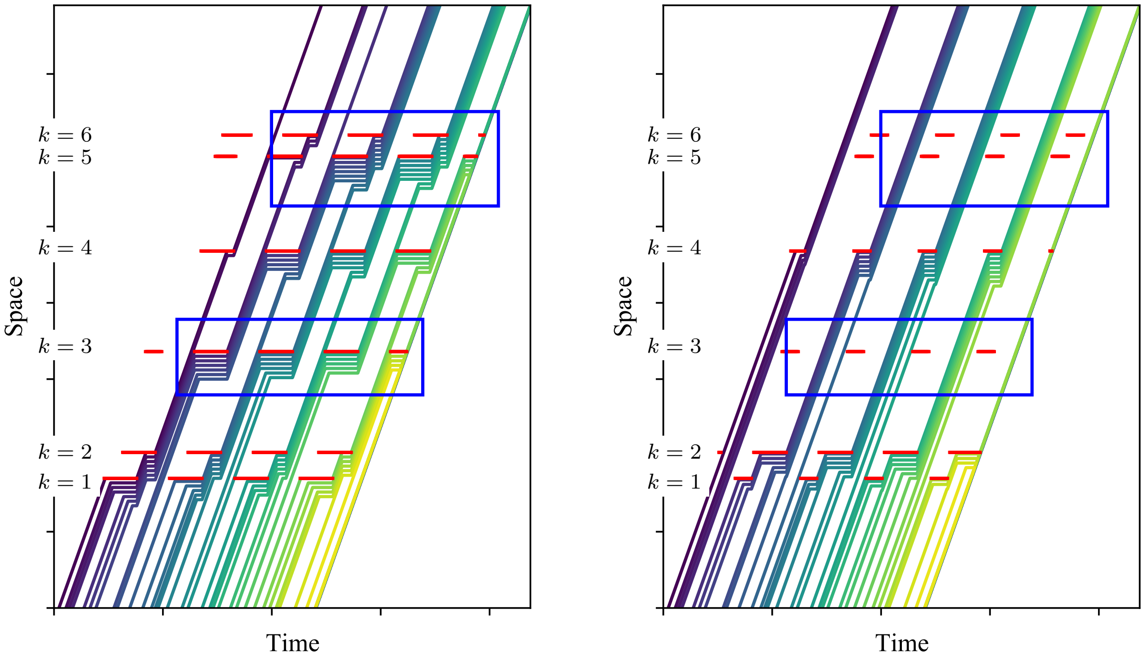
6. 数値計算例

本節では，前節までに述べた手法が適切に動作することを，数値計算によって確認する．適用対象は**図 3** に示す往復合わせて 16 路線と 17 個の信号で構成されるネットワークであり，静岡県静岡市の登呂公園周辺の道路を簡略化したものである．各路線には東向きおよび北向きを順方向としたインデックスを付してあり，逆方向の路線には負のインデックスを与えている．道路の走行性能等，計算に用いたパラメータは**表 A·1** に示す．各路線の上流端からの車両の流入はポアソン到着によってランダムに与えることとした．その単位時間あたりの流入率を**表 A·2** に示す．オフセット（サイクル長に対する割合）の候補は $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$ の 3 通り，スプリット（サイクル長から全赤時間を除いた時間に対する割合）は $\{\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\}$ の 3 通りとした．初期解として，全信号ともにオフセットを 0，スプリットを $\frac{2}{4}$ とした．[PFW-P0$^{(n)}$] の α の探索については，$\alpha \in \{0.1, 0.2,\cdots,0.9,1.0\}$ の 10 候補について目的関数 $H^{(n)}([(1-\alpha)\hat{\boldsymbol{x}} + \alpha\hat{\boldsymbol{y}}])$ を計算し，その中で目的関数が最大となるものを採用した[*4]．計算環境は，Intel Core i5-7300U 2.60GHz，RAM 8GB の計算機を使用し，Python 3.8 でコーディングを行った.

路線 $m = -5$ における車両軌跡を**図 4** に示す．各サブ図 **4a** および図 **4b** は，それぞれ，初期解および最適解における車両軌跡であり，赤線が信号の赤現示，それ以外の色の付いた線が車両軌跡を表している．初期解では，青枠で囲った部分で渋滞が起きているが，最適解では解消されていることが確認できる.

本研究では，流入パターンをポアソン到着過程としてラ

*4 これは，$H^{(n)}(\hat{\boldsymbol{x}})$ の凸性が保証できないために採用した便法であり，より洗練された方法の検討については今後の課題である.



(a) 初期解　　(b) 最適解

図　4: 路線 $m = -5$ における車両軌跡

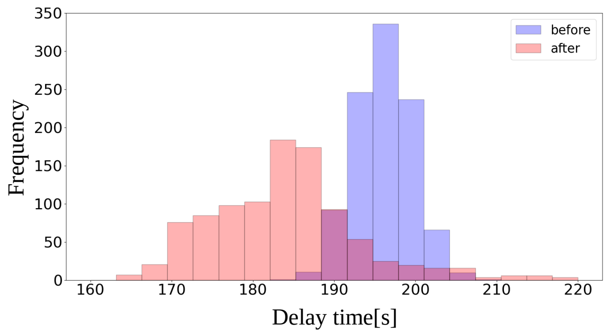


図　5: 初期解と最適解における平均遅れ時間

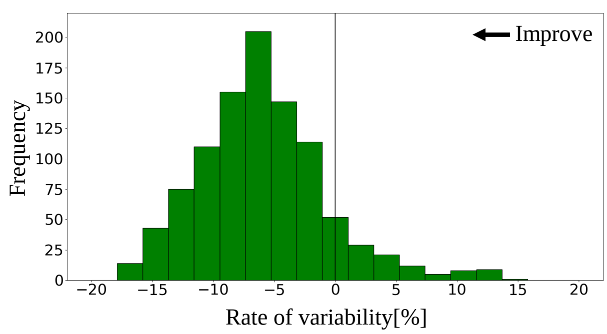


図　6: 初期解と最適解における平均遅れ時間の変化率

ンダムに生成し，1000 回の試行を行った．実験ごとに合計の流入台数が変わるため，車両 1 台ごとの平均遅れ時間で提案手法の性能を評価した．結果を**図 5** に示す．**図 5** は，横軸に平均遅れ時間，縦軸に度数（該当する性能が得られた試行回数）を示している．青が初期解，赤が最適解を示す．図より，最適解の方が分布が左側にあり，平均遅れ時間は概ね改善できていると言える．

図 5 の初期解と最適解の平均遅れ時間の変化率を**図 6** に示す．最頻値が約-7 %であり，やはり，改善の傾向にある．流入の 1000 パターン中，891 パターンが改善，109 パターンが改悪した．

図 7 は収束までの繰返し回数と累計度数を示したものである．60 回で急激に度数が増加しているのは，計算時間の都合上，60 回でシミュレーションを打ち切っているためである．1000 ターン中，339 パターンが 5 回以内に収束し，669 パターンが 10 回以内に収束した．改悪されたのは 1000 パターン中 109 パターンであったが，そのうち 60 回以内に収束しなかったのは 43 パターンであった．

7.　おわりに

本研究は，複数の信号交差点を持つ道路ネットワークを対象として，渋滞の解消のための信号制御アルゴリズムを

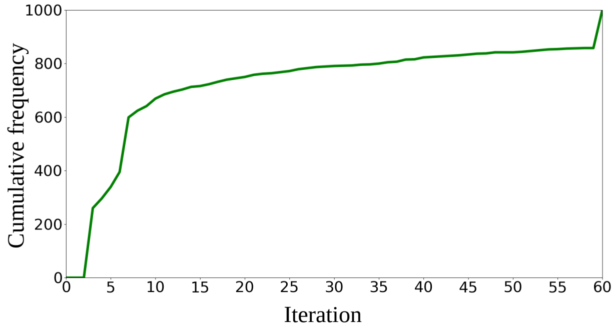


図 7: 解が収束するまでの繰返し回数

提示した．まず，道路ネットワークを，各路線ごとに偏格子ネットワークでモデリングし，遅れ時間が評価できることを示した．そのうえで，変分理論により信号制御問題を混合二値計画問題に定式化した．混合二値計画問題はそのままでは解きにくいため，近似解法を利用した．はじめに，Benders 分解により混合二値計画問題を累積台数を求めるサブ問題と信号現示を求めるマスター問題とに分解した．次に，平滑化近似により，マスター問題をログサム関数に近似した．さらに，線形近似することでマスター問題を信号ごとの補助問題に分解した．近似解法が信号ごとに現示を求められる分散協調制御であることを示した．最後に，数値計算を行い，本手法の効果を検証した．結果，対象となる道路ネットワークで，車両 1 台あたりの平均遅れ時間の期待値を 7 %減少させた．

1000 パターン中 109 パターンが改悪された第 1 の原因として，オフセット・スプリットの候補を 3 つずつ，つまり信号 1 つにつき現示が 9 種類であったことが挙げられる．選択可能な現示が少ないことにより，マスター問題の解（信号パターン）を適切に改訂できなかった可能性がある．今後は，オフセット・スプリットの候補を増やすとともに，それに対応可能なステップ・サイズ探索手法を開発する．第 2 の原因としては，平滑化パラメータが一定であったことが挙げられる．平滑化パラメータはマスター問題の近似精度と微分可能性のトレードオフの度合いに直結しており，小さすぎれば微分が困難となる一方，大きすぎれば近似誤差が生じる．これを改善する方法として，各繰返しごとに平滑化パラメータを改訂する方法 [9] が考えられる．その具体的実装や性能評価については，今後の課題としたい．

謝辞：本研究成果は，国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構 (NEDO) の委託業務 (JPNP18010) の結果得られたものです．

付　録

A.1　数値計算で用いた各路線上流端への流入率

§6 の数値計算で用いたパラメータおよび各路線の上流端への流入率を，それぞれ，表 **A·1** および表 **A·2** に示す：

表 **A·1:** 計算に用いたパラメータ

T	480[s]
X	1200[m]
ΔT	1[s]
u	40[km/h]
w	15[km/h]
ΔN	1[veh]
θ	0.0005
サイクル長	120[s]

表 **A·2:** 各路線の流入率

路線	流入率 [veh/s]	路線	流入率 [veh/s]
1	0.048	-1	0.044
2	0.0358	-2	0.0425
3	0.047	-3	0.082
4	0.012	-4	0.013
5	0.0886	-5	0.202
6	0.1	-6	0.0467
7	0.0997	-7	0.0494
8	0.0992	-8	0.0528

A.2　オフセット・スプリットに対応した信号現示の生成方法

ここでは，オフセットとスプリットの定義と信号現示へ変換するためのアルゴリズムについて述べる．オフセットは，青時間開始時間と基準とした時間の差，スプリットはサイクル長に対する青時間の長さであり，各信号のオフセット，スプリットは，o_k，$s_k \in [0, 1]$ で定義される．各信号のサイクル長 C_k，全赤時間 τ_k^{AR} は一定とする．各信号のオフセット，スプリットから信号現示 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ を生成する方法は，下記および図 **A·1** のように整理される：

Step 0 (配列の用意)　2T 次元配列を 2 つ用意し，一方を主路線の現示，もう一方をその道路に交差する副路線の現示とする．配列をサイクル長 C_k ごとに分割する．

Step 1 (スプリットによる青時間，赤時間の決定)　主路線青時間 $\tau_k^G = C_k s_k$，全赤時間 τ_k^{AR}，主路線赤時間 $\tau_k^R = C_k - \tau_k^G - 2\tau_k^{AR}$，全赤時間 τ_k^{AR} の順に配列を 0 と 1 で埋める．なお，青時間のとき 1，赤時間のとき 0 である．さらに，副路線青時間，赤時間を主路線と逆の値で埋める．

Step 2 (オフセットによるローテーション)　オフセット分（$C_k o_k$）だけ右方向に配列をローテーションする．

補助問題 [Aux($\hat{\boldsymbol{x}}$)] を解く際は，与えられたオフセット，スプリットの候補から，目的関数が最大となる補助解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を得る．

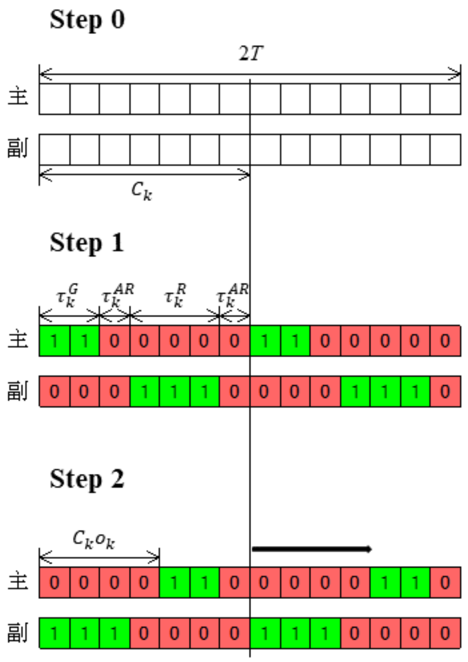


図 **A·1:** オフセット・スプリットから信号現示の生成

参考文献

[1] Daganzo, C. F.: Avariational formulation of kinematicwaves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39, No. 2, pp. 187-196, 2005.

[2] Daganzo, C. F.: Avariational formulation of kinematicwaves: Solution methods, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39, No. 10, pp. 934-950, 2005.

[3] Wu, X. and Liu, H. X.: A shockwave profile model for traffic flow on congested urban arterials, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 10, pp. 1768-1786, 2011.

[4] Han, K., Liu, H., Gayah, V. V., Friesz, T. L. and Yao, T.: A robust optimization approach for dynamic traffic signal control with emission considerations, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 70, pp. 3-26, 2016.

[5] Wada, K., Usui, K., Takigawa, T. and Kuwahara, M.: An optimization modeling of coordinated traffic signal control based on the variational theory and its stochastic extension, *Transportation Research Procedia*, Vol. 23, pp. 624-644, 2017.

[6] Benders, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik*, Vol. 4, No. 1, pp. 238–252, 1962.

[7] Chen, C. and Mangasarian, O. L.: A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems, *Computational Optimization and Applications*, Vol.5, No.2, pp.97-138, 1996.

[8] Chen, C. and Mangasarian, O. L.: Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems, *Mathematical Programming*, Vol.71, No.1, pp.51-69, 1995.

[9] Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problems, *Mathematical Programming*, Vol.86, No.3, pp.533-563, 1999.