

# 変分量子アルゴリズムを用いたCRRモデルによる原資産価格のシミュレーション

川又 裕也<sup>1,a)</sup> 矢実 貴志<sup>1</sup> 加藤 拓巳<sup>1</sup> 遠藤 傑<sup>2</sup> 鈴木 泰成<sup>2</sup> 香月 諒大<sup>1</sup>

**概要：**量子コンピュータによる高速計算は実社会の様々な課題を解決すると期待されている。これらの高速計算の多くはハードウェアが受けるノイズによって計算過程に生じるエラーを訂正しながら計算を行う FTQC (Fault Tolerant Quantum Computer) マシンを前提とするようなアルゴリズムに基づいている一方で、現在実現しているハードウェアは計算過程でエラーを訂正しない NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum Computer) マシンである。このため近年、より早期の実用化を目指してある程度エラーがあっても有用となりうるアルゴリズムの開発とその活用が様々な提案されている。そこで本研究では、金融工学において頻繁に用いられている、株式や債券といった原資産の価格の変動を二項に近似してシミュレーションを行う CRR (The Cox-Ross-Rubinstein) モデルを、NISQ 向けの変分アルゴリズムを利用して量子計算で行うモデルを提案する。

**キーワード：**量子コンピュータ, NISQ, 変分アルゴリズム, 金融工学

## 1. はじめに

昨今、量子コンピュータ実機の登場が話題になっている。IBM 社は自社で開発した量子コンピュータをクラウドで無料公開し、誰でも手軽に量子計算を行うことができる。ただし、これらの実機はノイズによって計算過程に発生するエラーを訂正しない NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum Computer) マシンであり、Shor のアルゴリズムといった計算量が指数的に削減できることが示されている量子アルゴリズムの多くは、エラーを訂正する機構を備えた FTQC (Fault Tolerant Quantum Computer) マシンを前提とする。

このため、近年はエラーが多少生じても有意義な結果を出力するアルゴリズムの開発が活発化している [1]。代表的なものは、変分原理を元に基底状態を得る VQE アルゴリズム [2] や、断熱計算を行う QAOA アルゴリズム [3] だろう。いずれも、量子状態に何らかの形でパラメータを入れ込み、古典コンピュータ側で最適化をかける古典量子ハイブリッドのアルゴリズムであることが特徴である。こ

では総称として変分量子アルゴリズムと呼ぶこととする。

また同時に、近年金融工学に量子計算を活用する研究が活発化している。金融工学では様々な計算モデルを扱うが、最も基本的な計算タスクは金融派生商品の価格決定であろう。そこではある確率過程のシミュレーションから各タイムステップで何かしらの期待値を計算する、ないしは確率微分方程式を解くといった計算を行うのだが、対象とする資産の数が増えたり複雑なモデルであると数値解析に計算負荷がかかる。ここで、各種の量子アルゴリズムを上手く使うことでこれらの計算負荷を削減できる可能性がある。

本研究では、変分量子アルゴリズムを利用することで株価や債券価格といった原資産価格のシミュレーションを NISQ マシンで行うモデルを提案する。原資産価格は金融工学で基本とされる多期間二項モデルである CRR (The Cox-Ross-Rubinstein) モデル [4] に従うものとし、変分量子アルゴリズムには Xiaosi Xu らの手法 [5] を用いる。数値実験を行い、このモデルが動作する規模を検証する。

## 2. 線形代数のための変分量子アルゴリズム

線形代数の問題を高速に解く手法は HHL (Harrow-Hassidim-Lloyd) アルゴリズムが有名であろう [6] [7]。ただし、この手法は量子回路が深く FTQC マシンであることを必要とする。そこで、Xiaosi Xu らは、より浅い量子

<sup>1</sup> NTT データ, 東京都江東区豊洲 3-3-9 豊洲センタービルアネックス, 135-8671

<sup>2</sup> NTT, 東京都武蔵野市緑町 3-9-11, 武蔵野研究開発センター, 180-8585

a) Yuya.Kawamata@nttdata.com

回路で NISQ マシンでも動く変分量子アルゴリズムを提案した [5].

## 2.1 行列の乗算

任意の量子状態  $|v_0\rangle$  に対して、スパースな行列  $M$  をかけて規格化することで、 $|v_M\rangle$  を得るとする。

$$|v_M\rangle = \frac{M|v_0\rangle}{\|M|v_0\rangle\|} \quad (2.1)$$

ただし、

$$\|M|v_0\rangle\| = \sqrt{\langle v_0|M^\dagger M|v_0\rangle}$$

$$M|v_0\rangle \neq 0$$

である。ここで、 $|v_M\rangle$  は、

$$H_M = I - \frac{M|v_0\rangle\langle v_0|M^\dagger}{\|M|v_0\rangle\|^2} \quad (2.2)$$

このハミルトニアン基底状態であり、基底エネルギーは 0 となる。基底状態を得るためには、従来の手法であれば量子位相推定などを用いるが、NISQ マシン向けには変分量子アルゴリズムを用いる。

まずは、量子状態に任意のパラメータを持つユニタリ行列をかけ、

$$|\phi(\vec{\theta})\rangle = U(\vec{\theta})|0\rangle \quad (2.3)$$

パラメータを入れ込んだ量子状態を用意する。このときの  $U(\vec{\theta})$  はしばしば ansatz と呼ばれる。さらに、この量子状態におけるハミルトニアンの期待値が最小になるようにパラメータの最適化を行う。

$$\vec{\theta}_{\min} = \arg \min_{\vec{\theta}} \langle \phi(\vec{\theta}) | H_M | \phi(\vec{\theta}) \rangle \quad (2.4)$$

このとき、変分原理に基づき  $|v_M\rangle = |\phi(\vec{\theta}_{\min})\rangle$  となる。この手法の興味深い点は、ハミルトニアンの基底エネルギーが 0 であるため、最適化が完了したことが確認できるという点だ。フィデリティは、

$$\| \langle \phi(\vec{\theta}_{\min}) | v_M \rangle \|^2 = 1 - E_M(\vec{\theta}_{\min}) \quad (2.5)$$

となるので、パラメータの最適化の際に打ち切りのエネルギーを指定することで、欲しい精度が達成できなさそうであれば最適化をあきらめて異なる初期値でやりなおすことも可能である。

本研究において、この最適化は、

$$\frac{\partial E_M}{\partial \theta_i} \approx \frac{E_M(\vec{\theta} + \delta \theta_i) - E_M(\vec{\theta} - \delta \theta_i)}{2\delta \theta_i}$$

$$\vec{\theta}_{i+1} = \vec{\theta}_i - a \nabla E_M(\vec{\theta}_i), \forall i = 0, 1, \dots, T \quad (2.6)$$

のようにして行った。このときの  $a$  はタイムステップ、 $T$  はステップの総数である。

## 2.2 一次方程式の解

任意の量子状態  $|v_0\rangle$  に対して、スパースな行列  $M$  の逆行列をかけて規格化することで、 $|v_M\rangle$  を得るとする。

$$|v_{M^{-1}}\rangle = \frac{M^{-1}|v_0\rangle}{\|M^{-1}|v_0\rangle\|} \quad (2.7)$$

ただし、

$$\|M^{-1}|v_0\rangle\| = \sqrt{\langle v_0|(M^{-1})^\dagger M^{-1}|v_0\rangle}$$

$$M^{-1}|v_0\rangle \neq 0$$

である。ここで、 $|v_M^{-1}\rangle$  は、

$$H_{M^{-1}} = M^\dagger(I - |v_0\rangle\langle v_0|)M \quad (2.8)$$

このハミルトニアンの基底状態であり、基底エネルギーは 0 となる。後は、2.1 節と同様に基底状態を求めればよい。

## 3. 金融工学の計算モデル

金融工学において、金融派生商品の価格付け（デリバティブ・プライシング）は主要な興味の対象である [4]。中でも有名な問題は、将来のあらかじめ定められた期日に、株式などの資産（原資産）を現時点で取り決めた価格で売買する「権利」を取引するオプション取引において、その「権利」の価格を決定するオプション・プライシングの問題である。オプション・プライシングはブラックショールズ方程式を利用して解析解を求めることができることもあるが、実務的には数値解析を要するケースも多く、高速計算のニーズが存在する。ここでは、それらをいくつか紹介しつつ、最も基本的な確率過程のモデルである CRR モデルを解説する。

### 3.1 数値計算を要するオプション・プライシング

オプションとは、非常に簡単な例で言えば、 $t$  日後に 0 日目の今の価格で株を買うことができる権利である。これはあくまで権利なので、株価が下がれば権利は破棄すれば良いし、株価が上がれば権利を執行してその差額分だけ儲けることができる。金融機関はこういったオプションを顧客に提供するわけだが、このオプションを無料で提供してしまうと顧客は「丸儲け」なので、金融機関側はこのオプション自体に値段をつけて顧客に売るということになる。これこそがまさにオプション・プライシングの問題である。また、ちょうど  $t$  日後に執行するかどうかを決めるものはヨーロピアン型、 $t$  日後以内にいつでも執行できるものはアメリカン型と呼ばれ、さらに株を買う権利をコール、売る権利をプットと区別する。このため、先ほどの例だと、特にヨーロピアン・コール・オプションと呼ぶことになる。

さて、このヨーロピアン・コール・オプションの価格をどう決めたら良いだろうか。直感的には、顧客がオプションによって発生する儲けの期待値を価格としてやればよい

(無裁定条件). 0日目の現在で価格  $S_0$  の株式が  $t$  日後に価格  $S_t$  になったとする. このとき, 0日目の時点で銀行は顧客にヨーロピアン・コール・オプションを  $Price$  円で売るとする. すると,

$$Price = p_t(S_t) \max(S_t - S_0, 0) \quad (3.1)$$

ここで,  $p_t(S_t)$  は価格  $S_t$  が従う確率分布である. ただし, 長期金利による割引は無視するなど, 非常に簡単な形式であることに注意したい. さらに, 株価の変動がブラックショールズモデルに従うとすれば,  $Price$  は二階の偏微分方程式であるブラックショールズ方程式に従い, これは拡散方程式として解くことが可能である. このように容易に解くことができるという点で, ヨーロピアン・オプションは金融工学において最も基本的なオプションとして知られている.

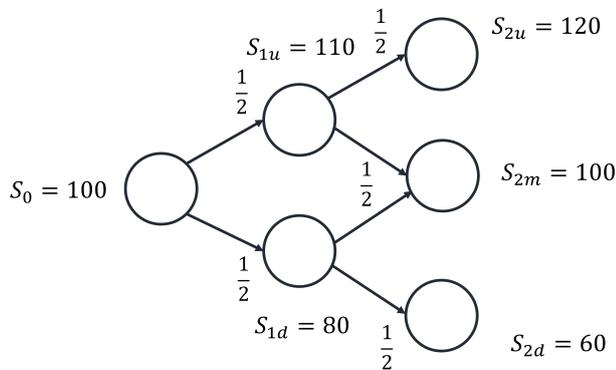


図 1 二項モデルによる株式変動の例

さて, 問題はアメリカン・プット・オプションである. 一般的にアメリカン・プット・オプションは  $t$  日目よりも前にオプションを執行する可能性が存在する. ここでも簡単な例を取り上げよう. 図 1 のような状況を考える. 株価  $S_0 = 100$  だった株式が  $1/2$  の確率で上昇し  $S_{1u} = 110$  に,  $1/2$  の確率で下降し  $S_{1d} = 80$  になるとする. 次時刻も同様に二項で変化する. さて,  $t = 2$  では, 各株価でのオプション執行による利益は,

$$V_2 = \max(S_0 - S_t, 0) \quad (3.2)$$

として,

$$\begin{aligned} V_{2u} &= 0 \\ V_{2m} &= 0 \\ V_{2d} &= 40 \end{aligned} \quad (3.3)$$

である. ここでは先ほどの例と異なりプット・オプションであることに注意したい. これらは実際に時刻  $t = 2$  で市場の株価がそれぞれの株価になったときのオプションの価値に相当するものであるといえるだろう. それでは  $t = 1$  のときはどうだろうか.

$$V_1 = \max(S_0 - S_t, 0) \quad (3.4)$$

として,

$$\begin{aligned} V_{1u} &= 0 \\ V_{1d} &= 20 \end{aligned} \quad (3.5)$$

であるはずなのだが, その一方で, オプションの価値についても直感的にはその価値は変動しないという考えから, 下半分の変動について,

$$\begin{aligned} V_{1d} &= \frac{1}{1+r} \left( \frac{1}{2} V_{2m} + \frac{1}{2} V_{2d} \right) \\ &= 19.8 \end{aligned} \quad (3.6)$$

も成り立つはずである. ここで, 長期金利  $r = 0.01$  の項を導入していることに特に注目したい. これは非負で, 項全体として時間が経つにつれてオプションの価値が下がっていくことを示す. わかりやすく言い換えれば, オプションを保有しているより, 他の長期国債などに投資をしていた方がその金利の分だけ儲けが発生するので, オプションをただ保有しているだけなのは機会損失であるという考え方に相当する. さて, (3.5) 式と (3.6) 式とを見比べてみると,  $t = 1$  で執行して得られる儲けより  $t = 2$  になるとオプションの価値が下がってしまうので,  $t = 1$  で株価が  $V_{1d}$  になってしまった時点で権利を執行したほうが「お得」であることがわかる.  $t = 3$  以降を考えても同様で,  $t = 1$  で執行したほうが良い.

さて, このような議論はアメリカン・プット・オプションで特徴的な事象である. このため, 解析的な解を得ることはできず, 必ず何かしらの数値解析を必要とする. よく知られた手法としては, 具体例で挙げたように, 原資産の価格の変動を二項に近似し, まずは  $2t + 1$  のそれぞれのノードでいきなり最終日のオプション執行による儲け, つまりオプションの価値  $V_t(S_t)$  を求めてやる. その後,  $V_{t-1}(S_{t-1})$  を求めてやるのだが, このとき, 式と式の二つでより低い方を採用する. このようにして, 「後ろ向きに」計算を進めることによって, 最終的に欲しい 0 日目でのオプションの価値, つまりオプション価格  $V_0$  を得ることができる.

ここでは詳細に一つの事例としてアメリカン・プット・オプションを取り上げたが, 他にもバリア・オプションやアジアン・オプションといったエキゾチック・オプションからも解析解が知られていないものも多く, またそもそも株価の変動がブラックショールズモデルに従わない確率ボラティリティモデル, 局所ボラティリティモデルなどを扱うとなると, 同様に数値解析を必要とする.

### 3.2 CRR モデル

前節で取り上げた株価変動の二項への近似は多期間二項モデルに相当する. なかでも,  $u = \frac{1}{2}$  などとして近似を行うモデルをここでは CRR モデルと呼ぶこととする. さて,

現時点で  $S_0$  の原資産価格は、 $\delta t$  後に確率  $p$  で割合  $u$  だけ増え、確率  $1-p$  で割合  $d$  だけ減るとする。このとき CRR モデルでは、確率  $p$  と割合  $u, d$  を、

$$u = \exp(\sigma\sqrt{\delta t})$$

$$d = \exp(-\sigma\sqrt{\delta t})$$

$$p = \frac{\exp(\mu\delta t) - d}{u - d}$$

として設定する。ここで、 $\sigma, \mu$  はそれぞれボラティリティ、ドリフトの項で、原資産固有のパラメータである。このような原資産価格のシミュレーションモデルは金融工学で幅広く受け入れられており、この過程を元にしてさらに様々な計算処理を行うことでプライシングを行うこととなる。(図 2)

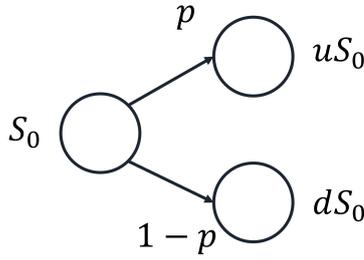


図 2 二項モデル

#### 4. 変分量子アルゴリズムの CRR モデルへの適用

数値解析を要する金融工学のモデルを量子計算で高速化するには既に様々な取り組みが存在する [8-11, 17, 18]. 最終的なプライシングまで行うには、大まかには原資産価格をシミュレーションした後期待値計算などを行うという 2 ステップになるのだが、いずれも深い量子回路になりがちで FTQC であることを必要とする。一方で、NISQ マシン向けの先行研究 [12-14] では、確率過程を三項モデルに近似し上手く確率と変動割合を設定することで一階の微分方程式として扱い、NISQ 向けのハミルトニアン・シミュレーションアルゴリズムを用いることで、原資産価格のシミュレーションを比較的浅い回路で行っている。しかし、この場合は株価の変動は正規分布となり、CRR モデルのように金融工学で一般的に扱われるブラック-ショールズモデルの対数正規分布と一致しないなど、拡張性にまだまだ課題が残る。

このため本研究では、金融工学で基本とされる CRR モデルによる原資産価格のシミュレーションを、直接 Xiaosi Xu らの手法で扱うことで NISQ マシンでより金融工学に近いモデルを提案し、柔軟なオプション・プライシングへの道筋をつける。また、このモデルはシンプルな帯行列の計算を対象とすることになるため、金融工学に限らず多く

の分野への活用が見込める。

まず、CRR モデルを線形代数の問題として考える。原資産が取りうる価格を基底とし、その存在確率をベクトル  $|v_0\rangle$  の値とする。すると、 $\delta t$  後の原資産の存在確率は  $M|v_0\rangle$  となり、このときの  $M$  は、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & & & \\ p & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1-p \\ & & & p & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

のような帯行列となるので、(2.1) 式を利用することができる。ただし、簡単のために境界条件を無視していることに注意したい。

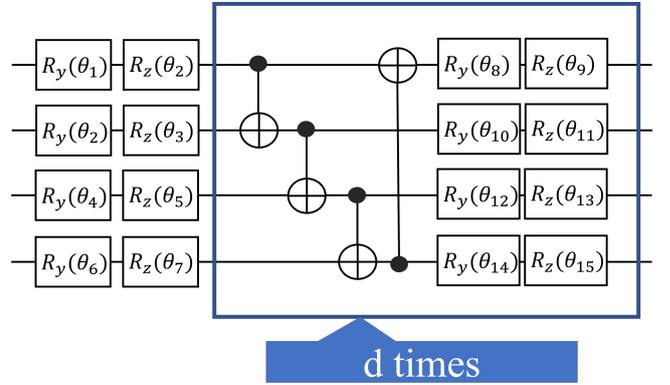


図 3 ansatz. 枠の中の回路を  $d$  回繰り返す。ただし、繰り返しのときにそれぞれの回転ゲートは別のパラメータを設定する。

ここからは、各式を具体的に示す。(2.3) 式の  $U(\vec{\theta})$  に相当する ansatz は、図 3 のように設定した。次に、ハミルトニアン期待値は、

$$\langle \phi(\vec{\theta}) | H_M | \phi(\vec{\theta}) \rangle = \langle \phi(\vec{\theta}) | \phi(\vec{\theta}) \rangle - \frac{\langle 0 | U_i^\dagger(\vec{\theta}) M U_{i-1}(\vec{\theta}) | 0 \rangle \langle 0 | U_{i-1}^\dagger(\vec{\theta}) M^\dagger U_i(\vec{\theta}) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{i-1}^\dagger(\vec{\theta}) M U_{i-1}(\vec{\theta}) | 0 \rangle} \quad (4.2)$$

それぞれの項は Hadamard test などでも求める。このとき、 $i$  番目のステップにおいて前のステップで得た結果の量子状態を次のステップでの初期状態とする。このため、

$$U_i(\vec{\theta}) = U(\vec{\theta}_{param}) U_{i-1}(\vec{\theta}_{const}) \quad (4.3)$$

とする。 $i$  番目のステップではそれより以前のパラメータは固定とする。最初のステップでの初期状態は原資産価格の初期条件の基底の振幅を 1 にすればよいので、単に  $X$  ゲートを用いればよい。

さらに、帯行列の  $M$  は、

$$M = \sum_{i=0}^{2^n-1} p|i+1\rangle\langle i| + (1-p)|i-1\rangle\langle i| \quad (4.4)$$

のように表すことができる．先行研究 [15] によれば，

$$V_+(n) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} |i+1\rangle\langle i| \quad (4.5)$$

$$V_-(n) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} |i-1\rangle\langle i| \quad (4.6)$$

これらは図 4 のような回路で，実装可能なゲートに変換しても  $O(n)$  である．ただし，ここでも境界条件を考慮していないことに注意したい．以上の変換をまとめれば，CRR モデルを Xiaosi Xu らの手法で扱うことが可能である．

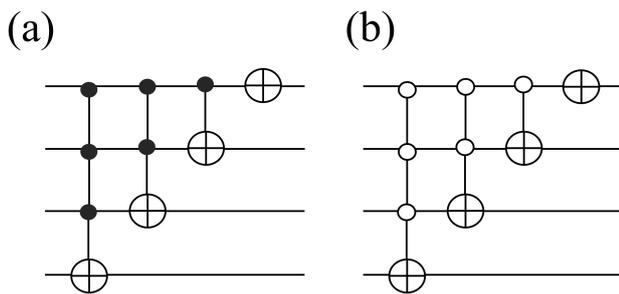


図 4 (a)  $V_+$  と，(b)  $V_-$  の実装例．

## 5. 数値実験

変分量子アルゴリズムにおいて，提案した ansatz で精度の良い解を得ることができるかは担保されていない．多くの場合，ansatz のパラメータ数を増やすことで良い解を得ることができる一方で，同時に最適化における計算量の増大を引き起こす．このため，ansatz と合わせてどの程度モデルが有効に機能するかを把握することは重要な問題である．本研究では，提案モデルを Qulacs [16] で実装して動作するか確認し，ansatz の深さを変えながら結果の精度の検証を行った．

(2.5) 式により，欲しい解の精度にあたるフィデリティを設定することができる．したがって，(2.6) 式でパラメータの更新を行う上限回数を決めて，その回数の中に設定したフィデリティを越えなければ最適化の失敗として打ち切る．本研究では 100 回を上限とし，そのときにフィデリティを越えなければ ansatz が不十分でモデルは有効に動作しなかったものと見なす．

実機のノイズを考慮しない実装を行ったところ，提案したモデルは動作した．ここで，図 5 に数値実験の結果を示す．ansatz の深さが 1 で 4 タイムステップでのそれぞれのフィデリティが 99 % 以上を要求した際には，10 回の実験を行ったがどれも途中で最適化を打ち切ることとなった．また，ansatz の深さを 5 にしてパラメータを増やせば，10 回中 8 回で全てのタイムステップでのフィデリティが 99 % を達成できたが，パラメータを単純に増やせば必ず高

|         | Fidelity 99% | Fidelity 95% | Fidelity 90% |
|---------|--------------|--------------|--------------|
| 1 depth | 0/10         | 3/10         | 5/10         |
| 2 depth | 4/10         | 6/10         | 10/10        |
| 3 depth | 6/10         | 10/10        | 10/10        |
| 4 depth | 8/10         | 10/10        | 10/10        |
| 5 depth | 8/10         | 10/10        | 10/10        |

図 5 数値実験結果．4 量子ビットで  $16 \times 16$  の行列  $M$  を扱う．ansatz の深さ  $d$  に対して，CRR モデルを 4 タイムステップ進めてたときのそれぞれの結果と解析解との Fidelity が，全て設定した Fidelity 99 %，95 %，90 % より大きければモデルが最後まで動作したものとみなす．各深さと Fidelity で 10 回実験を行う．パラメータは， $dt = 0.1$ ， $\sigma = 0.1$ ， $\mu = 0.1$  である．

いフィデリティが達成できるわけではなく，どちらかという最適化のパラメータ設定の方が重要になると考えられる．また，要求するフィデリティを 95 %，90 % に緩和すればより達成しやすくなり，最適化にも余裕が出てきてパラメータを増やすことが特に有効に働くと考えられる．他方で，高いフィデリティを担保しながら古典コンピュータで扱えない規模の行列の演算を行う量子ビット数を扱うとなるとモデル自体が動作しないと考えられ，有用性としては厳しい結果となった．

## 6. まとめ

本研究では，株式や債券といった原資産の価格の変動を二項に近似してシミュレーションを行う CRR モデルを，NISQ 向けの変分量子アルゴリズムである Xiaosi Xu らの手法を利用して量子計算で行うモデルを提案した．数値実験を行い，モデルの動作を確認した．また，結果に高い Fidelity を要求する際には最適化のパラメータ設定が重要であり，低い Fidelity を要求する際にはパラメータを増やすことが有効になるということを示した．一方で，古典コンピュータで扱えないほど大規模な行列を扱う量子ビット数で十分な Fidelity を確保するとすると，おそらくモデル自体が動作しないと考えられ，採用する手法自体を見直す必要がある．NISQ 向けに限らない方針として，本研究で扱ったような帯行列は量子特異値分解等を用いてその固有空間で演算を進めることで高速に計算することが可能であると見込めるため，今後このような手法を利用しつつ最終的なプライシングまで行う計算モデルを検討したい．

## 参考文献

- [1] Cerezo, Marco, et al. "Variational quantum algorithms." Nature Reviews Physics 3.9 (2021): 625-644.
- [2] Peruzzo, Alberto, et al. "A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor." Nature communications 5.1 (2014): 1-7.
- [3] Farhi, Edward, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. "A quantum approximate optimization algorithm." arXiv preprint arXiv:1411.4028 (2014).
- [4] S.E. シュリーヴ原著：ファイナンスのための確率解析 1，

丸善出版 (2012)

- [5] Xu, Xiaosi, et al. "Variational algorithms for linear algebra." *Science Bulletin* 66.21 (2021): 2181-2188.
- [6] Harrow, Aram W., Avinatan Hassidim, and Seth Lloyd. "Quantum algorithm for linear systems of equations." *Physical review letters* 103.15 (2009): 150502.
- [7] Childs, Andrew M., Robin Kothari, and Rolando D. Somma. "Quantum algorithm for systems of linear equations with exponentially improved dependence on precision." *SIAM Journal on Computing* 46.6 (2017): 1920-1950.
- [8] Stamatopoulos, Nikitas, et al. "Option pricing using quantum computers." *Quantum* 4 (2020): 291.
- [9] Chakrabarti, Shouvanik, et al. "A threshold for quantum advantage in derivative pricing." *Quantum* 5 (2021): 463.
- [10] Woerner, Stefan, and Daniel J. Egger. "Quantum risk analysis." *npj Quantum Information* 5.1 (2019): 1-8.
- [11] Orus, Roman, Samuel Mugel, and Enrique Lizaso. "Quantum computing for finance: Overview and prospects." *Reviews in Physics* 4 (2019): 100028.
- [12] Kubo, K., et al. "Variational quantum simulations of stochastic differential equations. arXiv 2020." arXiv preprint arXiv:2012.04429.
- [13] Alghassi, Hedayat, et al. "A variational quantum algorithm for the Feynman-Kac formula." arXiv preprint arXiv:2108.10846 (2021).
- [14] Endo, Suguru, et al. "Variational quantum simulation of general processes." *Physical Review Letters* 125.1 (2020): 010501.
- [15] Li, Xiaoyu, et al. "A class of efficient quantum incrementer gates for quantum circuit synthesis." *International Journal of Modern Physics B* 28.01 (2014): 1350191.
- [16] Suzuki, Yasunari, et al. "Qulacs: a fast and versatile quantum circuit simulator for research purpose." *Quantum* 5 (2021): 559.
- [17] Kaneko, Kazuya, et al. "Quantum pricing with a smile: Implementation of local volatility model on quantum computer." *EPJ Quantum Technology* 9.1 (2022): 1-32.
- [18] Miyamoto, Koichi. "Bermudan option pricing by quantum amplitude estimation and Chebyshev interpolation." *EPJ Quantum Technology* 9.1 (2022): 1-27.