拡張削除ニム

安福 智明[1,a)]　坂井公[3,b)]　篠田正人[2,c)]　末續鴻輝[1,d)]

概要：削除ニム（Delete Nim）とは，2 つの石の山が与えられて，プレイヤーはいずれかの山を選んで削除し，残りの山を分割して相手に手番を渡すという，Nim の変種である．着手できなくなった方が負け（正規形）として考えた場合，与えられた局面が必勝局面であるかどうかの判定や，その局面の Sprague-Grudy 数の値を効率よく求める方法が知られている．本研究では，山の数を 3 つ以上にした場合について，いくつかのルールを提案し，それぞれについて，必勝局面であるかどうかを効率よく判定する方法を紹介する．

キーワード：組合せゲーム理論，ニム，削除ニム

1. はじめに

伏せられた情報が無く，偶然に左右されないゲームを組合せゲームと呼ぶ．

削除ニム（Delete Nim）は，組合せゲームの 1 つである．はじめに 2 つの石の山が与えられ，プレイヤーはいずれかの山を選んで削除し，残りの山を分割して相手に手番を渡すという，Nim[2] の変種である．着手できなくなった方が負け（正規形）として考えた場合，与えられた局面の必勝判定や，その局面の Sprague-Grudy 数の値を効率よく求める方法が安福と末續 [1] によって完全に解析されており，計算過程で OR 演算や 2 進付値などが現れる，興味深いゲームであることが知られている．

また，山の数を 3 つ以上にした場合については，篠田 [5] によって，一般化された削除ニムについての 2 つのルール付けが与えれており，1 つは Single-delete Nim として，もう 1 つは All-but one delete Nim として知られている．3 山の Single-delete Nim については坂井 [3] によって，All-but one delete Nim と 4 山の Single-delete Nim については，篠田 [5] によってそれぞれ必勝判定が解析されている．

本稿では，[5] とは別の観点から，削除ニムを拡張したルールの提案を行い，「半数以下削除ニム」「半数削除ニム」「$((k-1)/k)n$ 削除ニム」のそれぞれの局面の必勝判定の解析について報告する．

1　国立情報学研究所
2　奈良女子大学
3　神奈川大学
a)　buku3416@gmail.com
b)　gummosakai@gmail.com
c)　shinoda@cc.nara-wu.ac.jp
d)　suetsugu.koki@gmail.com

2. 準備

この章では本研究の内容に必要な知識について簡単に紹介する．

2.1 組合せゲーム理論

組合せゲームとは，伏せられた情報が無く，偶然に左右されないゲームのことである．詳細については ([4], [6], [10]) などの文献を参照されたい．本研究では組合せゲームであり，かつ以下のような特徴を持つゲームを扱う．

- 2 人のプレイヤーが交互に手を打つ．
- ゲームは有限回の着手で終了し，ループは含まない．
- 後続局面の数は有限個．
- 最後に手が打てなくなったプレイヤーの負け（正規形）．
- プレイヤーが着手可能な選択肢の集合は等しい．

このような特徴を持つゲームを正規形ショート不偏ゲーム（以下，不偏ゲームと呼ぶ）という．削除ニムは不偏ゲームである．

定義 2.1. 局面において，先手（次の手番のプレイヤー）が必勝戦略を持つ局面を $\mathcal{N}$ 局面，後手（直前の手番のプレイヤー）が必勝戦略を持つ局面を $\mathcal{P}$ 局面と呼ぶ．

不偏ゲームの各局面は，$\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面のどちらかに分類できることが知られている．

命題 2.2 ([4])**.** 不偏ゲームの局面全体を $\mathcal{I}$ とし，$G \in \mathcal{I}$ を不偏ゲームの局面とする．また，$\mathcal{E} \subset \mathcal{I}$ を終了局面全体とする．$\mathcal{I}$ を 2 つの集合 $\mathcal{I} = N \cup P$ $(N \cap P \neq \emptyset)$ に分割し，以下の 3 条件が満たされるならば，P は $\mathcal{P}$ 局面の全体，N

は，$\mathcal{N}$ 局面の全体と一致する．
(1) $P \supset \mathcal{E}$
(2) $G \in N$ ならば，$G' \in P$ となるような，局面 G から一手で遷移できる局面 G' が存在する．
(3) $G \in P$ ならば，$G' \in P$ となるような，局面 G から一手で遷移できる局面 G' は存在しない．

本稿では，断りなく証明に命題 2.2 を用いることがある．

2.2 p 進付値

非負整数全体を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$，正整数全体を $\mathbb{Z}_{>0}$ とおく．

定義 2.3 (p 進付値)**.** p を素数とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の p 進付値 $v_p(n)$ を以下で定義する．

$$v_p(n) = \begin{cases} \max\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : p^l \mid n\} & (n \neq 0) \\ \infty & (n = 0). \end{cases}$$

すなわち，n の p 進付値とは，n を p で割ることができる回数の最大数のことである．なお，本稿では 2 進付値のみを扱う．2 進付値について，以下の性質が知られている．

命題 2.4. $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ かつ $v_2(z) \geq 1$ であるとき，任意の非負整数 $k < v_2(z)$ に対し，$x + y = z$ かつ $v_2(x) = v_2(y) = k$ を満たすような $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在する．

命題 2.4 を満たす x, y の例として，$x = z - 2^k$, $y = 2^k$ があげられる．

3. 削除ニム

この章では削除ニムのルールや必勝判定について，そして一般化された削除ニムのルールについて紹介する．削除ニムに関して，([1],[8],[9]) において 2 つのルールが記されているが，どちらもゲームの遷移は同じであり，ゲームとして同型であるため，今回は [1] において VDN と呼ばれているゲームのルールを採用する．なお，本稿で登場する各種の削除ニムは，分割する際，どの山にも必ず 1 個以上の石が含まれるものとする．また，着手後の山の数は常に一定である．

定義 3.1 (削除ニム)**.** いくつかの石で構成される 2 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- 1 山を選び，その山を削除する．
- 残りの 1 山を 2 つの山に分割する．

定理 3.2 ([7])**.** 削除ニムにおいて，x, y がともに奇数であるとき，局面 (x, y) は $\mathcal{P}$ 局面であり，それ以外は $\mathcal{N}$ 局面である．

[1] では削除ニムの必勝判定だけでなく，Sprague-Grudy 数の閉じた式まで判明している．

また，削除ニムの一般化として以下が知られている．

定義 3.3 (3 山削除ニム)**.** いくつかの石で構成される 3 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- 1 つの山を選び，その山を削除する．
- 残りの 2 山のうち，1 つの山を選んで 2 つの山に分割する．

[3] では，3 山削除ニムの必勝判定が完全に解析されている．

定義 3.4 (Single-delete Nim)**.** いくつかの石で構成される n 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- 1 つの山を選び，その山を削除する．
- 残りの $n - 1$ 山のうち，1 つの山を選んで 2 つの山に分割する．

[5] では，4 山 Single-delete Nim の必勝判定が完全に解析されている．

定義 3.5 (All-but one delete Nim)**.** いくつかの石で構成される n 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- $n - 1$ 個の山を選び，それらの山を削除する．
- 残りの 1 山を n 個の山に分割する．

[5] では，All-but one delete Nim の必勝判定が完全に解析されている．

4. 削除ニムの拡張

この章では [5] と異なる観点から，ルールを拡張した削除ニムについて紹介し，それらの必勝判定の解析について報告する．

4.1 半数以下削除ニム

定義 4.1 (半数以下削除ニム)**.** いくつかの石で構成される n 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- $k \leq \frac{n}{2}$ となる正整数 k を選び，k 山を削除する．
- 残った $n - k$ 山から k 山を選び，各山を 2 つの山に分割する．

特に，$n = 2$ のとき 2 山削除ニム，$n = 3$ のとき 3 山削除ニムとなる．

定理 4.2. 半数以下削除ニムの山の石の個数を $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とする．$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が $\mathcal{P}$ 局面となる

必要十分条件は，以下のいずれかを満たすことである．
- n が奇数のとき，$v_2(a_1) = v_2(a_2) = \cdots = v_2(a_n)$.
- n が偶数のとき，$v_2(a_1) = v_2(a_2) = \cdots = v_2(a_n) = 0$. すなわち，山はすべて奇数山である．

Proof. (i) n が偶数のとき，全てが奇数山であれば，どのように分割しても偶数山が生じる．偶数山が $k \le \frac{n}{2}$ 個ある場合は，偶数山をすべて分割して奇数山には手をつけないことで，すべて奇数山にすることができる．偶数山が $k > \frac{n}{2}$ 個あれば，適当に $\frac{n}{2}$ 個の偶数山を選び分割して，すべて奇数山にすることができる．

(ii) n が奇数のとき，$v_2(a_1) = v_2(a_2) = \cdots = v_2(a_n)$ の場合，どのように分割しても，分割された山の少なくとも一方の山の 2 進付値は，分割する前の元の山の 2 進付値とは異なるので，着手後のそれぞれの山の 2 進付値はすべて等しくはならない．$v_2(a_1) \le v_2(a_2) \le \cdots \le v_2(a_n)$ かつ $v_2(a_1) \ne v_2(a_n)$ の場合，命題 2.4 を用いて示すことができる．2 進付値が $v_2(a_1)$ より大きい山が $k \le \frac{n}{2}$ 個ある場合は，k 個すべてを選び，2 進付値が $v_2(a_1)$ となる 2 つの山に分割することができる．また，2 進付値が $v_2(a_1)$ より大きい山が $k > \frac{n}{2}$ 個ある場合は，適当に $\frac{n-1}{2}$ 個の 2 進付値が $v_2(a_1)$ より大きい山を選び分割し，すべての山の 2 進付値が $v_2(a_1)$ となるようにできる． □

4.2 半数削除ニム

定義 4.3 (半数削除ニム)．いくつかの石で構成される $2n$ 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- n 個の山を選び，それらの山を削除する．
- 残りの各山を 2 つの山に分割する．

特に，$n = 1$ のとき 2 山削除ニムとなる．

以下では偶数個の石がある山を**偶数山**，奇数個の石がある山を**奇数山**と呼ぶ．

定理 4.4. 山の石の個数を小さい順に $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ とする．

$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ が $\mathcal{P}$ 局面となる必要十分条件は，以下の 2 つの条件をともに満たすことである．

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ はすべて奇数である．
(2) a_{n+1} より大きい最小の 2 のべき乗を 2^m とする．l ($l > n+1$) に対し，a_l が偶数であるとき，$a_l \ge 2^m$ である．

この定理は，後に述べる定理 4.8 の特別な場合であるが，わかりやすさのためにここで証明を述べておく．

Proof. 与えられた局面集合を P，補集合を N と置く．P に属する局面から P に属する局面へ一手で遷移できないこと，および N に属する局面から必ず一手で P に属する局面に遷移できることを示す．

(i) P に属する局面から P に属する局面へ一手で遷移できないこと．
局面 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ が P に属するとする．A から一手で得られる局面を $A' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2n})$ とする．1 つの奇数山を分割して得られる奇数山は 1 つであることに注意する．$(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ がすべて奇数であるとき，奇数山は n 個しか得られないため A' は明らかに N に属する．よって，a_l ($l > n+1$) のうち，少なくとも 1 つ以上は 2^m 以上の偶数であると仮定してよく，その偶数山を分割して 2 つの奇数山にする場合を考える．このとき，少なくとも片方は 2^{m-1} より大きくなる．一方，山を n 個選ばなければならないので，$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ のうち 1 つ以上は奇数と偶数に分けることになり，このとき得られる偶数はいずれも 2^m 未満となる．したがって，(2) の条件を満たすような手を打つことはできず，P に属する局面から P に属する局面に一手で遷移することはできない．

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ のいずれかが偶数のとき，P に属する局面へ一手で遷移できること．
局面 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ が N に属するとする．ある a_i ($1 \le i \le n+1$) が偶数であるとする．このとき，$a_i, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots, a_{2n}$ を分割する着手を考える．$a_i = 4q+2$ ($q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$) のとき，$b = 2q+1$ と $c = 2q+1$ に分割する．$a_i = 4q$ のとき，$b = 2q-1$ と $c = 2q+1$ に分割する．このとき，$b, c < 2^m \le a_i$ となる m が存在する．また，$a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots, a_{2n}$ は $(1, a_{n+2}-1), (1, a_{n+3}-1), \ldots, (1, a_{2n}-1)$ と分割する．このとき，小さい順に $n+1$ 個の $(1, 1, \ldots, 1, b, c)$ はいずれも奇数であり，かつ $j > n+1$ に対して a_j が奇数であるときは $2^m \le a_i \le a_j - 1$ となるので，この局面は P に属する．

(iii) $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ が奇数であり，最も小さい偶数が 2^m 未満のとき，P に属する局面へ一手で遷移できること．
$i > n+1$ に対して，$a_i < 2^m$ かつ a_i が偶数であるとする．このとき，$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$ を分割する着手を考える．$a_i = 4q+2$ ($q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$) のとき，$b = 2q+1$ と $c = 2q+1$ に分割する．$a_i = 4q$ のとき，$b = 2q-1$ と $c = 2q+1$ に分割する．$a_i < 2^m$ であるので，$b, c < 2^{m-1} \le a_{n+1} - 1$ である，a_i 以外の a_j ($n+1 \le j \le 2n$) は $(1, a_j - 1)$ と分割する．このとき小さい順に $n+1$ 個の $(1, 1, \ldots, 1, b, c)$ はいずれも 2^{m-1} 未満の奇数であり，かつ $2^{m-1} \le a_{n+1} - 1 \le a_{n+2} - 1 \le \cdots \le a_{2n} - 1$ であるので，この局面は P に属する． □

4.3 $\frac{k-1}{k}n$ 削除ニム

定義 4.5 ($\frac{k-1}{k}n$ 削除ニム)**.** いくつかの石で構成される kn 個の山がある．2 人のプレイヤーはそれぞれの手番で，以下の 2 つの操作を続けて行う．
- $(k-1)n$ 個の山を選び，それらの山を削除する．
- 残りの n 山をそれぞれ k 個の山に分割する．

特に，$k=2$ のとき半数削除ニムとなる．

この削除ニムの必勝判定のために，半数削除ニムにおける奇数山，偶数山の概念の拡張として，以下の通り，亜奇数山，亜偶数山を定義する．

定義 4.6. 正の整数のうち，$k(k-1)$ で割った余りが 1 以上 $k-1$ 以下のものを**亜奇数**，それ以外の正の整数を**亜偶数**とする．石の数が亜奇数である山を**亜奇数山**，石の数が亜偶数である山を**亜偶数山**と呼ぶ．

特に，$k=2$ のとき，亜奇数と亜偶数は通常の奇数と偶数の概念と一致する．

補題 4.7.
(1) 亜奇数を k 個の亜奇数に分割することはできない．
(2) k 以上 $k(k-1)$ 以下の整数 x は，すべて 1 以上 $k-1$ 以下である k 個の整数に分割できる．
(3) k^m 未満の亜偶数 y は，すべて k^{m-1} 未満である k 個の亜奇数に分割できる．

Proof. (1) 亜奇数を k 個の亜奇数に分割できると仮定し，分割後の亜奇数を $k(k-1)$ で割った余りを k 個すべて足し合わせる．すると，その合計は k 以上 $k(k-1)$ 以下となるため，分割前の元の数が亜奇数であることに矛盾する．

(2) x を k で割った商を p, 余りを q とすると，$1 \le p \le k-1$ である．$p < k-1$ のとき，x は q 個の $p+1$ と，$k-q$ 個の p に分割できる．$p = k-1$ のとき，$q = 0$ であるので，x は k 個の p に分割できる．

(3) $k^m - k$ が $k(k-1)$ で割り切れるので，k^m を $k(k-1)$ で割った余りは k である．よって，k^m 未満で最大の亜偶数は $k^m - k$ である．よって $m \le 2$ のときは (2) で示せているので，以下では $m \ge 3$ とする．

$$k^m - k = \frac{k(k^{m-2}-1)}{k-1}k(k-1) + k(k-1)$$

であり，$(k^{m-2}-1)/k-1$ が整数であることに注意すれば，k^m 未満の亜偶数 y を

$$y = \alpha k(k-1) + \beta$$

(ただし，$\alpha \le \frac{k(k^{m-2}-1)}{k-1}$, $k \le \beta \le k(k-1)$)

と表すとき，α を $(k^{m-2}-1)/(k-1)$ 以下の整数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ に分割し，β を (2) によって，1 以上 $k-1$ 以下の整数 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ に分割すると，$1 \le i \le k$ に対して，$\gamma_i = \alpha_i k(k-1) + \beta_i$ を定めれば，$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ はすべて亜奇数による y の分割であり，

$$\gamma_i \le \frac{k^{m-2}-1}{k-1}k(k-1) + k - 1 < k^{m-1}$$

が成り立つ． □

この補題を用いて，定理 4.4 の証明中の奇数山と偶数山をそれぞれ亜奇数山と亜偶数山に置き換えることで，$((k-1)/k)n$ 削除ニムの必勝判定が以下の通り可能となる．

定理 4.8. 山の石の個数を小さい順に $a_1, a_2, \ldots, a_{kn}$ とする．

$a_1, a_2, \ldots, a_{kn}$ が $\mathcal{P}$ 局面となる必要十分条件は，以下の 2 つの条件をともに満たすことである．
(1) $a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)n+1}$ はすべて亜奇数である．
(2) $a_{(k-1)n+1}$ より大きい最小の k のべき乗を k^m とする．l $(l > (k-1)n+1)$ に対し，a_l が亜偶数であるとき，$a_l \ge k^m$ である．

Proof. 与えられた局面集合を P，補集合を N と置く．P に属する局面から P に属する局面へ一手で遷移できないこと，および N に属する局面から必ず一手で P に属する局面に遷移できることを示す．

(i) P に属する局面から P に属する局面へ一手で遷移できないこと．
$(k-1)n$ 個の山を選んで削除したあと，残りの n 個の山がすべて亜奇数山であれば，P に属する局面に分割することはできない（各山から高々 $k-1$ 個の亜奇数山しか作れない）．よって，少なくとも 1 つの石の数が k^m 以上の亜偶数山を k 個の亜奇数山に分割する必要がある．この亜奇数山のうち少なくとも 1 つは k^{m-1} 以上の石の数を持つ．一方，$a_1, \ldots, a_{(k-1)n+1}$ の山から 1 つ以上の山を分割しなければならないが，ここから生じる亜偶数山の石の数は k^m 未満であるため，P に属する局面から P に属する局面へ一手で遷移することはできない．

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)n+1}$ のいずれかが亜偶数のとき，P に属する局面へ一手で遷移できること．
ある a_i $(1 \le i \le (k-1)n+1)$ が亜偶数であるかつ，ある m $(m \ge 2)$ について $k^{m-1} \le a_i < k^m$ であるとする．$a_i, a_{(k-1)n+2}, \ldots, a_{kn}$ を以下のように分割する．補題 4.7 から，a_i は k^{m-1} 未満の k 個の亜奇数に分割できる．一方，a_j $(j \ge (k-1)n+2)$ については，a_j が亜偶数の場合は，$a_j = \alpha k(k-1) + \beta$ $(k \le \beta \le k(k-1))$ の形で表したとき β

を 1 以上 $k-1$ 以下の k 個の整数 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ に分割し，P に属する局面 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}, \alpha k(k-1)+\beta_k)$ に移すことができる．a_j が亜奇数の場合は，$(1, 1, \cdots, 1, a_j-(k-1))$ と分割できる．ここで，$k^{m-1} \leq a_i < a_j$ かつ a_j が亜奇数のとき，$a_j-(k-1) \geq k^{m-1}$ である．したがって，いずれの場合も分割後の局面は P に属する．

(iii) $a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)n+1}$ が亜奇数であり，最も小さい亜偶数が k^m 未満であるとき，P に属する局面へ一手で遷移できること．
ある m $(m \geq 2)$ について $k^{m-1} \leq a_{(k-1)n+1} < k^m$ であるかつ，ある a_i $(i > (k-1)n+1)$ が亜偶数であるかつ，$a_i < k^m$ とする．$a_{(k-1)n+1}, a_{(k-1)n+2}, \ldots, a_{kn}$ を以下のように分割する．補題 4.7 から，a_i を k^{m-1} 未満の k 個の亜奇数に分割できる．残りの a_j $((k-1)n+1 \leq j \leq kn$ かつ $j \neq i$）については，(ii) と同様に，a_j が亜偶数なら $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}, \alpha k(k-1)+\beta_k)$ と k 個の亜奇数に分割し，a_j が亜奇数なら $(1, 1, \ldots, 1, a_j-(k-1))$ のように分割する．(ii) と同様にこれらの分割後の局面は P に属する． □

5. まとめ

本稿では，削除ニムを拡張したルールの提案を行い，「半数以下削除ニム」「半数削除ニム」「$((k-1)/k)n$ 削除ニム」のそれぞれの局面の必勝判定について解析した．

今後，n 個の山から k 個 $(1 \leq k \leq n-1)$ の山を削除し，残りの $n-k$ 山を分割して n 個の山にする他のタイプのゲームについて，解析を進めたい．また，本研究で使用した亜奇数や亜偶数の性質について，他に応用があるかどうかを調べたい．

参考文献

[1] T. Abuku and K. Suetsugu：Delete Nim, Journal of Mathematics, Tokushima University **55**, 75-81 (2021).
[2] C. L. Bouton：Nim, a game with a complete mathmatical theory, Ann. of math. **3**, 35-39 (1902).
[3] 坂井公：数学でピザを切り分ける！パズルの国のアリス 4，日経サイエンス社，59-63 (2021).
[4] 佐藤文広：石取りゲームの数学，数学書房 (2014).
[5] 篠田正人：Delete Nim の一般化と勝敗判定，情報処理学会研究報告，Vol.2022-GI-47，No.5，1-8 (2022).
[6] A. N. Siegel：Combinatorial Game Theory，American Mathematical Society (2013).
[7] Z. Stankova and T. Rike, editors：A Decade of the Berkeley Math Circle, American Mathematical Society, 159 (2008).
[8] 末續鴻輝：不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol.2019-GI-41，No.22，1-7 (2019).
[9] 末續鴻輝：詰め不偏ゲーム/組合せゲーム理論でゲームを解く，数学セミナー 2022 年 2 月号，26-31 (2022).
[10] 末續鴻輝，安福智明：組合せゲームとその数学的構造，システム/制御/情報，Vol.65，No.10，391-396 (2021).