

実対称定値一般固有値問題の下端側固有対を少数求めるためのフィルタの伝達関数を極がすべて実数である低次の有理関数と Chebyshev 多項式の合成として構成する試み

村上 弘^{1,a)}

概要：行列の実対称定値一般固有値問題に対して、フィルタを用いて固有値が下端付近の比較的少数の固有対の近似を求める。本報告ではフィルタは少数のレゾルベントの線型結合と Chebyshev 多項式を合成したものである。それに対応するフィルタの伝達関数は、低次の有理関数と Chebyshev 多項式の合成になり、その有理関数は無限遠で有界であって重複する極を持たない。もしもその有理関数の極をすべて最小固有値より小さい実数にできれば、用いるすべてのレゾルベントのシフトも最小固有値より小さい実数になり、レゾルベントの作用を与える連立 1 次方程式の係数行列は実対称正定値になる。そこで本報告では、ある程度良い特性を持つフィルタの伝達関数をすべての極が最小固有値より小さい実数である低次の有理関数と Chebyshev 多項式の合成によりうまく構成する方法について検討する。

キーワード：有理関数, フィルタ, 固有値問題, レゾルベント, 伝達関数, 実数シフト, Remez 法

A Study of Construction of the Filter to Solve Lower Eigenpairs of a Real Symmetric-Definite Generalized Eigenproblem Whose Transfer Function Is a Composition of a Chebyshev Polynomial and a Lower Degree Rational Function Whose Poles Are All Real

Abstract: For a real symmetric-definite generalized eigenproblem of matrices, we use a filter to approximate a small number of eigenpairs whose eigenvalues are near the lower-end. In this report, we assume the filter is a composition of a linear combination of a few resolvents and a Chebyshev polynomial. The transfer function which corresponds to the filter is a composition of a rational function of a lower degree and the Chebyshev polynomial, the rational function is finite at the infinity and has no poles duplicated. If all poles of the rational function are made real numbers below the minimum eigenvalue, then all shifts of resolvents are also real numbers below the minimum eigenvalue, and all coefficient matrices of systems of linear equations to give actions of resolvents are real symmetric positive-definite. Thus in this report we studied the method to construct the filter's transfer function whose properties are moderately well as a composition of a rational function of the lower degree and a Chebyshev polynomial, and all poles of the rational function are below the minimum eigenvalue.

Keywords: Rational Function, Filter, Eigenproblem, Resolvent, Transfer Function, Real Shift, Remez Method

1. はじめに

行列の実対称定値一般固有値問題に対して、固有値が下

端付近にある少数の固有対の近似をフィルタを利用して求めることにする。本報告ではフィルタには少数のレゾルベントの線型結合に Chebyshev 多項式を合成したものをを用いることにする。そのようなフィルタの伝達関数は、無限遠で有界で重複する極を持たない低次の有理関数に Chebyshev 多項式を合成したものになる。そのような有理

¹ 東京都立大学・数理学専攻
Department of Mathematical Sciences, Tokyo Metropolitan University

^{a)} mrkmhrsh@tmu.ac.jp

関数のすべての極が最小固有値よりも小さい実数であれば、すべてのレゾルベントのシフトは最小固有値よりも小さい実数となり、レゾルベントの作用を与える連立1次方程式の係数行列は実対称正定値になる。そこで本報告では、すべての極が最小固有値よりも小さい実数である低次の有理関数に Chebyshev 多項式を合成したものとしてフィルタの伝達関数が表される場合について、うまくある程度良い特性が得られるように構成する方法を検討する。

2. 固有値問題の近似解法に用いるフィルタと有理関数

2.1 フィルタの構成

実対称定値一般固有値問題 $Av = \lambda Bv$ で、固有値が下端付近にある比較的少数の固有対の近似をフィルタと呼ぶ線形作用素を利用して構成するものとする。

本論文で扱うフィルタ \mathcal{F} は、相異なるシフト ρ_i をもつ少数 K 個のレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_i) \equiv (A - \rho_i B)^{-1} B$ と恒等作用素 \mathcal{I} の線形結合を \mathcal{Y} として、 \mathcal{Y} に Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ を合成したもので与えられるとする (式 (1))。ここで β や γ_i は線形結合の係数である。

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{Y} &= \beta \mathcal{I} + \sum_{i=1}^K \gamma_i \mathcal{R}(\rho_i), \\ \mathcal{F} &= g_s T_n(\mathcal{Y}). \end{cases}$$

そのときフィルタ \mathcal{F} の伝達関数 $f(\lambda)$ は、有理関数 $\hat{y}(\lambda)$ の Chebyshev 多項式になる (式 (2))。

$$(2) \quad \begin{cases} \hat{y}(\lambda) &= \beta + \sum_{i=1}^K \frac{\gamma_i}{\lambda - \rho_i}, \\ f(\lambda) &= g_s T_n(\hat{y}(\lambda)). \end{cases}$$

便宜のために、線形変換 $\lambda = a + (b - a)t$ により固有値の下端付近の区間 $\lambda \in [a, b]$ と規格化座標の単位区間 $t \in [0, 1]$ を対応させる。そうして引数の λ を規格化座標 t へと変更した伝達関数を $g(t) \equiv f(\lambda)$ とし、同様に $y(t) \equiv \hat{y}(\lambda)$ とすれば式 (3) の形になる。

$$(3) \quad \begin{cases} y(t) &= \beta + \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_i}{t - \tau_i}, \\ g(t) &= g_s T_n(y(t)). \end{cases}$$

この式 (3) の形を持つ伝達関数 $g(t)$ が与えられれば、過程を逆にたどることで式 (1) の形を持つフィルタ \mathcal{F} の構成が決まる。

2.2 フィルタの伝達関数 $g(t)$ の値の範囲に対する条件

固有値分布の下端付近の区間 $\lambda \in [a, b]$ に規格化座標 t の区間 $t \in [0, 1]$ を線形変換で対応させる。伝達関数 $g(t)$ の3つの形状パラメータを μ, g_s, g_p とする。ここで $1 < \mu, 0 < g_s \ll g_p < 1$ である。そうして $g(t)$ は非負領

域 $t \in [0, \infty)$ で連続であるとし、さらに通過域、遷移域、阻止域と呼ばれるそれぞれの区域において条件 (4) を満たすことを要請する。すると $g(t)$ の連続性から $g(1) = g_p, g(\mu) = g_s$ となる必要がある。

$$(4) \quad \begin{cases} \text{通過域 } t \in [0, 1] & \text{で } g(t) \in [g_p, 1], \\ \text{遷移域 } t \in (1, \mu) & \text{で } g(t) \in (g_s, g_p), \\ \text{阻止域 } t \in [\mu, \infty) & \text{で } |g(t)| \leq g_s. \end{cases}$$

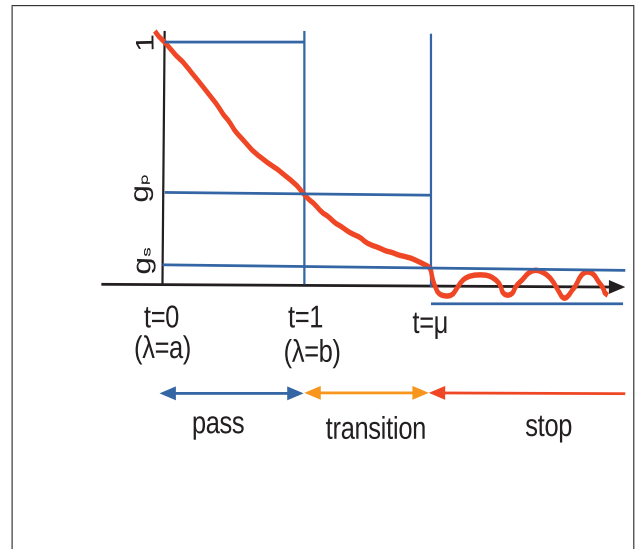


図 1 伝達関数 $g(t)$ の概形の例

有理関数 $y(t)$ もまた非負領域 $t \in [0, \infty)$ で連続であるとする。そうして関係 $g = g_s T_n(y)$ から閾値 y_h と y_ℓ を式 (5) により定義する。

$$(5) \quad \begin{cases} y_h &\equiv \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s}\right), \\ y_\ell &\equiv \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}\right). \end{cases}$$

すると g の閾値と y の閾値の対応は式 (6) となる。

$$(6) \quad \begin{cases} g = 1 &\Rightarrow y = y_h, \\ g = g_p &\Rightarrow y = y_\ell, \\ g = g_s &\Rightarrow |y| = 1. \end{cases}$$

そうして通過域、遷移域、阻止域のそれぞれの区域での有理関数 $y(t)$ の値の範囲についての条件は式 (7) になる。

$$(7) \quad \begin{cases} \text{通過域 } t \in [0, 1] & \text{で } y(t) \in [y_\ell, y_h], \\ \text{遷移域 } t \in (1, \mu) & \text{で } y(t) \in (1, y_\ell), \\ \text{阻止域 } t \in [\mu, \infty) & \text{で } |y(t)| \leq 1. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ の値の範囲についての概形を図 2 に示す。

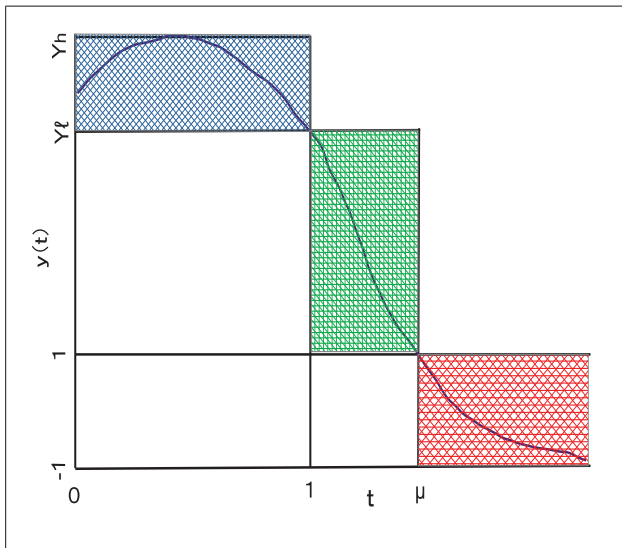


図 2 有理関数 $y(t)$ の概形

2.3 レゾルベント $\mathcal{R}(\rho)$ のシフト ρ を実数にする利点

レゾルベントのシフトが実数である場合には計算は実数演算だけを用いておこなえてさらに必要な記憶についても実数を格納するだけで済む。連立 1 次方程式を解くなどの線形計算では通常は乗算と加算の演算は 1 対 1 の割合になる。すると複素数の乗算と加減算を実数の乗算と加減算を組み合わせて実現して、実数の乗算と加減算の手間を同じとして扱う場合には実数演算による計算は複素数演算による計算の 1/4 倍程度の演算量になる。レゾルベントの作用を与える連立 1 次方程式の係数はシフト行列 $C(\rho) \equiv A - \rho B$ であり、それを行列分解を用いて解く場合はシフト ρ が実数で最小固有値よりも小さければ $C(\rho)$ は実対称正定値であるので、ピボット選択をせずに対称性を利用して実対称行列用の LDL^T 分解を用いて数値安定に解くことができる。 ρ が虚数であれば $C(\rho)$ は複素対称なので、対称性を利用して複素対称行列用の LDL^T 分解を用いて解くことができる。

もしも一般固有値問題で係数行列の組が実対称定値よりも一般的な複素 Hermite 定値である場合には、シフト ρ が実数で最小固有値よりも小さければシフト行列 $C(\rho)$ は複素 Hermite 正定値であるので、ピボット選択をせずに対称性を利用して複素 Hermite 行列用の LDL^H 分解を用いて連立 1 次方程式を数値安定に解くことができるが、 ρ が虚数であれば $C(\rho)$ は行列分解で利用できる対称性を持たないため、たとえば複素 LU 分解を（数値安定性が問題になればピボット交換付きで）用いることになるので、演算量や記憶の量の面でかなり不利になる。

2.4 レゾルベント $\mathcal{R}(\rho)$ のシフト ρ を実数にする欠点

フィルタに用いるレゾルベントのシフトを複素数の範囲から実数に制限すると、それは選択可能な範囲を狭めたことになるので、制限をしない場合に比べて実現できるフィ

ルタの特性は悪くなる。

シフトを実数に制限することによるフィルタ特性の悪さを補うには、フィルタの構成に用いるレゾルベントの数を増す、用いる Chebyshev 多項式の次数を上げる、フィルタで濾過するベクトルの数を増す、フィルタを反復する回数を増す、などが必要となる可能性が出てくる。そのため固有対に要求される精度が高い場合には、シフトを実数に制限する場合と制限しない場合で両者の性能を比較することは簡単ではない。なお今回の報告での考察の対象外であるが、「中間固有値」を持つ固有対を求める場合には、用いるシフトは実軸を避けてすべて虚数とする。

3. 実数シフトのレゾルベントを少数用いたフィルタの構成

今回の報告では、シフトが実数に制限された少数のレゾルベントを使ってある程度特性の良いフィルタをうまく構成することを目指す。

フィルタの特性を代表する形状パラメタ 3 つについては以下のことが言える。パラメタ μ の値は 1 よりも大きい値をとるが、値が 1 に近いほど遮断特性が急峻になり必要な固有ベクトルの数に近い数のベクトルをフィルタで濾過すれば良くなり、値が 1 から離れるほど遷移域に対応する固有値を持った不要な固有ベクトルの混入がありえるので濾過するベクトルの数をそれに見合せて増やす必要が出てくる。パラメタ g_s の値は正であるが、値が微小であるほど阻止域に固有値を持つ固有ベクトルを阻止する能力が高くなり、求めた近似固有対の精度が良くなる。パラメタ g_p の値は 1 未満であるが、1 に近いほど通過域に固有値を持つ必要な固有ベクトル相互の伝達率が均一に近くなるので求めた近似固有対の間の精度のばらつきが減る。フィルタに用いる Chebyshev 多項式の次数 n については、フィルタをベクトルの組に 1 回適用する際にレゾルベントの線型結合を n 回繰り返してベクトルの組に適用するので、 n が大きいほどフィルタを適用する際の計算負荷が大きくなる。次数と 3 つの形状のパラメタ n, μ, g_s, g_p については互いにトレードオフの関係にあり、どれかを向上させると他が劣化する関係にある。

なお、以下で例に挙げた各解については、得られた有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ の様子をグラフで以下に述べる方式で示している。

(1) 変数 t を非負領域 $[0, \infty)$ で動かして、横軸に $s = t/(t+1)$ の値を、縦軸に有理関数 $y(t)$ の値を黒線でプロットしたもので、定義域全体での有理関数 $y(t)$ の振舞いを確認できる。

なお非負領域 $t \in [0, \infty)$ は区間 $s \in [0, 1)$ に、通過域 $t \in [0, 1]$ は区間 $s \in [0, 0.5]$ にそれぞれ対応する。またたとえば $\mu = 1.5$ であれば、遷移域 $t \in (1, \mu)$ は区間 $s \in (0.5, 0.6)$ に、阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ は区間 $s \in [0.6, 1)$

にそれぞれ対応する。

(2) 横軸に t を、縦軸に伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数を赤線でプロットしたものを、ただし $t \in [0, 3]$ の範囲だけについて示す。

なお今回の以下に示すフィルタの伝達関数を求める各例では、数値丸め誤差の影響をなるべく減らすために浮動小数点数とその演算には IEEE 754 規格の 4 倍精度 binary128 を使用して計算を行い、得られた数値を倍精度 binary64 程度に丸めて示した。また連立 1 次方程式の求解にはピボット行選択を行なう Gauss の消去法を用いた。

3.1 レゾルベントを 1 つ用いる場合の構成

レゾルベント 1 つと恒等演算子の線形結合である \mathcal{Y} に対する伝達関数は式 (8) で与えられる。ここで β , α , τ はすべて実数とし、極 τ は負とする。

$$(8) \quad y(t) = \beta + \frac{\alpha}{t - \tau}.$$

有理関数 $y(t)$ の値の範囲に対する制約条件は式 (7) であり、それから得られる必要条件として ($y(t)$ が 1 次の有理関数であり非負領域で連続かつ単調減少になることも考慮して) 式 (9) をとる。

$$(9) \quad \begin{cases} t = 0 & : \beta + \frac{\alpha}{0 - \tau} = y_h, \\ t = 1 & : \beta + \frac{\alpha}{1 - \tau} = y_\ell, \\ t = \mu & : \beta + \frac{\alpha}{\mu - \tau} = 1, \\ t = \infty & : \beta \geq -1. \end{cases}$$

必要条件である式 (9) の 3 つの等式を解くと β , τ , α の値は式 (10) で与えられる。

$$(10) \quad \begin{cases} \beta = \frac{\gamma - y_\ell}{\gamma - 1}, \text{ ただし } \gamma \equiv \frac{y_h - y_\ell}{y_h - 1} \times \mu, \\ \tau = -\frac{y_\ell - \beta}{y_h - y_\ell}, \\ \alpha = -(y_h - \beta)\tau. \end{cases}$$

ただし不等式 $\beta \geq -1$ から、条件 $\mu \geq \frac{(y_\ell + 1)(y_h - 1)}{2(y_h - y_\ell)}$ を満たすことが必要である。

実数シフトのレゾルベントを 1 つ用いて構成できたフィルタの 5 通りの例について、指定したパラメタ n , μ , g_s , g_p の値を表 1 に示す。これらは 3 つの形状のパラメタ μ , g_s , g_p を先に指定して、それから次数 n として条件 $\beta \geq -1$ を満たす最小のものを選んでいる。フィルタを 1 回適用する中でレゾルベントは Chebyshev 多項式の次数と等しい n 回だけ適用されるので、フィルタの伝達特性を与える 3 つの形状パラメタが同じであれば、次数 n が小さいほど計算は楽になる。パラメタ μ の値を 1 に近づけるときは次数 n を上げる必要があり、さらに g_p が減少して通過域での伝達率の均一性が悪くなる、あるいは g_s を大きくする

と阻止域での伝達率の大きさが増加して不要な固有ベクトルを排除する能力が落ちる。

表 1 レゾルベントを 1 つ用いた場合のフィルタのパラメタの組の例

例	n	μ	g_s	g_p
1-1	27	2.0	1E-12	1E-4
1-2	28	1.75	1E-15	1E-6
1-3	33	1.5	1E-15	1E-7
1-4	25	1.5	1E-16	1E-8
1-5	109	1.3	1E-15	1E-8

例 1-1 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 27$, $\mu = 2.0$, $g_s = 1E-12$, $g_p = 1E-4$ である。その条件を満たす解として式 (11) が得られた。

$$(11) \quad \begin{cases} \beta = -0.96358454650751472, \\ \tau = -6.5170892693114966, \\ \alpha = 16.724024870445035. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.1 と図 A.2 に示す。

例 1-2 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 28$, $\mu = 1.75$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-6$ である。その条件を満たす解として式 (12) が得られた。

$$(12) \quad \begin{cases} \beta = -0.99245324139048424, \\ \tau = -3.8666639819616197, \\ \alpha = 11.190940356660613. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.4 と図 A.5 に示す。

例 1-3 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 33$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-7$ である。その条件を満たす解として式 (13) が得られた。

$$(13) \quad \begin{cases} \beta = -0.98699306841269848, \\ \tau = -4.7599830140151067, \\ \alpha = 12.438542857229249. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.7 と図 A.8 に示す。

例 1-4 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 25$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-16$, $g_p = 1E-8$ である。その条件を満たす解として式 (14) が得られた。

$$(14) \quad \begin{cases} \beta = -0.91180782525544148, \\ \tau = -2.1158443350135284, \\ \alpha = 6.9127994945844218. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.10 と図 A.11 に示す。

例 1-5 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 109$, $\mu = 1.3$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-8$ である。その条件を満たす解として式 (15) が得られた。

$$(15) \quad \begin{cases} \beta = -0.98752042609237490, \\ \tau = -49.032877479946448, \\ \alpha = 100.03762209539847. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-13 と図 A-14 に示す。

3.2 レゾルベントを 2 つ用いる場合の構成

レゾルベント 2 つと恒等演算子の線形結合 \mathcal{Y} に対する伝達関数を式 (16) とする。ここで β , α_1 , α_2 , τ_1 , τ_2 は実数であり、極 τ_1 と τ_2 は負である。

$$(16) \quad y(t) = \beta + \frac{\alpha_1}{t - \tau_1} + \frac{\alpha_2}{t - \tau_2}.$$

有理関数 $y(t)$ への制約条件は式 (7) である。フィルタの設計パラメタとして n , μ , g_s , g_p の値を指定する。まず閾値 y_ℓ と y_h を式 (5) から計算する。そうして通過域 $t \in [0, 1]$ で $y(t)$ が最大値 y_h をとる点の座標を $t = z$ とする。 $z \neq 0$ であれば、 $y(t)$ は以下の 4 つの条件 (17) を満たす必要がある。

$$(17) \quad \begin{cases} y(z) = y_h, & y^{(1)}(z) = 0, \\ y(1) = y_\ell, \\ y(\mu) = 1. \end{cases}$$

また $|y(\infty)| \leq 1$ つまり $|\beta| \leq 1$ も必要である。そうして与えた β の値に対して、4 つの等式 (18) を解いて 4 つの変数 α_1 , α_2 , τ_1 , τ_2 の実数値を求めることになる。

$$(18) \quad \begin{cases} \beta + \frac{\alpha_1}{z - \tau_1} + \frac{\alpha_2}{z - \tau_2} = y_h, \\ -\frac{\alpha_1}{(z - \tau_1)^2} - \frac{\alpha_2}{(z - \tau_2)^2} = 0, \\ \beta + \frac{\alpha_1}{1 - \tau_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \tau_2} = y_\ell, \\ \beta + \frac{\alpha_1}{\mu - \tau_1} + \frac{\alpha_2}{\mu - \tau_2} = 1. \end{cases}$$

この連立代数方程式 (18) は代数的操作で解くことができる。それを解いて得られた $y(t)$ が実数の部分分数分解を持ち、通過域、遷移域、阻止域においてそれぞれ関数値が条件 (7) を満たしているかを調べればよいが、記述が長くなるのでここでは省略する。

指定するパラメタ n , μ , g_s , g_p の値によっては実数解の無い場合や、あるいは極として非負のものが現れたり、あるいは実数解で極が両方とも負になっただけでも $y(t)$ の値の範囲が通過域や阻止域における制限を満たしていない可能性がある。

また代数的な解法は解が実数であることの扱いが面倒なので、以下の考察では反復法を用いて連立代数方程式を解

くことにする。

通過域における最大点の座標 z は、Remez 法 [1] と同様の反復を用いて解くことにする。まずフィルタのパラメタ n , g_s , g_ℓ として指定された値から式 (5) により、 $y(t)$ に対する閾値である y_ℓ , y_h の値をそれぞれ求める。そうしてまず極の位置である τ_1 , τ_2 の値を仮定して、さらに z の初期値も与える。

式 (17) から z が極大点であるための必要条件 $y^{(1)}(z) = 0$ を除いた 3 つの必要条件から連立 1 次方程式 (19) が得られる。するといま仮定している τ_1 , τ_2 , z の値から連立 1 次方程式の係数や右辺の数値が定まるのでそれを解いて β , α_1 , α_2 の数値が求まり、式 (16) の $y(t)$ に含まれる定数の数値がすべて決まる。

$$(19) \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z - \tau_1} & \frac{1}{z - \tau_2} \\ 1 & \frac{1}{1 - \tau_1} & \frac{1}{1 - \tau_2} \\ 1 & \frac{1}{\mu - \tau_1} & \frac{1}{\mu - \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_h \\ y_\ell \\ 1 \end{bmatrix}.$$

こうして得られた有理関数 $y(t)$ の通過域における最大点の座標がちょうど z に一致していて、しかも通過域で最小値が y_ℓ より小さくならず、さらに阻止域では $|y(t)|$ が 1 を越えなければ条件を満たす $y(t)$ の構成に成功したことになる。しかしもしも $y(t)$ の最大点の座標が z に一致していなければ、Remez 法 [1] と同様の反復として、 z に近い最大点の座標を求めてそれを次の z の値に設定して再び連立 1 次方程式 (19) を解くという処理を繰り返す (図 3)。

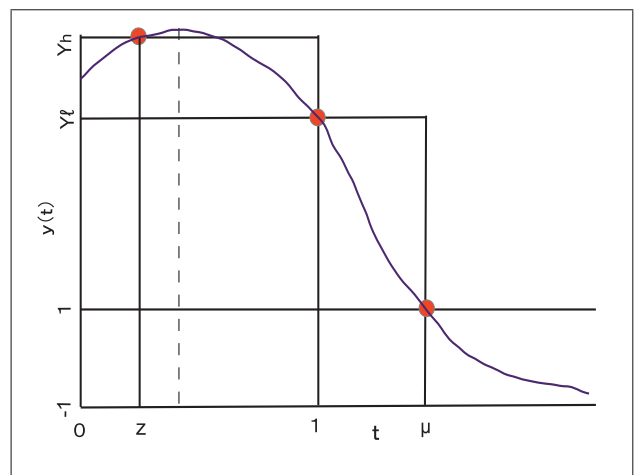


図 3 Remez 法の概念 (仮定した極大点の座標 z を修正する)

この Remez 法と同様の反復によって z の収束が得られたときに、通過域での最小値が y_ℓ よりも小さかったり、あるいは阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ で $|y(t)|$ の値が 1 を越える箇所があれば、必要な制約を $y(t)$ が満たしていないので、構成は失敗である。失敗をした場合には、最初に仮定した 2 つの極の位置 τ_1 , τ_2 を変更して再び探索を行う。今回はこの 2 つの極の位置の探索は人手による試行錯誤で行った。

実数シフトのレゾルベントを2つ用いて構成できたフィルタの4通りの例について、指定したパラメタ n , μ , g_s , g_p の値を表 2 に示す（これらの例はまだ改良できる可能性がある）。

表 2 レゾルベントを2つ用いた場合のフィルタのパラメタの組の例

例	n	μ	g_s	g_p
2-1	23	1.5	1E-10	1E-3
2-2	38	1.5	1E-12	1E-3
2-3	38	1.5	1E-15	1E-5
2-4	40	1.5	1.1E-15	1E-4

例 2-1 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 23$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-10$, $g_p = 1E-3$ である。その条件を満たす解として式 (20) が得られた。

$$(20) \quad \begin{cases} \tau_1 = -0.76, \tau_2 = -1.2, \\ z = 0.32657\ 17240\ 46971\ 21, \\ \beta = -0.99230\ 41602\ 40466\ 38, \\ \alpha_1 = -6.90373\ 44873\ 22084\ 4, \\ \alpha_2 = 13.62704\ 56201\ 57944. \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復の収束の状況を z の初期値を 0.25 とした場合について表 3 に示す。

表 3 例 2-1 : Remez 法と同様の反復による z の値の収束状況

反復回数	z
0	0.25
1	0.31679715742666303
2	0.32638897662218369
3	0.32657165874206839
4	0.32657172404697121
5	0.32657172404697121

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-16 と図 A-17 に示す。

例 2-2 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 38$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-12$, $g_p = 1E-3$ である。その条件を満たす解として式 (21) が得られた。

$$(21) \quad \begin{cases} \tau_1 = -1.25, \tau_2 = -2.03, \\ z = 0.37507\ 63215\ 83946\ 99, \\ \beta = -0.94058\ 93038\ 64582\ 17, \\ \alpha_1 = -7.55520\ 41413\ 37089\ 6, \\ \alpha_2 = 16.54841\ 50131\ 58312. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-19 と図 A-20 に示す。

例 2-3 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 38$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-5$ である。その条件を満たす解として式 (22) が得られた。

$$(22) \quad \begin{cases} \tau_1 = -0.8, \tau_2 = -2.5, \\ z = 0.17911\ 72407\ 28373\ 87, \\ \beta = -0.97197\ 32868\ 06298\ 33, \\ \alpha_1 = -1.37229\ 04037\ 26818\ 0, \\ \alpha_2 = 10.27448\ 51537\ 06616. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-22 と図 A-23 に示す。

例 2-4 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 40$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1.1E-15$, $g_p = 1E-4$ である。その条件を満たす解として式 (23) が得られた（パラメタ g_s の値が $1E-15$ でなくて $1.1E-15$ になっているのは、そのようにしないと条件を満たす解が得られなかったからである）。

$$(23) \quad \begin{cases} \tau_1 = -1.25, \tau_2 = -1.28, \\ z = 0.35778\ 64394\ 87426\ 83, \\ \beta = -0.99864\ 90114\ 17620\ 76, \\ \alpha_1 = -207.65212\ 64969\ 0007, \\ \alpha_2 = 215.47366\ 66740\ 6178. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-25 と図 A-26 に示す。

3.3 レゾルベントを3つ用いる場合の構成 (方式 I)

レゾルベント3つと恒等演算子の線形結合に対する伝達関数を式 (24) とする。ここで β と α_j , τ_j , $j = 1, 2, 3$ はすべて実数とし、3つの極 τ_j はすべて負とする。

$$(24) \quad y(t) = \beta + \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j}{t - \tau_j}.$$

有理関数 $y(t)$ についての制約条件は式 (7) になる。フィルタの設計パラメタとして n , μ , g_s , g_p の値を指定する（ただし $1 < \mu$, $0 < g_s \ll g_p < 1$ である）。 $y(t)$ の閾値 y_ℓ と y_h は式 (5) から計算で求める。

方式 I では通過域 $t \in [0, 1]$ における $y(t)$ の最大点の座標を $t = z$ とする。すると $y(t)$ は式 (25) の4つの条件を満たす必要がある。

$$(25) \quad \begin{cases} y(z) = y_h, \\ t \in [0, 1] \text{ での } y(t) \text{ の最大点が } z, \\ y(1) = y_\ell, \\ y(\mu) = 1. \end{cases}$$

ここでは β の値はうまく仮定して指定することにする。 $\beta = y(\infty)$ であるから $|\beta| \leq 1$ であることが必要である。

仮定した3つの極の位置 τ_1 , τ_2 , τ_3 と仮定した β の値から連立1次方程式 (26) の数値が決まり、それを解くことで α_1 , α_2 , α_3 の数値がそれぞれ求まり、それにより式 (24) の $y(t)$ の定数の数値がすべて決まる。

$$(26) \quad \begin{bmatrix} 1/(z-\tau_1) & 1/(z-\tau_2) & 1/(z-\tau_3) \\ 1/(1-\tau_1) & 1/(1-\tau_2) & 1/(1-\tau_3) \\ 1/(\mu-\tau_1) & 1/(\mu-\tau_2) & 1/(\mu-\tau_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_h - \beta \\ y_\ell - \beta \\ 1 - \beta \end{bmatrix}$$

こうして得られた $y(t)$ の通過域 $[0, 1]$ における最大点の座標が z にちょうど一致していて、通過域での最小値が y_ℓ でありさらに阻止域 $[\mu, \infty)$ で $|y(t)|$ の値が1を越えることがなければ条件を満足する $y(t)$ の構成に成功したことにな

る。しかし通過域における最大点の座標が z でない場合には、真の最大点の座標を求めてそれを次回の z に用いて繰り返しを行って収束させる (Remez 法と同様の反復)。収束を得たときに通過域における $y(t)$ の最小値が y_ℓ より小さかったり、あるいは阻止域で $|y(t)|$ の値が 1 を越えたならば条件を満たす $y(t)$ の構成は失敗であり、その場合には極の位置 τ_1, τ_2, τ_3 あるいは β の値を変更してさらに探索を行う。今回はこの探索を人手による試行錯誤で行っている。

指定したフィルタのパラメタ n, μ, g_s, g_p の値によっては、条件を満たす解が存在しない可能性がある。ただし適切な解が見つからない場合に、解が真に存在しないのかあるいは探索が不十分であるのかは区別できていない。

実数シフトのレゾルベントを 3 つ用いて構成できたフィルタの 6 通りの例について、指定したパラメタ n, μ, g_s, g_p の値を表 4 に示す (これらの例はまだ改良できる可能性がある)。

表 4 レゾルベントを 3 つ用いたフィルタのパラメタの例 (方式 I)

例	n	μ	g_s	g_p
3-I-1	20	1.5	1E-10	1E-3
3-I-2	30	1.5	1E-10	1E-2
3-I-3	30	1.5	1E-12	1E-3
3-I-4	40	1.5	1E-12	5E-3
3-I-5	20	1.5	1.2E-12	1E-3
3-I-6	30	1.5	2E-14	1E-3

例 3-I-1 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-3$ である。それにより条件を満たす解として式 (27) が得られた。

$$(27) \quad \begin{cases} \beta = 1.0, \tau_1 = -1.5, \tau_2 = -5.0, \tau_3 = -7.5, \\ z = 0.18599\ 26228\ 54188\ 08, \\ \alpha_1 = -10.54347\ 20670\ 71244, \\ \alpha_2 = 230.91814\ 77483\ 9765, \\ \alpha_3 = -288.10240\ 37581\ 0610. \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復による収束の状況を z の初期値を 0.25 とした場合について表 5 に示す。

表 5 例 3-I-1 : Remez 法と同様の反復による z の値の収束状況

反復回数	z
0	0.25
1	0.17915257662534714
2	0.18592556801810861
3	0.18599261632282287
4	0.18599262285418808
5	0.18599262285418808

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.28 と図 A.29 に示す。これは通過域の下端付近での伝達率が 1 に近い。もしも原点に最も近い $g(t) = g_p$ となる負の座標を $t = t_p$ とするとき、区間

$t \in [t_p, 1]$ と区間 $\tilde{t} \in [0, 1]$ を同じ向きに対応させる 1 次変換で座標変換を定義して $\tilde{g}(\tilde{t}) \equiv g(t)$ とすれば、新しい伝達関数 $\tilde{g}(\tilde{t})$ の通過域の下端 $\tilde{t} = 0$ での伝達率は減少して g_p になるが、元の伝達関数 $g(t)$ の遷移域の相対幅 $\mu - 1$ に比べて $\tilde{g}(\tilde{t})$ の遷移域の相対幅 $\tilde{\mu} - 1$ は $1/(1 - t_p)$ 倍となるので狭くなる。

例 3-I-2 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 30, \mu = 1.5, g_s = 3E-10, g_p = 1E-2$ である。それにより条件を満たす解として式 (28) が得られた。

$$(28) \quad \begin{cases} \beta = -0.65, \tau_1 = -2.5, \tau_2 = -4.0, \tau_3 = -8.0, \\ z = 0.41863\ 03472\ 33265\ 64, \\ \alpha_1 = -46.94773\ 12232\ 16199, \\ \alpha_2 = 138.44834\ 07901\ 2331, \\ \alpha_3 = -111.96218\ 15278\ 0179. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.31 と図 A.32 に示す。

例 3-I-3 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$ である (例 3-I-2 と比べて、 g_s の値を $3E-10$ から $1E-12$ に下げると引き換えに g_p の値を $1E-2$ から $1E-3$ に下げている)。それにより条件を満たす解として式 (29) が得られた。

$$(29) \quad \begin{cases} \beta = 0.2, \tau_1 = -2.5, \tau_2 = -4.0, \tau_3 = -8.0, \\ z = 0.30267\ 47675\ 72432\ 76, \\ \alpha_1 = -61.72673\ 49701\ 25999, \\ \alpha_2 = 194.11248\ 93001\ 2096, \\ \alpha_3 = -181.08421\ 32370\ 6878. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.34 と図 A.35 に示す。

例 3-I-4 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 5E-3$ である (例 3-I-3 の場合と比べて、 g_p の値を $1E-3$ から $5E-3$ に上げると引き換えに、次数 n の値を 30 から 40 に上げている)。それにより条件を満たす解として式 (30) が得られた。

$$(30) \quad \begin{cases} \beta = 1.0, \tau_1 = -3.65, \tau_2 = -5.5, \tau_3 = -10.5, \\ z = 0.43751\ 32482\ 75965\ 45, \\ \alpha_1 = -130.27325\ 48867\ 5910, \\ \alpha_2 = 374.74537\ 92283\ 5478, \\ \alpha_3 = -338.87131\ 83307\ 7839. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.37 と図 A.38 に示す。

例 3-I-5 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1.2E-12, g_p = 1E-3$ である。それにより条件を満たす解として式 (31) が得られた (パラメタ g_s の値が $1.2E-12$ で $1E-12$ ではないのは、そうしないと条件を満たす解が得られなかったからである)。

$$(31) \begin{cases} \beta = 1.0, \tau_1 = -1.73, \tau_2 = -2.65, \tau_3 = -2.87, \\ z = 0.36726\ 22752\ 39452\ 72, \\ \alpha_1 = -207.17748\ 65340\ 6107, \\ \alpha_2 = 2173.81997\ 44641\ 517, \\ \alpha_3 = -2008.75967\ 13432\ 417. \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復による収束の状況を z の初期値を 0.25 とした場合について表 6 に示す。

表 6 例 3-I-5 : Remez 法と同様の反復による z の値の収束状況

反復回数	z
0	0.25
1	0.34808106022048742
2	0.36663347095716745
3	0.36726156850974075
4	0.36726227523852140
5	0.36726227523945272
6	0.36726227523945272

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.40 と図 A.41 に示す。

例 3-I-6 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 30, \mu = 1.5, g_s = 2E-14, g_p = 1E-3$ である。それにより条件を満たす解として式 (32) が得られた (3つの極の相互の位置が近く、各極の係数の大きさが5桁になっていることは、レゾルベントの線形結合の作用の結果を計算する際に、数値相殺により丸め誤差の拡大する傾向が強い可能性が懸念される)。

$$(32) \begin{cases} \beta = 1.0, \tau_1 = -3.3, \tau_2 = -3.4, \tau_3 = -3.6, \\ z = 0.40544\ 27371\ 76083\ 03, \\ \alpha_1 = -27705.17451\ 93703\ 20, \\ \alpha_2 = 43785.11285\ 87155\ 20, \\ \alpha_3 = -16135.51239\ 55055\ 96. \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復による収束の状況を z の初期値を 0.25 とした場合について表 7 に示す。

表 7 例 3-I-6 : Remez 法と同様の反復による z の値の収束状況

反復回数	z
0	0.25
1	0.37617020656913519
2	0.40409760233387351
3	0.40543969192635268
4	0.40544273716025054
5	0.40544273717608303
6	0.40544273717608303

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A.43 と図 A.44 に示す。

3.4 レゾルベントを3つ用いる場合の構成 (方式 II)

レゾルベント3つと恒等演算子の線形結合の伝達関数を式 (24) とする。 β と $\alpha_j, \tau_j, j = 1, 2, 3$ はすべて実数であり、3つの極 τ_j はすべて負である。有理関数 $y(t)$ についての制約条件は式 (7) である

フィルタの設計パラメタとして n, μ, g_s, g_p を指定する (ただし $1 < \mu, 0 < g_s \ll g_p < 1$)。そうして $y(t)$ の閾値 y_e と y_h を式 (5) により計算する。

そうしてこの方式 II では通過域 $t \in [0, 1]$ において $y(t)$ が座標 $t = 0$ と $t = z$ ($0 < z < 1$) の2ヶ所において最大値をとるものとする。有理関数 $y(t)$ は少なくとも式 (33) の4つの条件を満たす必要がある。

$$(33) \quad y(0) = y_h, y(z) = y_h, y(1) = y_e, y(\mu) = 1, .$$

仮定した極の値 τ_1, τ_2, τ_3 を与えるとこの4つの条件を表す連立1次方程式 (34) の数値が決まり、それを解くことで $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の値が求まる。

$$(34) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/(0-\tau_1) & 1/(0-\tau_2) & 1/(0-\tau_3) \\ 1 & 1/(z-\tau_1) & 1/(z-\tau_2) & 1/(z-\tau_3) \\ 1 & 1/(1-\tau_1) & 1/(1-\tau_2) & 1/(1-\tau_3) \\ 1 & 1/(\mu-\tau_1) & 1/(\mu-\tau_2) & 1/(\mu-\tau_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_h \\ y_h \\ y_e \\ 1 \end{bmatrix}$$

得られた $y(t)$ について $t = z$ が区間 $(0, 1)$ において $y(t)$ の唯一の極大点となっていてさらに通過域での最小値が y_e 以上であり、またさらに $y(t)$ の阻止域 $[\mu, \infty)$ で $|y(t)|$ が1を越えていなければ $y(t)$ の構成は一応成功である。

もしも $y(t)$ が区間 $(0, 1)$ の中で $t = z$ で極大でなければ、極大点の座標を求めてそれを次回の z の値にして繰り返しにより収束させる (Remez 法と同様の反復)。

通過域での $y(t)$ の最小値が y_e よりも小さかったり、阻止域での $|y(t)|$ の値が1を越えていたら (特に $|\beta| > 1$ であれば) 構成は失敗であり、その場合は極の座標の値 τ_1, τ_2, τ_3 を変えて探索を行う。今回はこの探索は人手による試行錯誤で行っている。指定した n, μ, g_s, g_p の値によっては数学的に適切な解が存在しない場合がある。

3.5 レゾルベントを3つ用いる場合の構成 (方式 II)

実数シフトのレゾルベントを3つ用いて構成されたフィルタの3通りの例について、指定したパラメタ n, μ, g_s, g_p の値を表 8 に示す。これらは順に g_s の値を下げるために Chebyshev 多項式の次数 n を増している。

表 8 レゾルベントを3つ用いたフィルタのパラメタの例 (方式 II)

例	n	μ	g_s	g_p
3-II-1	30	1.5	1E-10	1E-2
3-II-2	34	1.5	1E-11	1E-2
3-II-3	41	1.5	1E-12	1E-2

例 3-II-1 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-2$ である。それにより条件を満たす解として式 (35) が得られた。

$$(35) \begin{cases} \tau_1 = -0.60, \tau_2 = -0.69, \tau_3 = -0.81, \\ z = 0.49931829581409693, \\ \beta = -0.99901747981329442, \\ \alpha_1 = 89.321336271875544, \\ \alpha_2 = -210.39740961563449, \\ \alpha_3 = 128.29029527935843, \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復による収束の状況を z の初期値を 0.25 とした場合について表 9 に示す。

表 9 例 3-II-1 : Remez 法と同様の反復による z の値の収束状況

反復回数	z
0	0.25
1	0.43889995782449841
2	0.49390779973752797
3	0.49926776890549809
4	0.49931829133629799
5	0.49931829581409693
6	0.49931829581409693

得られた有理関数 $y(t)$ のグラフを図 A.46 に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数グラフを図 A.47 に示す。

例 3-II-2 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 34, \mu = 1.5, g_s = 1E-11, g_p = 1E-2$ である。それにより条件を満たす解として式 (36) が得られた。

$$(36) \begin{cases} \tau_1 = -0.63, \tau_2 = -0.64, \tau_3 = -0.74, \\ z = 0.54377026128768921, \\ \beta = -0.98131600973886953, \\ \alpha_1 = 1805.9913175101005, \\ \alpha_2 = -2052.6571416016740, \\ \alpha_3 = 253.75537272985273. \end{cases}$$

得られた有理関数 $y(t)$ のグラフを図 A.49 に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数グラフを図 A.50 に示す。

例 3-II-3 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 41, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$ であるそれにより条件を満たす解として式 (37) が得られた。

$$(37) \begin{cases} \tau_1 = -0.722, \tau_2 = -0.820, \tau_3 = -0.837, \\ z = 0.55822496403008699, \\ \beta = -0.99988504442730867, \\ \alpha_1 = 236.05420176688206, \\ \alpha_2 = -2101.8656374776586, \\ \alpha_3 = 1873.6697420694337. \end{cases}$$

得られた有理関数 $y(t)$ のグラフを図 A.52 に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数グラフを図 A.53 に示す。

3.6 レゾルベントを 4 つ用いる場合の構成 (方式 I)

レゾルベント 4 つと恒等演算子の線形結合に対する伝達関数を式 (38) とする。ここで β と $\alpha_j, \tau_j, j=1, 2, 3, 4$ はすべて実数とし、4 つの極 τ_j はすべて負とする。

$$(38) \quad y(t) = \beta + \sum_{j=1}^4 \frac{\alpha_j}{t - \tau_j}.$$

有理関数 $y(t)$ についての制約条件は式 (7) になる。フィル

タの設計パラメタとして n, μ, g_s, g_p の値を指定する (ただし $1 < \mu, 0 < g_s \ll g_p < 1$ である)。 $y(t)$ の閾値 y_ℓ と y_h は式 (5) から計算で求める。

通過域 $t \in [0, 1]$ において $y(t)$ は $t = 0$ で最大で最小と極大になる点の座標をそれぞれ $t = z_2$ と $t = z_1$ とする ($0 < z_2 < z_1 < 1$)。そうして $y(t)$ に式 (39) の 5 つの等式条件を課した (本来は極小点 z_2 と極大点 z_1 については、それぞれ等式よりも緩い不等式制約 $y(z_2) \geq y_\ell$ と $y(z_1) \leq y_h$ を満たせばそれで十分である)。

(39)

$$y(0) = y_h, y(z_2) = y_\ell, y(z_1) = y_h, y(1) = y_\ell, y(\mu) = 1.$$

仮定した 4 つの極の位置 $\tau_j, j=1, 2, 3, 4$ と極値点の座標 z_2, z_1 をから連立 1 次方程式 (40) の数値が決まり、それを解くことにより β と $\alpha_j, j=1, 2, 3, 4$ の数値がそれぞれ求まり、それにより式 (38) の $y(t)$ の定数の数値がすべて決まる。

(40)

$$\begin{bmatrix} 11/(0 - \tau_1) & 1/(0 - \tau_2) & 1/(0 - \tau_3) & 1/(0 - \tau_4) \\ 11/(z_2 - \tau_1) & 1/(z_2 - \tau_2) & 1/(z_2 - \tau_3) & 1/(z_2 - \tau_4) \\ 11/(z_1 - \tau_1) & 1/(z_1 - \tau_2) & 1/(z_1 - \tau_3) & 1/(z_1 - \tau_4) \\ 1 & 1/(1 - \tau_1) & 1/(1 - \tau_2) & 1/(1 - \tau_3) & 1/(1 - \tau_4) \\ 1 & 1/(\mu - \tau_1) & 1/(\mu - \tau_2) & 1/(\mu - \tau_3) & 1/(\mu - \tau_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_h \\ y_\ell \\ y_h \\ y_\ell \\ 1 \end{bmatrix}$$

得られた $y(t)$ の通過域の内部 $(0, 1)$ での最大点と最小点の座標がそれぞれ z_1 と z_2 にちょうど一致していて、通過域での最小値が y_ℓ なっていてさらに阻止域 $[\mu, \infty)$ で $|y(t)|$ の値が 1 を越えることがなければ条件を満足する $y(t)$ の構成に成功したことになるが、通過域の内部における最大点と最小点の座標が z_1 と z_2 でない場合は、最大点と最小点の座標を求めて次回の z_1 と z_2 に用いて繰り返し収束させる (Remez 法と同様の反復)。収束を得たとき阻止域で $|y(t)|$ の値が 1 を越えるなら構成は失敗であり、その場合には極の位置 $\tau_j, j=1, 2, 3, 4$ を変更してさらに探索を行う。この探索は今回は試行錯誤で行っている。指定したフィルタのパラメタ n, μ, g_s, g_p の値により条件を満たす解が存在しない場合があるが、解が存在するかしないかを判定する手段は得られていない。

実数シフトのレゾルベントを 4 つ用いて構成できたフィルタの 3 通りの例について、指定したパラメタ n, μ, g_s, g_p の値を表 10 に示す (これらの例はまだ改良できる可能性がある)。これらは順に g_s の値を減らすために Chebyshev 多項式の次数 n を増している。

表 10 レゾルベントを 4 つ用いたフィルタのパラメタの例

例	n	μ	g_s	g_p
4-I-1	23	1.5	1E-12	1E-2
4-I-2	40	1.5	1E-15	1E-2
4-I-3	50	1.5	1E-16	1E-2

例 4-I-1 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 23$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-12$, $g_p = 1E-2$ である。その条件を満たす解として式 (41) が得られた。

$$(41) \quad \begin{cases} \tau_1 = -0.46, \tau_2 = -1.3, \tau_3 = -1.6, \tau_4 = -2.2, \\ z_2 = 0.12521115661819931, \\ z_1 = 0.56045269955554977, \\ \beta = 0.72830157094489884, \\ \alpha_1 = 11.103609016858801, \\ \alpha_2 = -747.44207460551708, \\ \alpha_3 = 1358.7632395652740, \\ \alpha_4 = -654.01397054308215. \end{cases}$$

Remez 法と同様の反復の収束状況を z_2 と z_1 の初期値をそれぞれ 0.25 と 0.5 とした場合について表 11 に示す。

反復回数	z_2	z_1
0	0.25	0.50
1	0.12414214464760153	0.58253424709988758
2	0.12495779967692215	0.56005494319787249
3	0.12521108901675325	0.56045273980731145
4	0.12521115661819931	0.56045269955554977
5	0.12521115661819931	0.56045269955554977

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-55 と図 A-56 に示す。

例 4-I-2 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 40$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-2$ である。その条件を満たす解として式 (42) が得られた。

$$(42) \quad \begin{cases} \tau_1 = -0.8, \tau_2 = -0.85, \tau_3 = -3.4, \tau_4 = -4.4, \\ z_2 = 0.14464146269159392, \\ z_1 = 0.60332442698162049, \\ \beta = 0.73890252752857741, \\ \alpha_1 = 175.18672767961545, \\ \alpha_2 = -206.28364424067430, \\ \alpha_3 = 413.29017809312039, \\ \alpha_4 = -427.58306042439581. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-58 と図 A-59 に示す。

例 4-I-3 の解

この例で指定したフィルタのパラメタの値はそれぞれ $n = 50$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-16$, $g_p = 1E-2$ である (例 4-I-2 と比べて, g_s の値を $1E-15$ から $1E-16$ に下げている)。その条件を満たす解として式 (43) が得られた。

$$(43) \quad \begin{cases} \tau_1 = -0.5, \tau_2 = -1.4, \tau_3 = -4.9, \tau_4 = -5.9, \\ z_2 = 0.14592721809167415, \\ z_1 = 0.61110848092101514, \\ \beta = 0.93709121223898141, \\ \alpha_1 = 1.9546378129488793, \\ \alpha_2 = -26.920052689841116, \\ \alpha_3 = 639.14392557923146, \\ \alpha_4 = -677.08425058642284. \end{cases}$$

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図 A-61 と図 A-62 に示す。

4. まとめ

実対称定値一般固有値問題の固有値が下端付近にある少数の固有対を近似して求める手段に、フィルタを利用して必要な範囲の固有値を持つ固有ベクトルの全体で張られる不変部分空間の基底の近似を構成する方法がある。今回の報告では、フィルタは少数のレゾルベントと恒等演算子の線形結合に Chebyshev 多項式を合成したものとした。そうして固有値分布の下端付近の固有値だけを必要とすることを利用して、フィルタの構成に用いるレゾルベントのシフトを最小固有値よりも小さい実数に制限する。その制限の下で、フィルタの伝達特性の形状を代表する 3 つのパラメタ μ , g_s , g_p の組の値を指定したときに、その条件を満たすフィルタの伝達関数 $g(t)$ をうまく構成する方法を扱った。

レゾルベントの数が幾つでもレゾルベントと恒等演算子の線形結合として最適なもの最良近似の理論から楕円有理関数を利用して解析的な式計算により構成できる。しかし複数のレゾルベントを用いる場合には必ず虚数のシフトが現れるので、その理論はシフトを実数に制限する今の場合には適用できない。我々は既に、用いる実数シフトのレゾルベントが 2 つ以下の場合については、連立代数方程式の実数解を代数的操作で求めることにより、指定されたパラメタの値を満たす伝達関数が存在するときにその具体的な構成を導く手順を得ていた。しかし実数シフトのレゾルベントを 3 つ以上用いる場合は、連立代数方程式の適切な実数解を代数的な操作で求めることは複雑になりまだできていない。そこで今回我々は、シフトが実数のレゾルベントを 3 つあるいは 4 つ用いる場合について、連立代数方程式の実数解を代数的な操作に依るのではなく、Remez 法と同様の反復法と人手での試行錯誤により求めることによりフィルタの伝達関数を具体的に構成する方法を試みた。そうして指定したパラメタの組の値に対して、それを満たす構成の具体例をいくつか示すことに成功し、その方法で得られた実数シフトのレゾルベントからなるフィルタを一般固有値問題の下端付近の固有対を求める計算に適用して近似固有対の残差の大きさの振る舞いをグラフに描いた。

ただし今回の方法ではいまのところ、伝達関数の形状を与える 3 つのパラメタ μ , g_s , g_p の組の値と使用する Chebyshev 多項式の次数 n を指定したときに、それらを満たす伝達関数がうまく求められない場合に、探索がまだ不十分であるからなのかそれとも存在しないからなのかを区別する方法がない。また今後はできれば探索方法をより自動的にすることが望ましい。さらに、今回の方法よりも自動的に解をより確実に求めることができる方法がないのかについても調査するべきであろう。

付 録

レゾルベントを4つ用いる場合の構成 (方式 II)

レゾルベント4つと恒等演算子の線形結合に対する伝達関数を式(38)とする。そうして β と α_j , τ_j , $j=1,2,3,4$ はすべて実数とし, 4つの極 τ_j はすべて負であるとする。有理関数 $y(t)$ についての制約条件は式(7)になる。フィルタの設計パラメータとして n , μ , g_s , g_p の値を指定する(ただし $1 < \mu$, $0 < g_s \ll g_p < 1$ である)。 $y(t)$ の閾値 y_ℓ と y_h は式(5)から計算で求める。

通過域 $t \in [0, 1)$ において $y(t)$ が最大値 y_h をとる点の座標を $t = z_3$ と $t = z_1$ とし, 最小値 y_ℓ をとる点の座標を $t = z_2$ とする(ただし $0 \leq z_3 < z_2 < z_1 < 1$ とする)。すると $y(t)$ は式(A.1)の5つの条件を満たす必要がある。

$$(A.1) \quad \begin{cases} y(z_3) = y_h, \\ y(z_2) = y_\ell, \\ y(z_1) = y_h, \\ y(1) = y_\ell, \\ y(\mu) = 1. \end{cases}$$

仮定する4つの極の位置 τ_j , $j=1,2,3,4$ と極値点の初期値の座標 z_3, z_2, z_1 から連立1次方程式(A.2)の数値が決まり, それを解くことにより β と α_j , $j=1,2,3,4$ の数値がそれぞれ求まる。それにより式(38)の $y(t)$ の定数の数値がすべて決まる。

(A.2)

$$\begin{bmatrix} 1/(z_3-\tau_1) & 1/(z_3-\tau_2) & 1/(z_3-\tau_3) & 1/(z_3-\tau_4) \\ 1/(z_2-\tau_1) & 1/(z_2-\tau_2) & 1/(z_2-\tau_3) & 1/(z_2-\tau_4) \\ 1/(z_1-\tau_1) & 1/(z_1-\tau_2) & 1/(z_1-\tau_3) & 1/(z_1-\tau_4) \\ 1/(1-\tau_1) & 1/(1-\tau_2) & 1/(1-\tau_3) & 1/(1-\tau_4) \\ 1/(\mu-\tau_1) & 1/(\mu-\tau_2) & 1/(\mu-\tau_3) & 1/(\mu-\tau_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_h \\ y_\ell \\ y_h \\ y_\ell \\ 1 \end{bmatrix}$$

こうして得られた $y(t)$ の通過域の内部 $[0, 1)$ での最大点, 最小点, 最大点の座標値がそれぞれ仮定した z_3, z_2, z_1 にちょうど一致していて, 通過域での最小値が y_ℓ になっていて, さらに阻止域 $[\mu, \infty)$ で $|y(t)|$ の値が1を越えることがなければ条件を満足する $y(t)$ の構成に成功したことになるが, 通過域の内部における極値点の座標が一致していない場合には区間 $[0, 1)$ での最大点と最小点の座標を求めてそれらを次回の z_1 と z_2, z_3 として用いて繰り返しの行なって収束させる(Remez法と同様の反復)。収束を得たときに阻止域での $|y(t)|$ の値の最大値が1を越えていたら構成は失敗であり, その場合には4つの極の位置 τ_j , $j=1,2,3,4$ を変えてさらに探索を行う。この探索は現在は人手による試行錯誤で行っている。指定したフィルタのパラメータ n , μ , g_s , g_p の値によっては, 条件を満たす解が存在しない場合があるが, 解が存在するかどうかを判定する手段は得られていない。

例4-IIの解 (4つのレゾルベントを用いる場合の方式 II)

実数シフトのレゾルベントを4つ用いる場合の構成(方式II)で得られたフィルタの例を1つだけ示す。指定したパラメータの組の値は $n = 63$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-12$, $g_p = 1E-1$ である。その条件を満たす解として式(A.3)が得られた。

(A.3)

$$\begin{cases} \tau_1 = -0.420, \tau_2 = -0.617, \tau_3 = -0.995, \tau_4 = -1.075, \\ z_3 = 0.06554\ 14265\ 33483\ 900, \\ z_2 = 0.29234\ 04793\ 99673\ 64, \\ z_1 = 0.70842\ 49925\ 96358\ 06, \\ \beta = -0.97891\ 04015\ 29457\ 29, \\ \alpha_1 = -8.42245\ 36308\ 00969\ 2, \\ \alpha_2 = 49.95291\ 83198\ 95732, \\ \alpha_3 = -390.72185\ 12457\ 4242, \\ \alpha_4 = 358.88151\ 30449\ 7295, \end{cases}$$

z_3, z_2, z_1 の初期値をそれぞれ0.2, 0.5, 0.8とした場合のRemez法と同様の反復による収束状況を表A.1に示す。

表 A.1 例4-II: Remez法と同様の反復での z_3, z_2, z_1 の値の収束

反復	z_3	z_2	z_1
0	0.2	0.5	0.8
1	0.0	0.32123334169460461	0.73899058362834156
2	0.042297743912916631	0.29247225118458271	0.70773677106447518
3	0.062360888396385126	0.29322036388333887	0.70854338823251426
4	0.065474324389370158	0.29235708406649530	0.70842775508902967
5	0.065541396354204044	0.29234048703301698	0.70842499381303787
6	0.065541426533483900	0.29234047939967364	0.70842499259635806
7	0.065541426533483900	0.29234047939967364	0.70842499259635806

有理関数 $y(t)$ とフィルタの伝達関数 $g(t)$ のグラフをそれぞれ付録の図A.64と図A.65に示す。

固有対の近似をフィルタを用いて求めた実験例について

実験に用いた例題は, 1辺の長さ π の立方体を領域とし, 境界で零固定条件を課したLaplace作用素 $-\Delta$ の固有値問題の有限要素法による離散で得られる実対称定値一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ で, その固有対で固有値が下端付近のものを求める問題である。有限要素法の要素は立方体を各辺方向をそれぞれ N_1+1, N_2+1, N_3+1 に等分した直方体とし, 要素内基底関数は最低次の3重線形関数を用いた。今回の実験ではどの例題も領域分割数をあまり大きくせずに $(N_1, N_2, N_3) = (40, 50, 60)$ とした。そのことから固有値問題の係数行列 A と B は次数が $N_1 N_2 N_3 = 120000$ で半帯幅は $1 + N_1 + N_1 N_2 = 2041$ である。この問題の固有値は3よりも大きいので固有値が区間 $[3, 30]$ にある固有対を求めた。該当する固有対の数は54である。区間を $[0, 30]$ にしない理由は, フィルタの伝達関数の値が通過域の端で下がっている場合に生じる不利益を見たいからである。最初にフィルタに与えるランダムなベクトルの数を100とし, 計算はすべて倍精度で行った。以降の各頁下段の図のグラフに近似固有対の相対残差の大きさ $\theta = \|A\mathbf{v} - \lambda B\mathbf{v}\|_2 / \|\lambda B\mathbf{v}\|_2$ の対数をフィルタの反復回数1から3までについて折れ線IT1, IT2, IT3でプロットした。

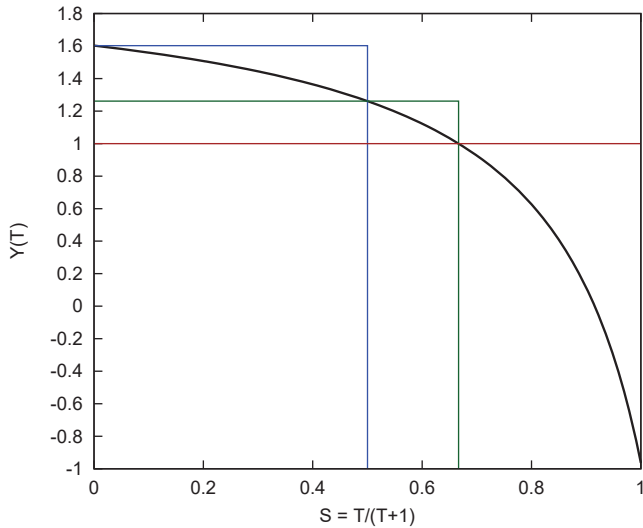


図 A.1 例 1-1 : 1 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 27, \mu = 2.0, g_s = 1E-12, g_p = 1E-4$)

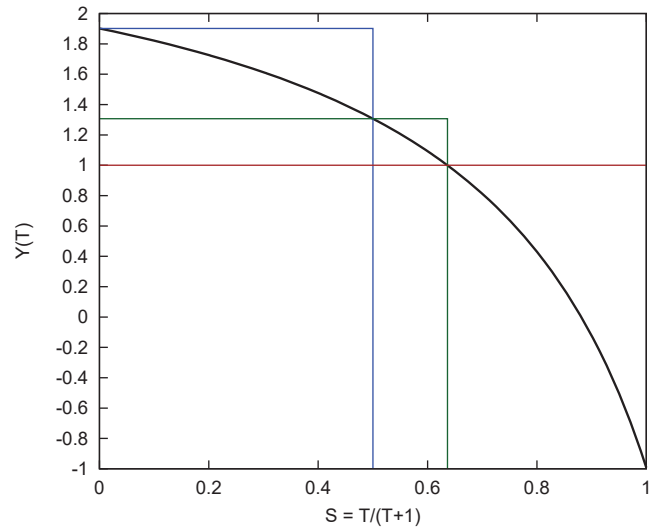


図 A.4 例 1-2 : 1 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 28, \mu = 1.75, g_s = 1E-15, g_p = 1E-6$)

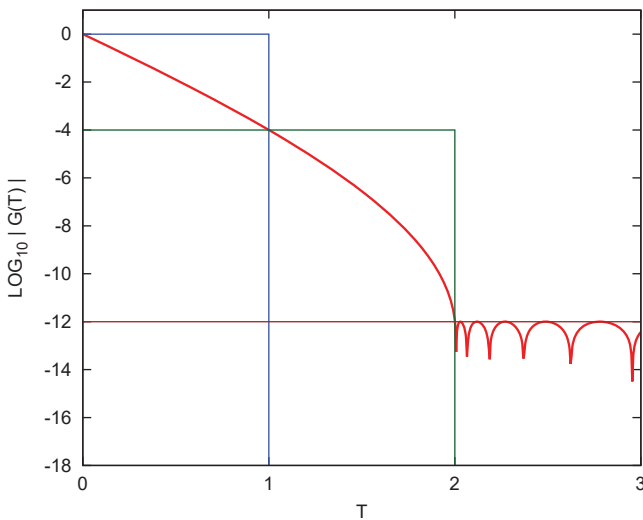


図 A.2 例 1-1 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 27, \mu = 2.0, g_s = 1E-12, g_p = 1E-4$)

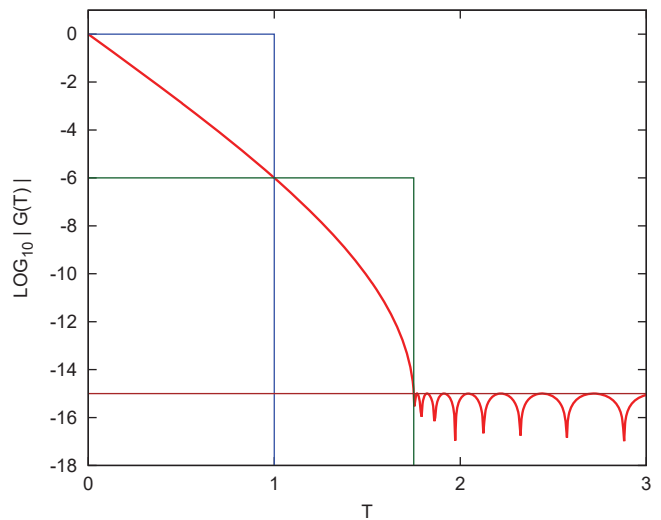


図 A.5 例 1-2 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 28, \mu = 1.75, g_s = 1E-15, g_p = 1E-6$)

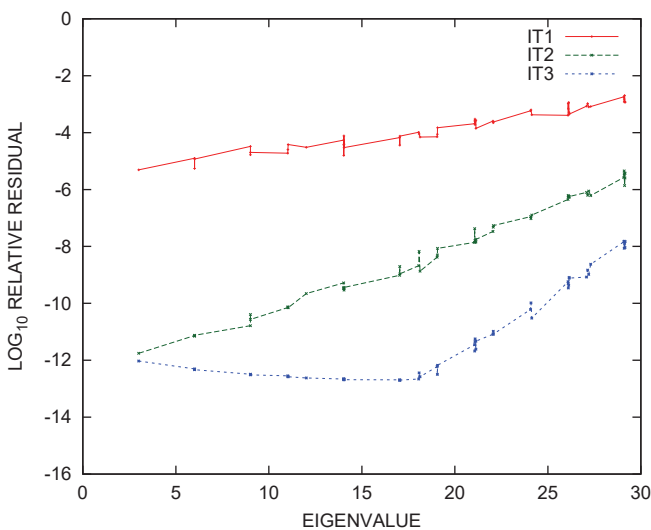


図 A.3 例 1-1 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 27, \mu = 2.0, g_s = 1E-12, g_p = 1E-4$)

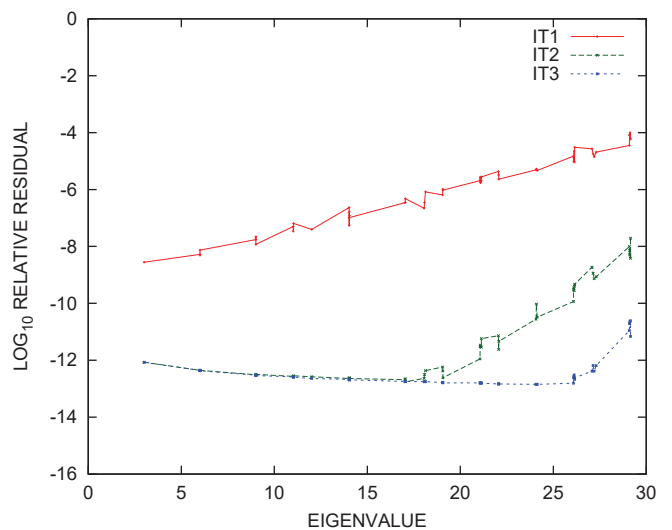


図 A.6 例 1-2 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 28, \mu = 1.75, g_s = 1E-15, g_p = 1E-6$)

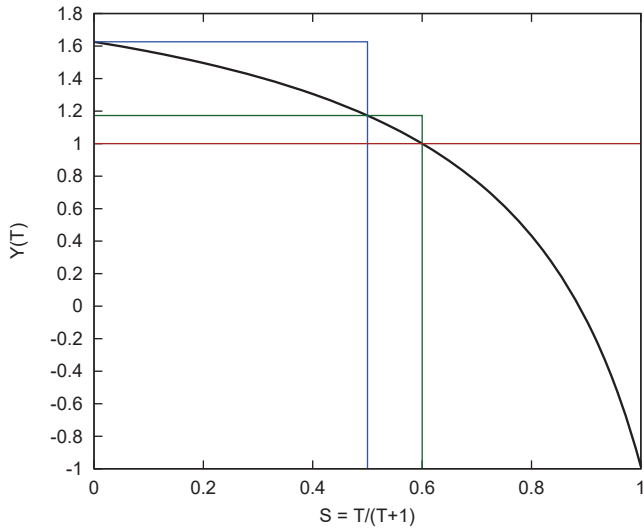


図 A-7 例 1-3 : 1 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 33$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-7$)

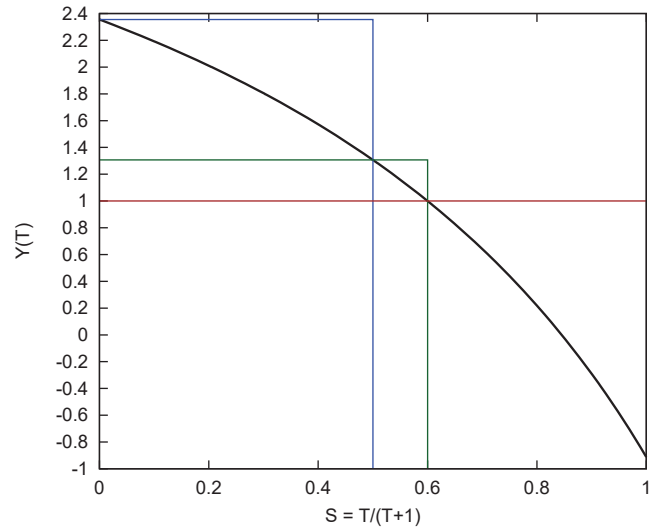


図 A-10 例 1-4 : 1 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 25$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-16$, $g_p = 1E-8$)

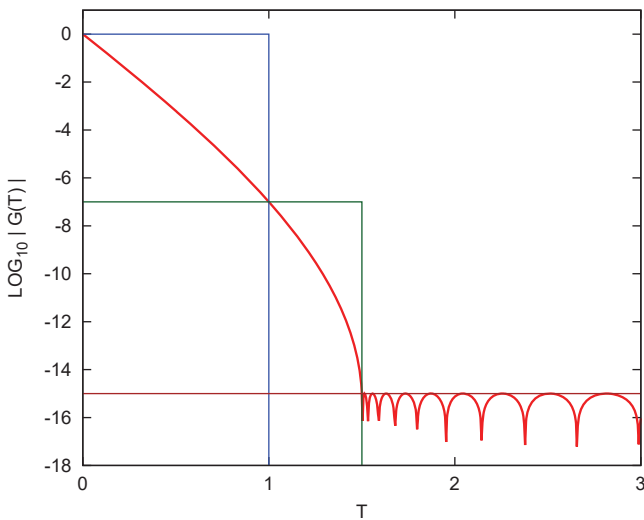


図 A-8 例 1-3 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 33$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-7$)

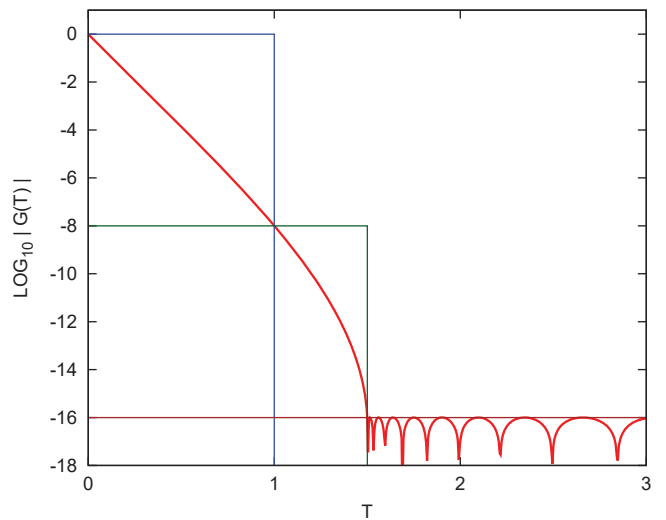


図 A-11 例 1-4 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 25$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-16$, $g_p = 1E-8$)

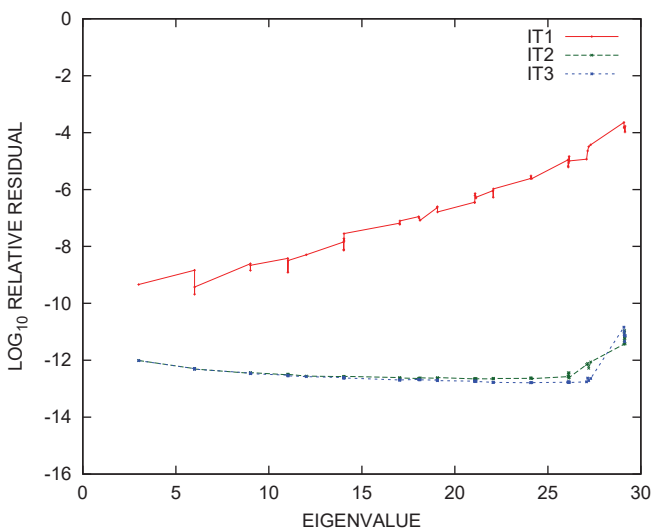


図 A-9 例 1-3 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 33$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-7$)

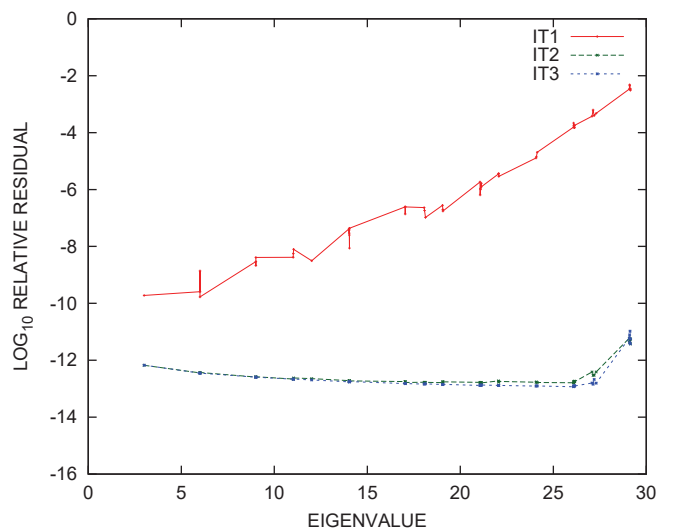


図 A-12 例 1-4 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 25$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-16$, $g_p = 1E-8$)

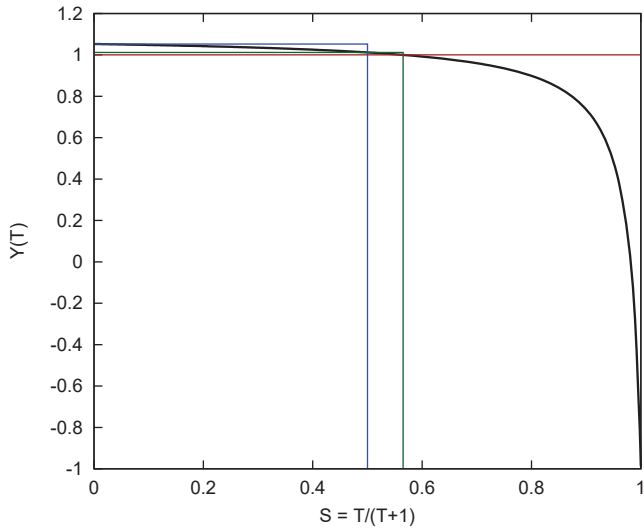


図 A-13 例 1-5 : 1 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 109$, $\mu = 1.3$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-8$)

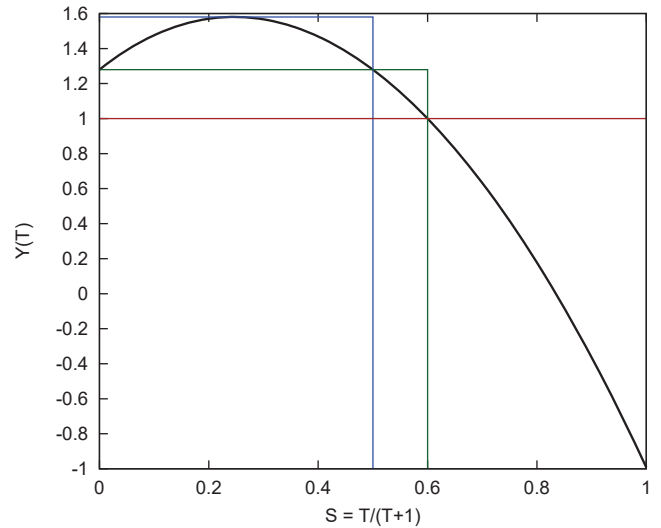


図 A-16 例 2-1 : 2 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 23$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-10$, $g_p = 1E-3$)

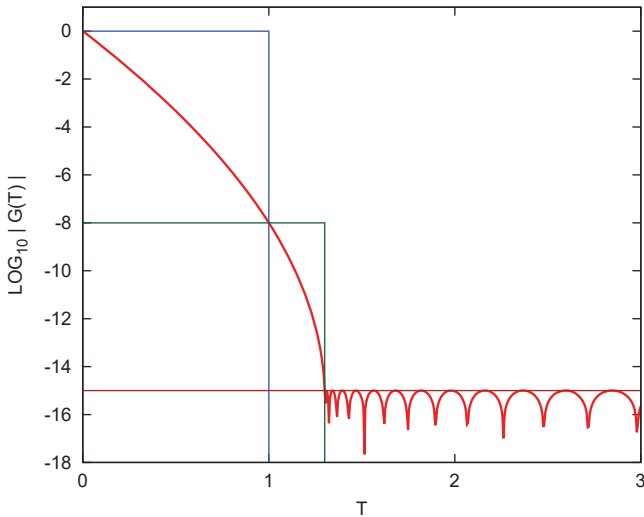


図 A-14 例 1-5 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 109$, $\mu = 1.3$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-8$)

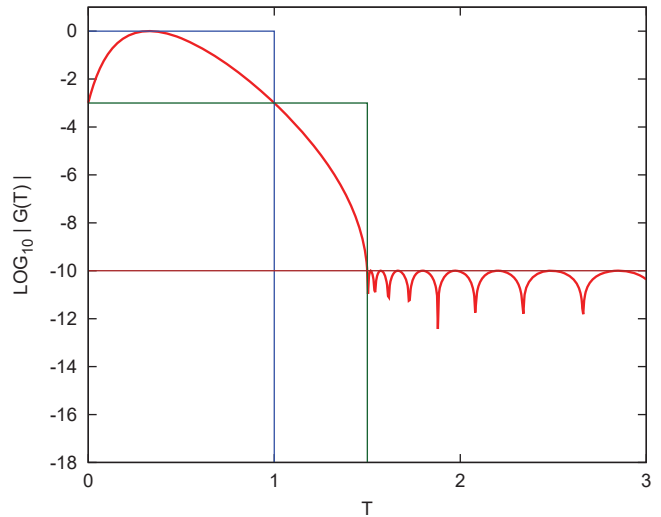


図 A-17 例 2-1 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 23$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-10$, $g_p = 1E-3$)

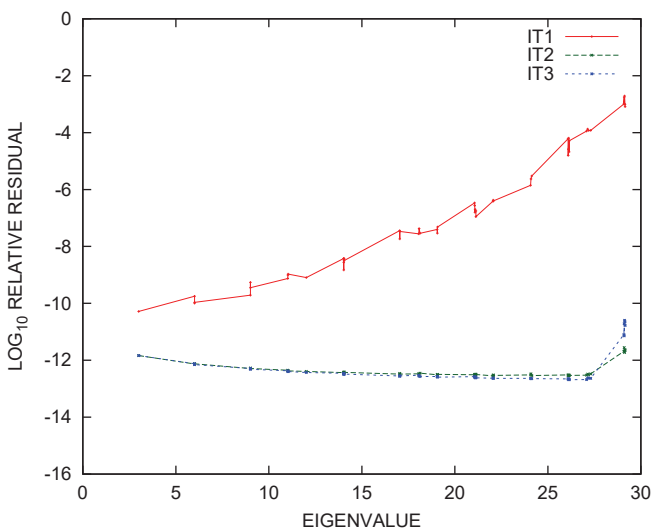


図 A-15 例 1-5 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 109$, $\mu = 1.3$, $g_s = 1E-15$, $g_p = 1E-8$)

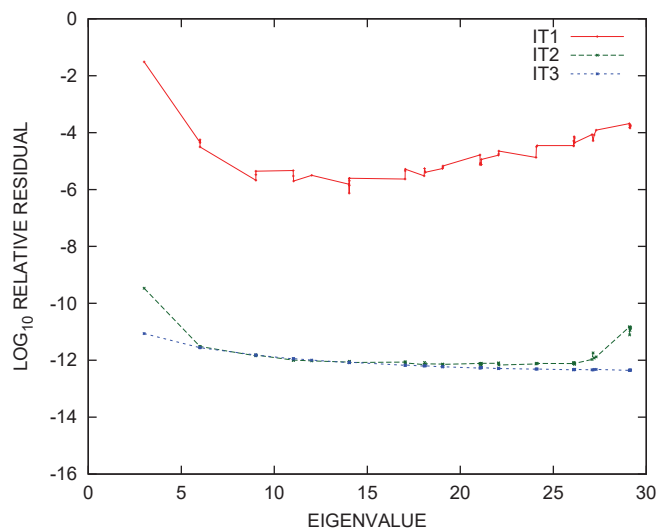


図 A-18 例 2-1 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 23$, $\mu = 1.5$, $g_s = 1E-10$, $g_p = 1E-3$)

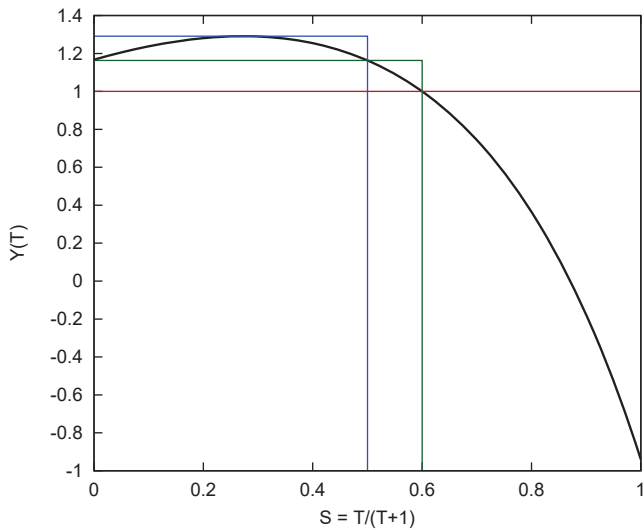


図 A-19 例 2-2 : 2 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

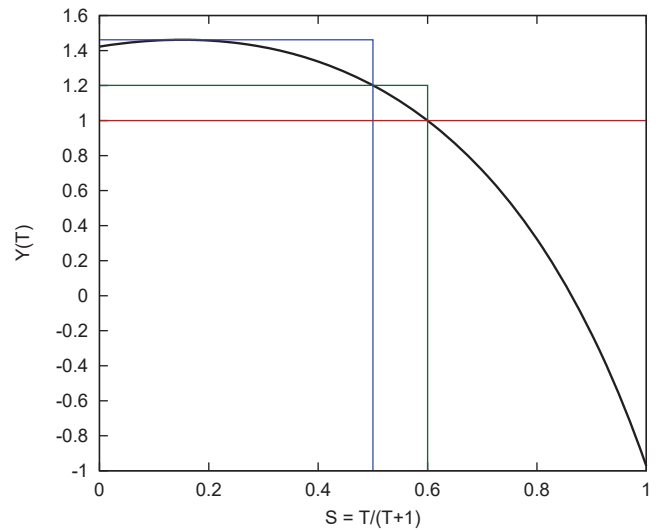


図 A-22 例 2-3 : 2 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-5$)

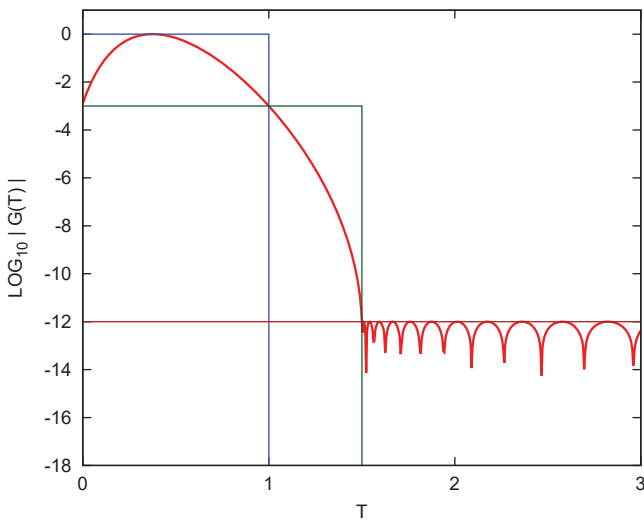


図 A-20 例 2-2 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

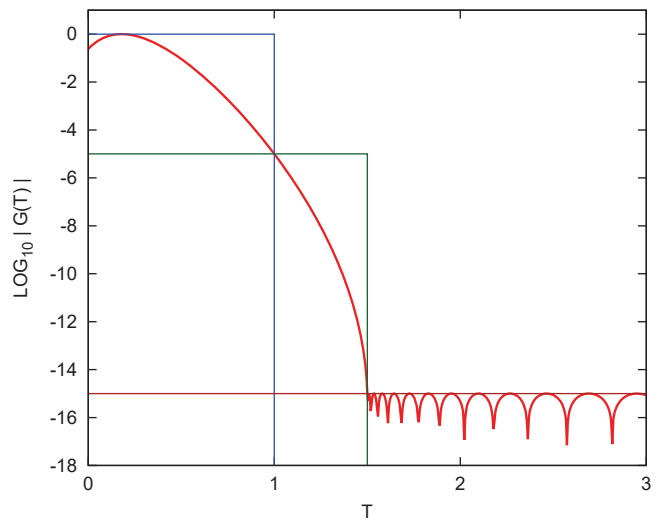


図 A-23 例 2-3 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-5$)

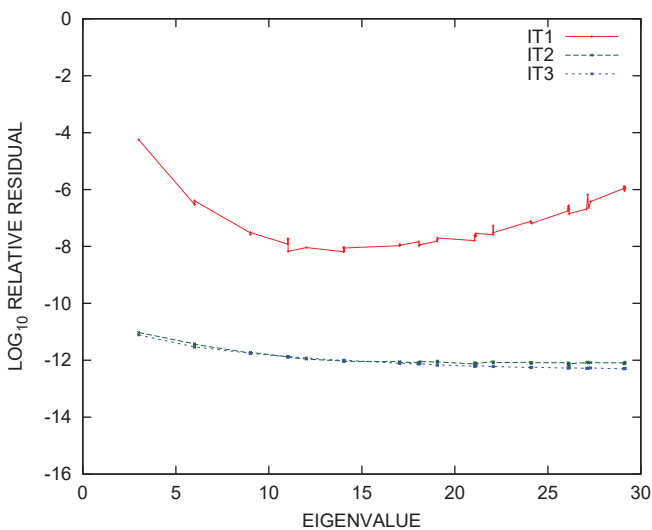


図 A-21 例 2-2 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

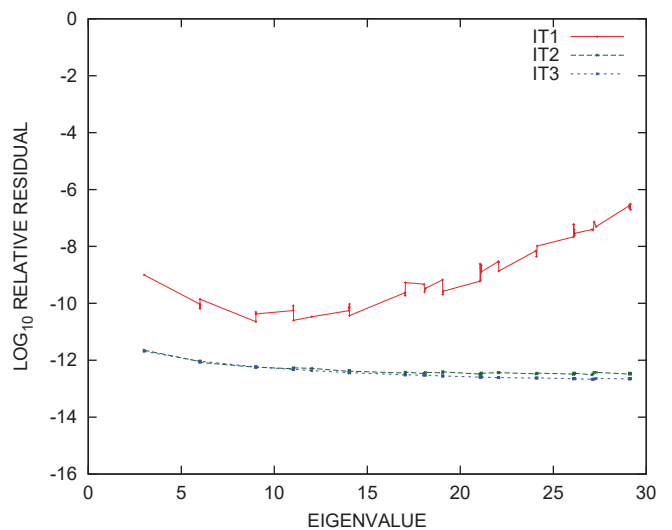


図 A-24 例 2-3 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 38, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-5$)

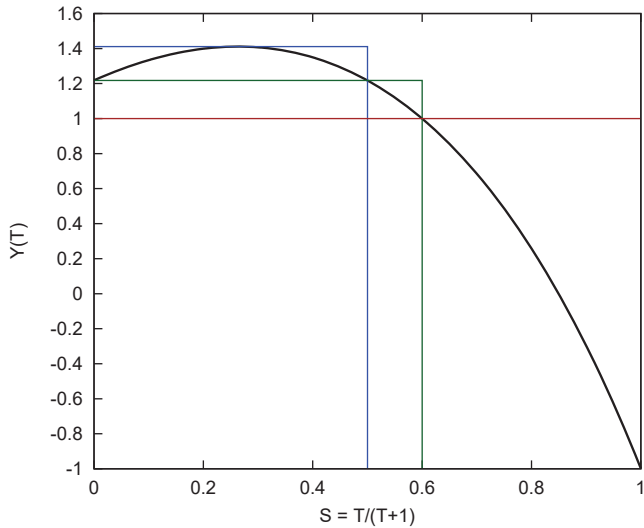


図 A-25 例 2-4 : 2 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1.1E-15, g_p = 1E-4$)

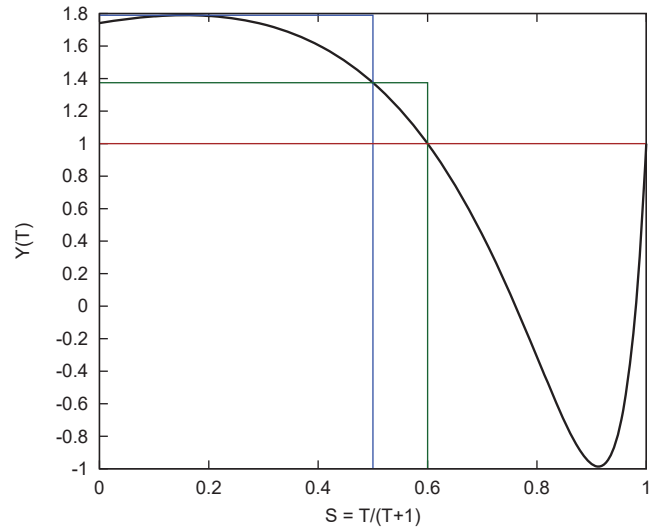


図 A-28 例 3-I-1 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-3$)

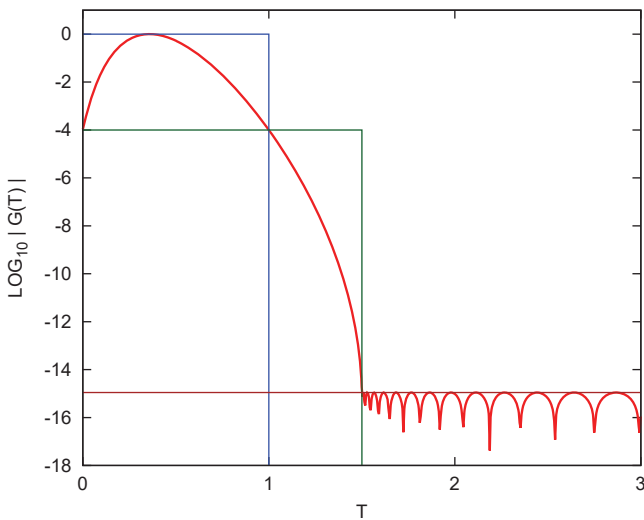


図 A-26 例 2-4 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1.1E-15, g_p = 1E-4$)

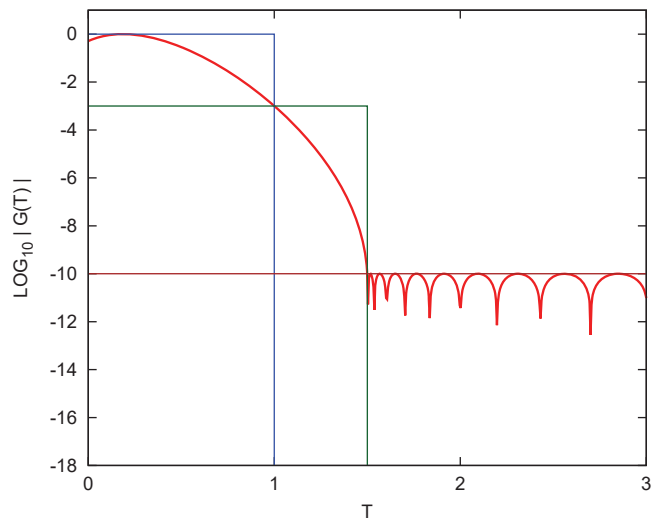


図 A-29 例 3-I-1 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-3$)

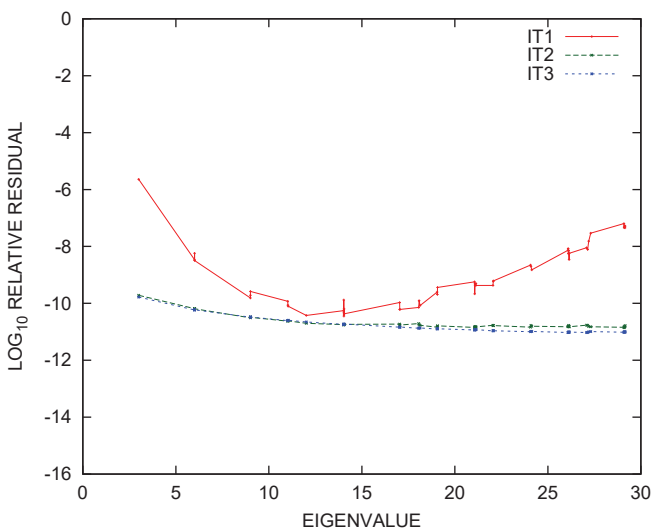


図 A-27 例 2-4 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1.1E-15, g_p = 1E-4$)

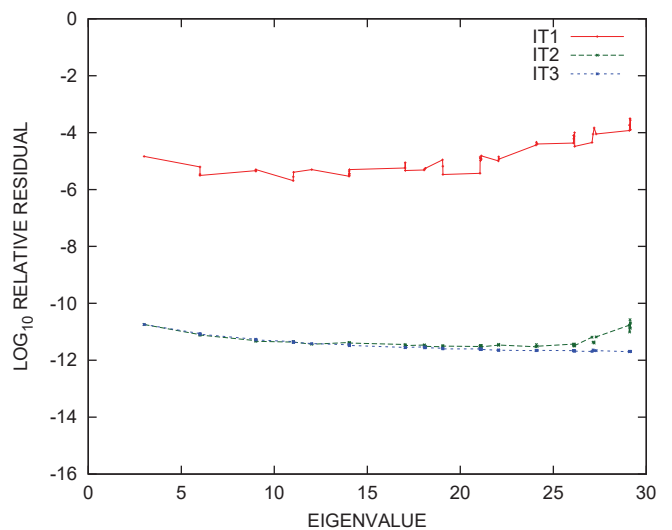


図 A-30 例 3-I-1 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-3$)

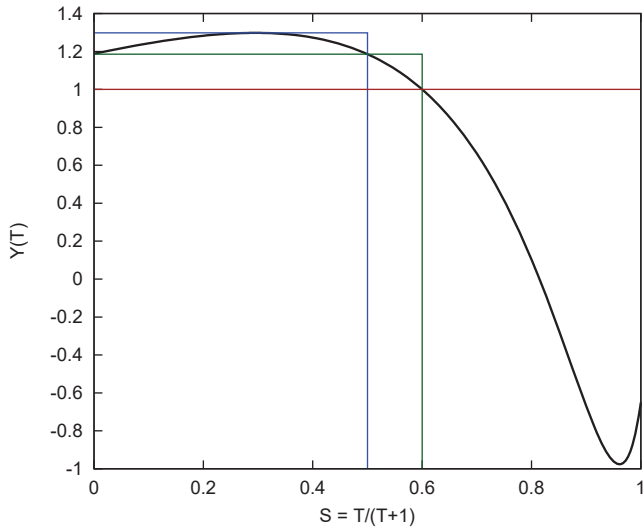


図 A-31 例 3-I-2 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 3E-10, g_p = 1E-2$)

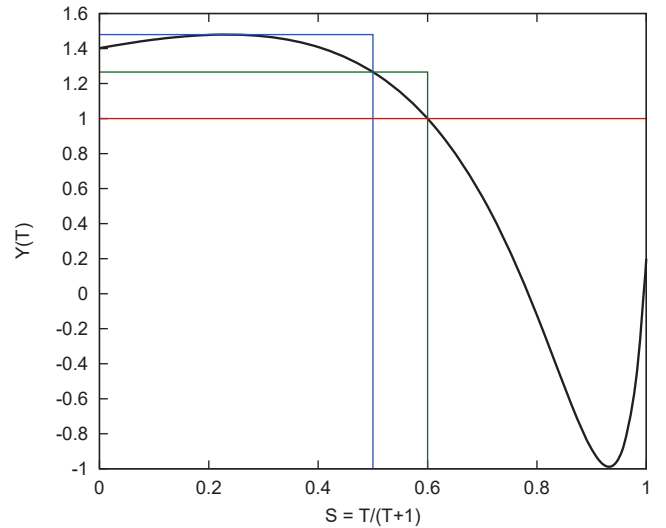


図 A-34 例 3-I-3 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

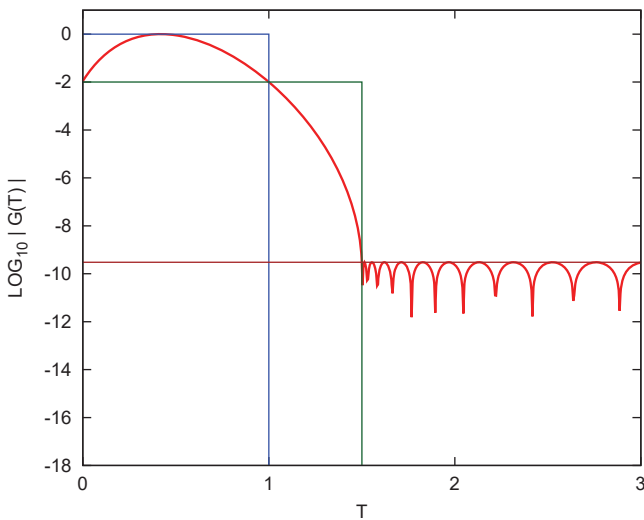


図 A-32 例 3-I-2 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 3E-10, g_p = 1E-2$)

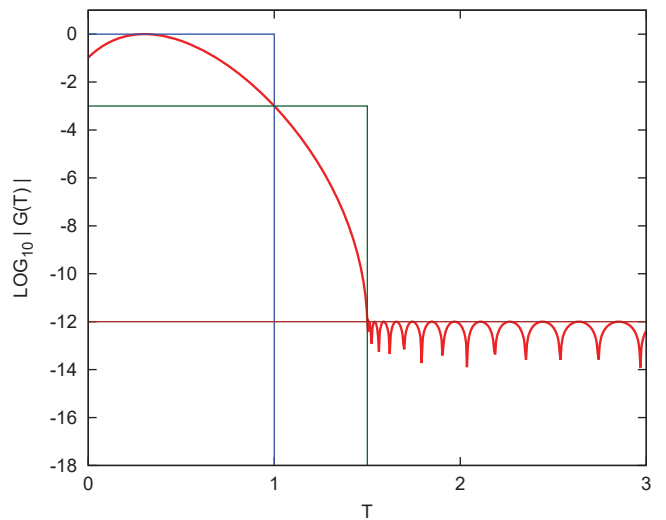


図 A-35 例 3-I-3 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

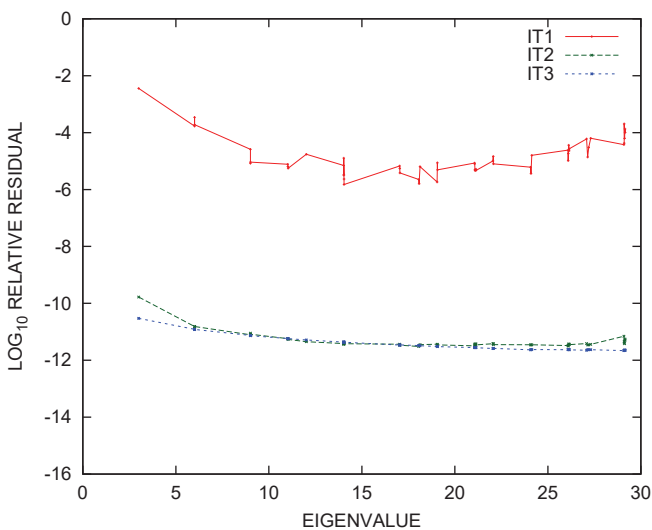


図 A-33 例 3-I-2 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 3E-10, g_p = 1E-2$)

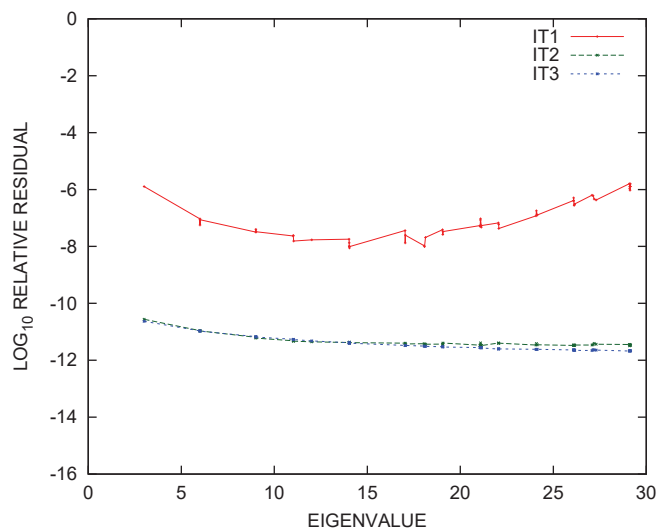


図 A-36 例 3-I-3 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-3$)

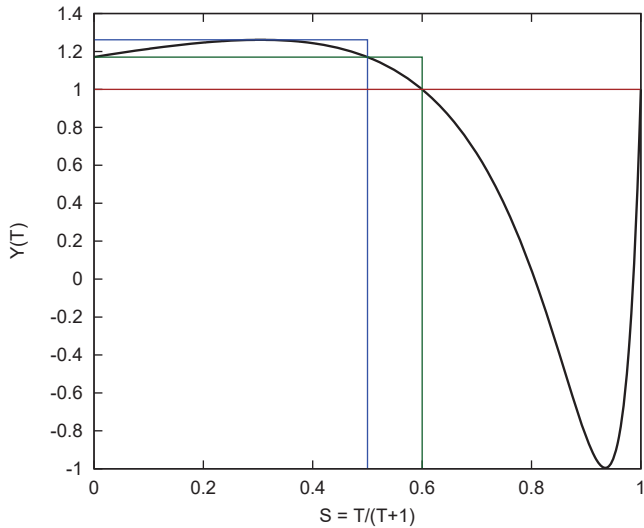


図 A-37 例 3-I-4 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 5E-3$)

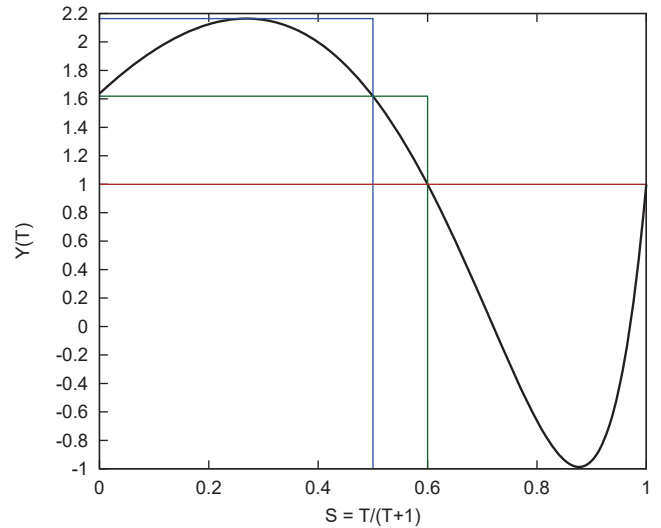


図 A-40 例 3-I-5 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1.2E-12, g_p = 1E-3$)

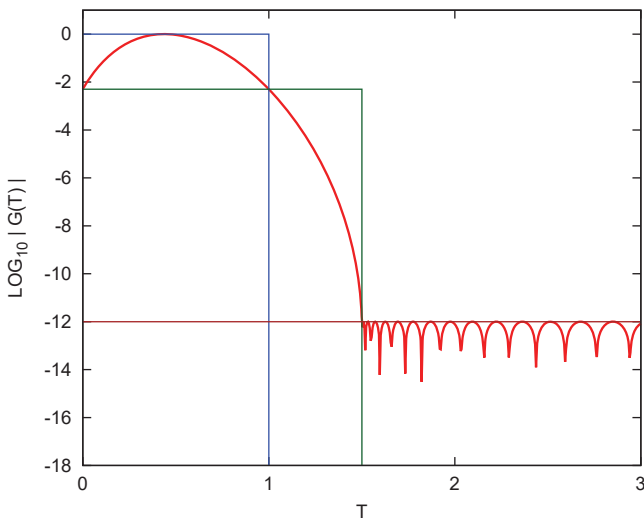


図 A-38 例 3-I-4 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 5E-3$)

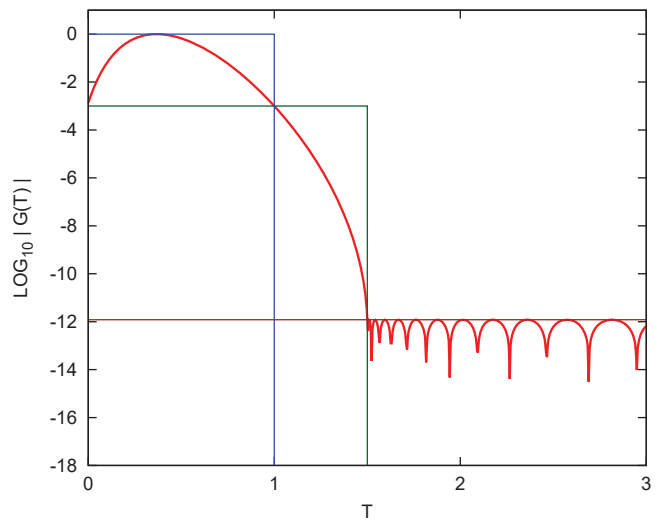


図 A-41 例 3-I-5 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1.2E-12, g_p = 1E-3$)

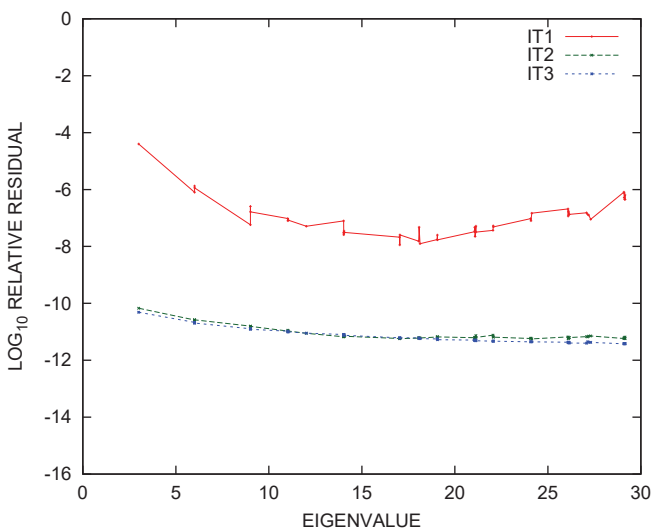


図 A-39 例 3-I-4 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 5E-3$)

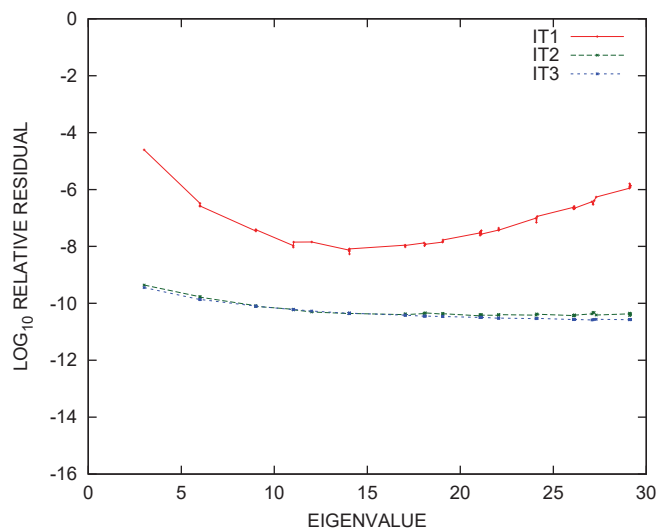


図 A-42 例 3-I-5 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 20, \mu = 1.5, g_s = 1.2E-12, g_p = 1E-3$)

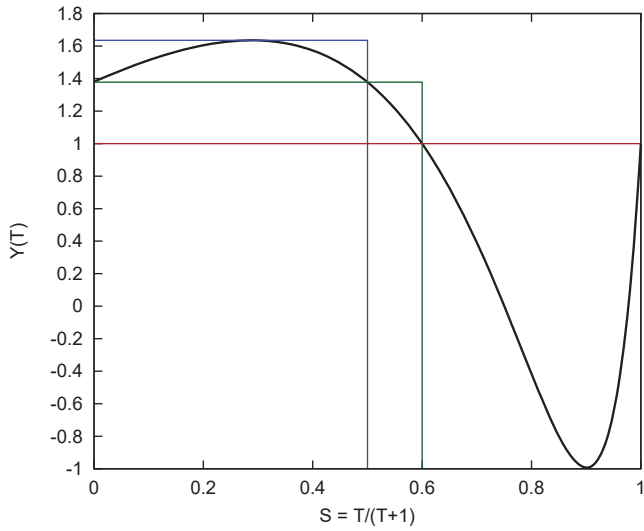


図 A-43 例 3-I-6 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 2E-14, g_p = 1E-3$)

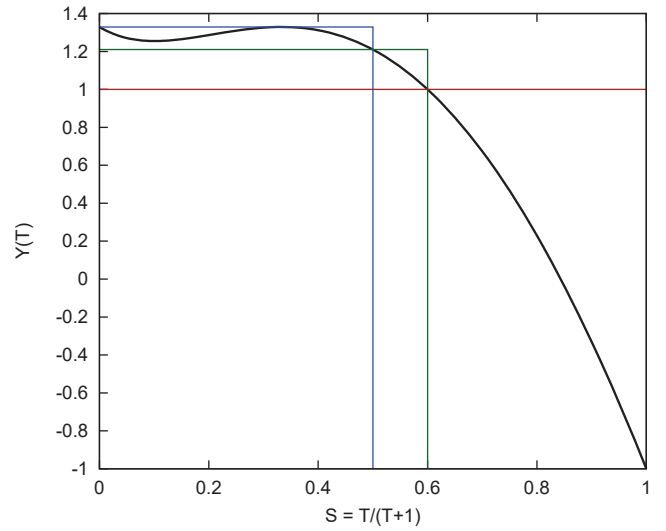


図 A-46 例 3-II-1 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-2$)

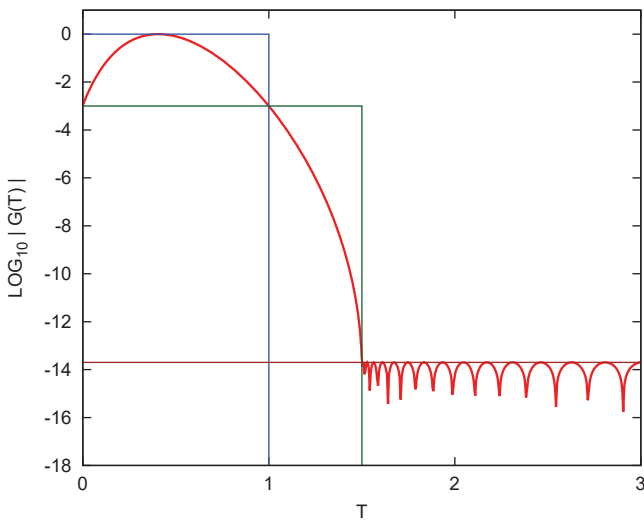


図 A-44 例 3-I-6 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 2E-14, g_p = 1E-3$)

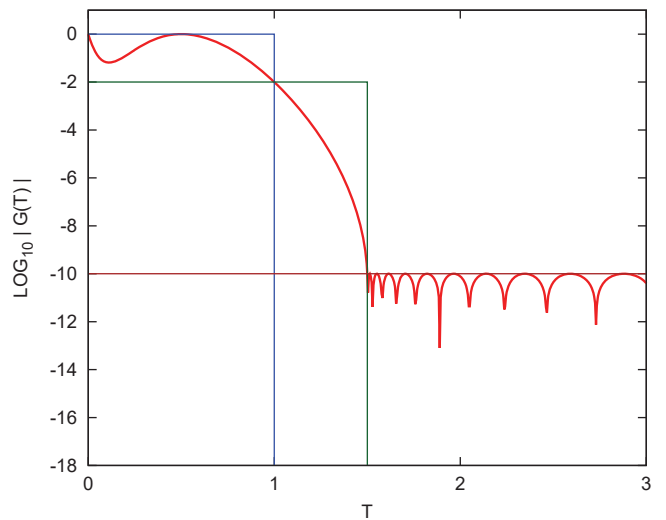


図 A-47 例 3-II-1 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-2$)

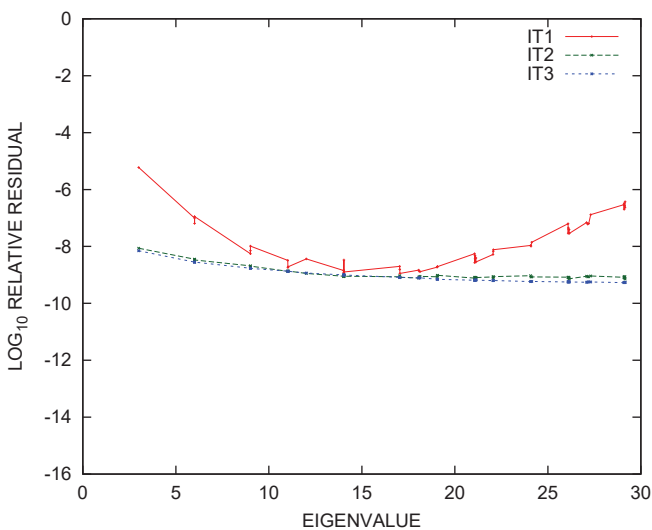


図 A-45 例 3-I-6 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 2E-14, g_p = 1E-3$)

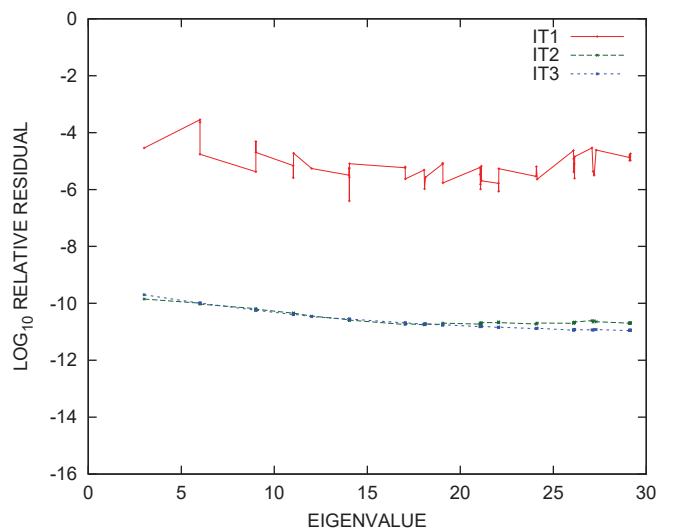


図 A-48 例 3-II-1 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 30, \mu = 1.5, g_s = 1E-10, g_p = 1E-2$)

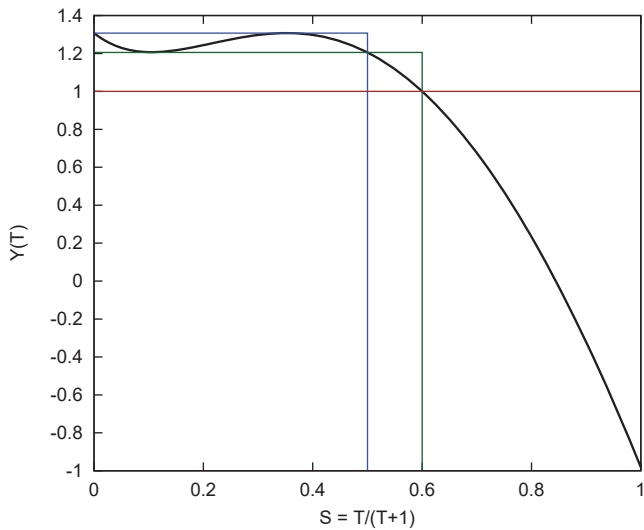


図 A-49 例 3-II-2 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 34, \mu = 1.5, g_s = 1E-11, g_p = 1E-2$)

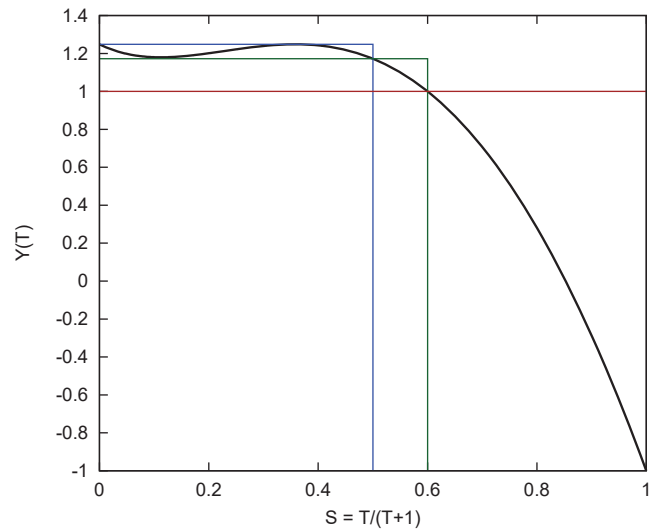


図 A-52 例 3-II-3 : 3 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t + 1)$
 ($n = 41, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

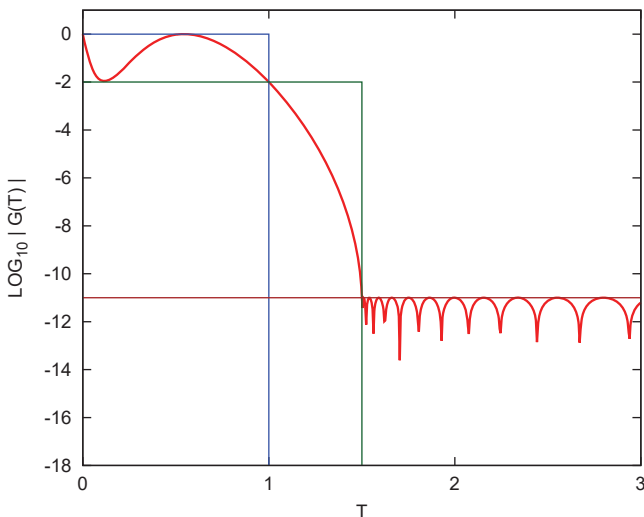


図 A-50 例 3-II-2 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 34, \mu = 1.5, g_s = 1E-11, g_p = 1E-2$)

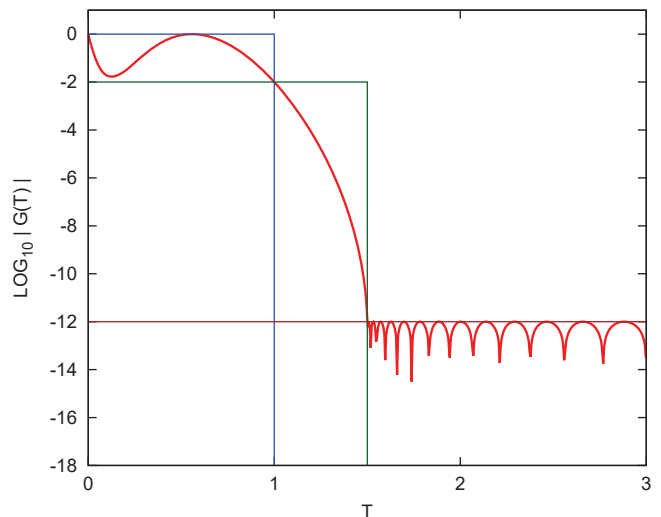


図 A-53 例 3-II-3 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 41, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

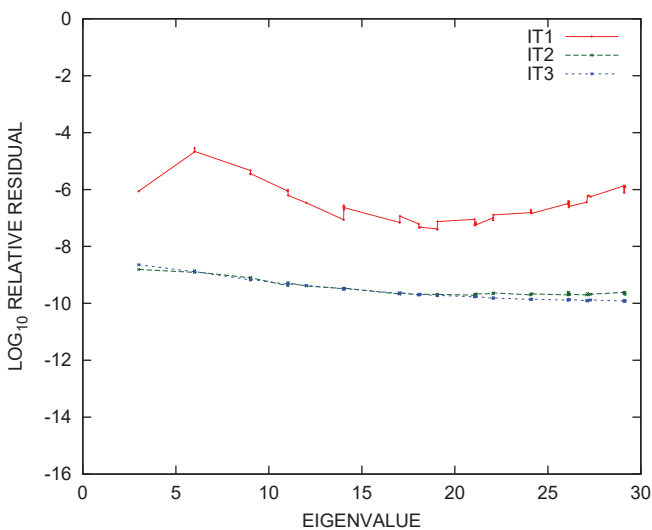


図 A-51 例 3-II-2 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 34, \mu = 1.5, g_s = 1E-11, g_p = 1E-2$)

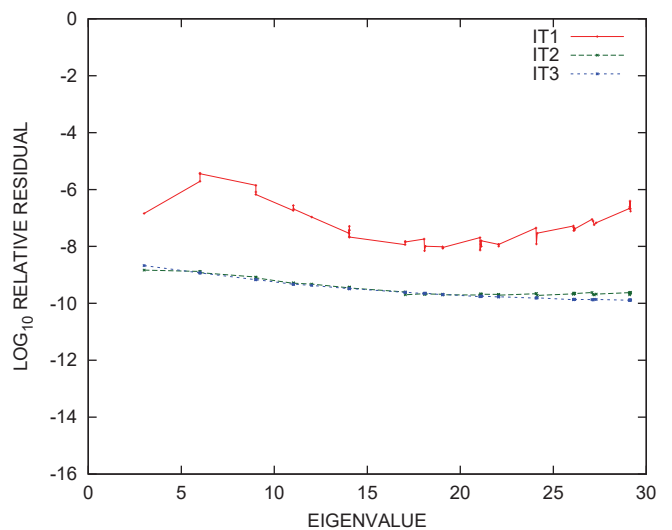


図 A-54 例 3-II-3 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 41, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

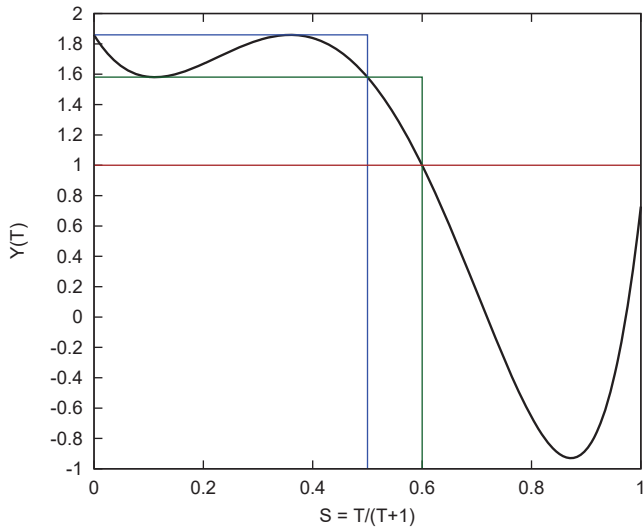


図 A-55 例 4-I-1: 4 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 23, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

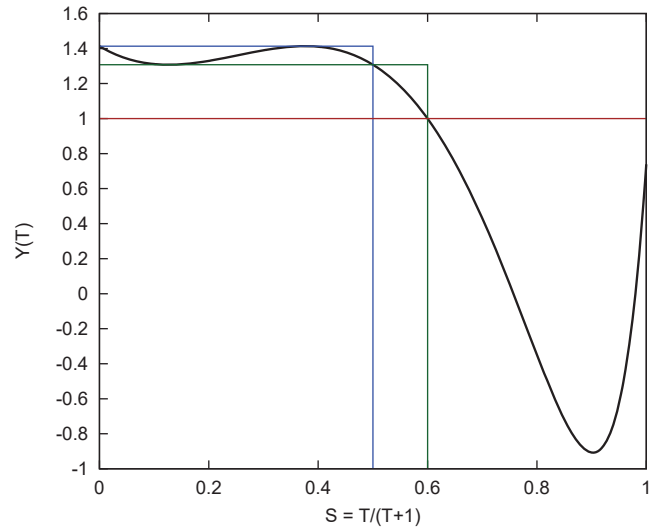


図 A-58 例 4-I-2: 4 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-2$)

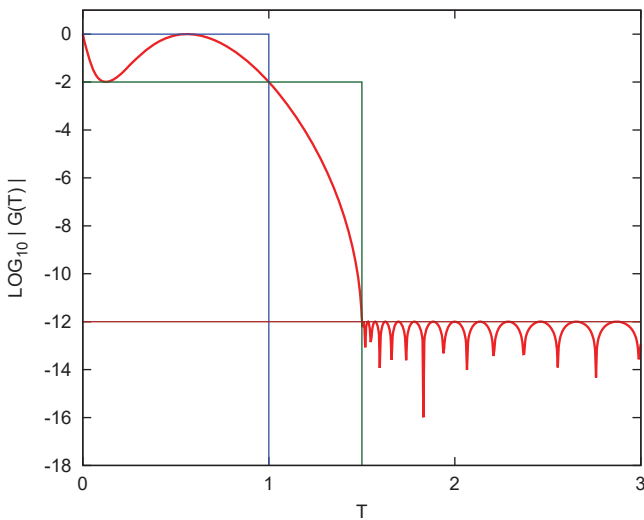


図 A-56 例 4-I-1: フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 23, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

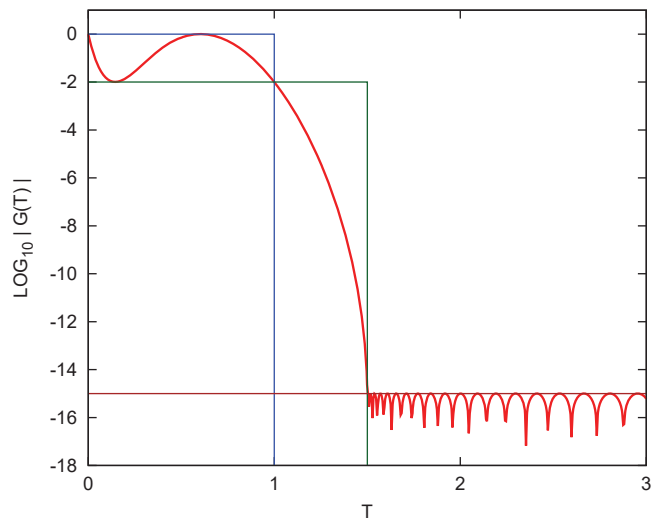


図 A-59 例 4-I-2: フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-2$)

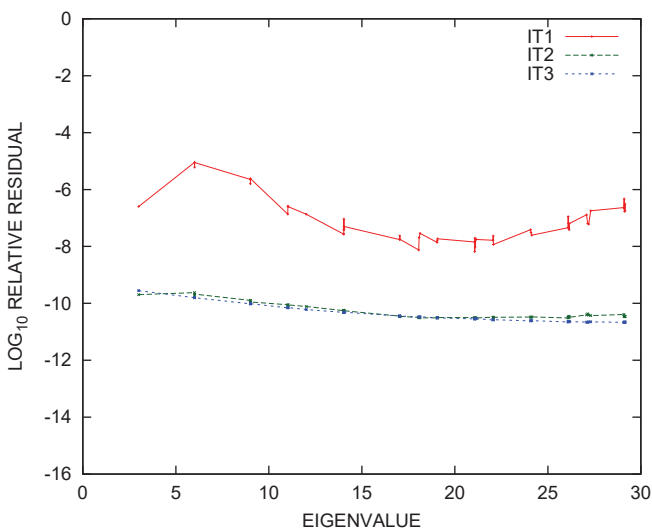


図 A-57 例 4-I-1: 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 23, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-2$)

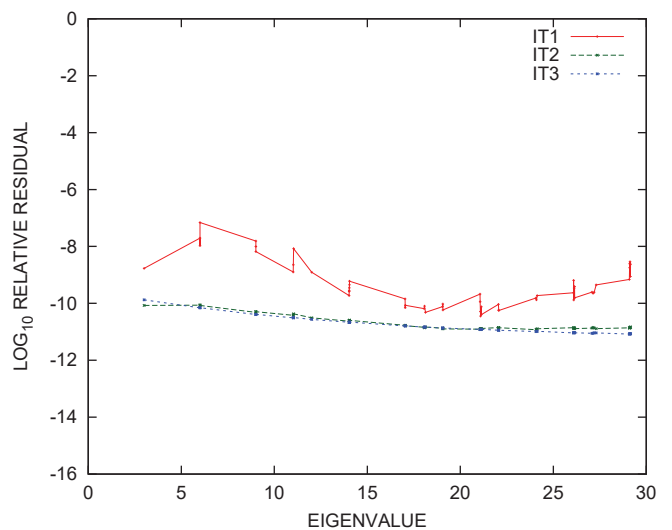


図 A-60 例 4-I-2: 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 40, \mu = 1.5, g_s = 1E-15, g_p = 1E-2$)

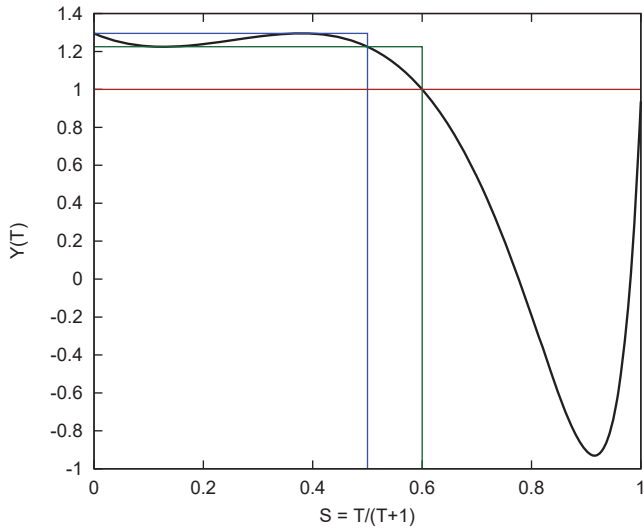


図 A-61 例 4-I-3 : 4 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 50, \mu = 1.5, g_s = 1E-16, g_p = 1E-2$)

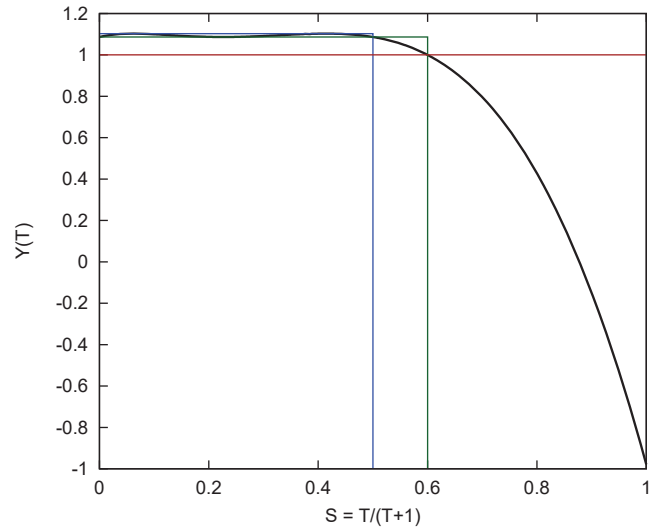


図 A-64 例 4-II : 4 次の有理関数 $y(t)$ vs. $s = t/(t+1)$
 ($n = 63, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-1$)

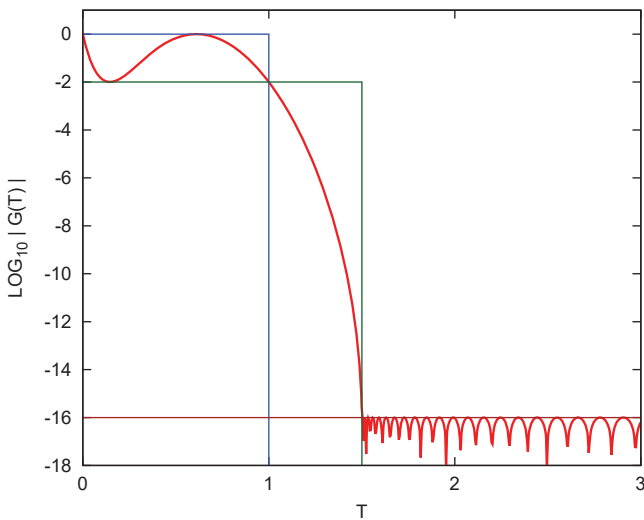


図 A-62 例 4-I-3 : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 50, \mu = 1.5, g_s = 1E-16, g_p = 1E-2$)

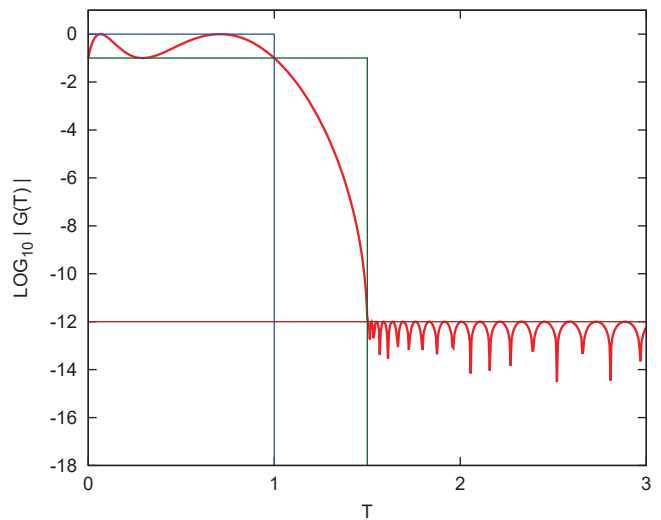


図 A-65 例 4-II : フィルタ伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の対数
 ($n = 63, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-1$)

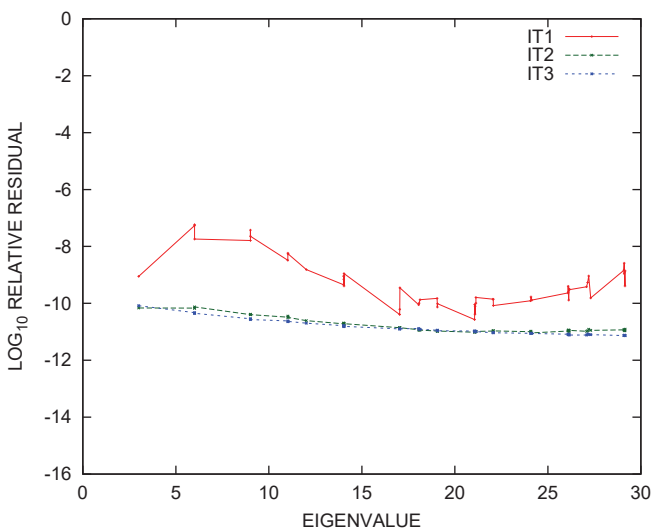


図 A-63 例 4-I-3 : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 50, \mu = 1.5, g_s = 1E-16, g_p = 1E-2$)

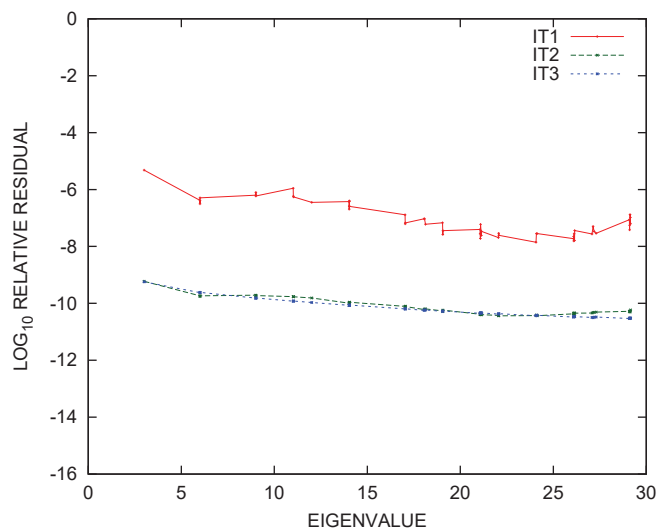


図 A-66 例 4-II : 近似固有対の相対残差の大きさの対数
 ($n = 63, \mu = 1.5, g_s = 1E-12, g_p = 1E-1$)

実験例

1 辺の長さが π の立方体の固有値を有限要素法で求める例題で、要素分割が $(N_1, N_2, N_3) = (40, 50, 60)$ である場合に固有値が区間 $[3, 30]$ にある 54 個の固有対の近似を最初にランダムなベクトル 100 個から始めてフィルタを利用して求めた場合の経過時間の例を表 A.2 に示す。

表中の K はフィルタに使用したレゾルベントの数であり、 n は Chebyshev 多項式の次数である。フィルタ 1 回の適用の中では K 個のレゾルベント線形結合を作用させるベクトルの組に適用する処理が n 回繰り返される。表中の IT1, IT2, IT3 の値はフィルタを反復した回数が 1 から 3 のそれぞれの場合についての必要な固有対の近似を求めるのに要した経過時間（単位は秒）である。

計算に用いたシステムは、東京大学情報基盤センターの Oakbridge-CX の 1 ノードである。そのノードの構成は 2 つの CPU から成り、各 CPU は Intel Xeon Platinum 8280(Cascade Lake, 28 コア, 2.7GHz) である。ノード内の共有主記憶は DDR4 で容量が 192GiByte であり、ノードの理論最大性能は約 4.8TFlops である。計算に使用したコンパイラは Intel Fortran version 19.1.3.304 である。

計算に用いたプログラムのソースコードはすべて Fortran90 言語で書いたものであり、外部のライブラリコードは使用していない。レゾルベントを実現するための連立 1 次方程式の直接解法には実対称帯行列に対する修正 Cholesky 分解を用いている。現在のプログラムは並列化についてはなるべくブロック化をすること以外には特別なことはしておらず、OpenMP のディレクティブを Fortran のソースコードに挿入することにより行っている。

表 A.2 フィルタ対角化全体の経過時間の例
 $(N_1, N_2, N_3) = (40, 50, 60)$, $nv=100$

フィルタ	K	n	IT1	IT2	IT3
例 1-1	1	27	40.0	69.0	99.3
例 1-2	1	28	39.8	72.2	100.4
例 1-3	1	33	45.5	80.5	114.9
例 1-4	1	25	36.9	63.3	89.0
例 1-5	1	109	127.4	240.2	351.6
例 2-1	2	23	58.6	102.2	141.6
例 2-2	2	38	85.3	156.0	222.5
例 2-3	2	38	84.6	153.8	218.9
例 2-4	2	40	88.2	161.6	230.1
例 3-I-1	3	20	73.8	126.4	178.3
例 3-I-2	3	30	100.2	177.2	254.6
例 3-I-3	3	30	99.8	177.5	254.2
例 3-I-4	3	40	126.5	228.4	330.9
例 3-I-5	3	20	75.4	127.5	177.7
例 3-I-6	3	30	100.0	179.7	254.4
例 3-II-1	3	30	100.0	178.6	256.2
例 3-II-2	3	34	112.3	198.7	283.5
例 3-II-3	3	41	129.5	234.1	338.7
例 4-I-1	4	23	104.1	179.4	255.8
例 4-I-2	4	40	161.4	294.7	419.7
例 4-I-3	4	50	191.4	355.9	516.7
例 4-II	4	63	234.5	442.2	641.5

参考文献

[1] Ricardo Pachón: “Algorithms for Polynomial and Rational Approximation”, Thesis of Oxford University (2010), Chap.6.3 ‘Location of Extrema:from a trial function to a reference’.