Vol.2022-QS-5 No.32
2022/3/25

2次元格子に集積化された量子ビット間における エンタングルメント蒸留プロトコルの提案

前田 雄也[1,2,a)] 鈴木 泰成[2,3] 小林 俊輝[1,4] 小林 史佳[1] 生田 力三[1,4] 山下 眞[4] 山本 俊[1,4] 徳永 裕己[2]

概要：2 者間で誤り耐性のある量子通信や分散型量子計算を行うには， 忠実度の高いエンタングルメントが共有されている必要がある．この研究では 2 次元格子上に集積化された物質量子ビットによってエンタングルメントの蒸留を行うことで高速に高い忠実度のエンタングルした量子ビットを用意する手法を提案する．2 次元正方格子上で蒸留を行うためには， 格子上の量子ビットを近付ける必要があり， 全体での移動距離を小さくすることによって高い忠実度のエンタングルメントを蒸留することが出来る．本講演ではマッチング問題に帰着した移動距離の最小化方法， 及び， ベル状態の生成率や 2 次元格子のサイズなどいくつかのパラメーターを変えた下で達成可能な忠実度を数値計算し， これをもとに量子誤り訂正に必要な量子デバイスの性能を明らかにする．

Entanglement distillation protocol for two-dimensional qubit array

Abstract: We need high-fidelity entangled states for demonstrating fault-tolerant quantum computation and communication. This paper investigates an entanglement-distillation protocol for a two-dimensional qubit array that allows nearest-neighbor interactions. To distill the pair of entangled qubits without losing their fidelities in a 2D-integrated qubit array, we need to minimize the number of operations to let qubits be close to another one. We present an efficient protocol for 2D-integrated qubits by reducing the optimization problem into the graph matching problems. We also numerically show the performance of our protocol and its dependency on the device parameters.

1. Introduction

量子情報処理は通常の情報処理に比べ高効率な計算やセキュアな通信を可能とするため， その実現に向けた開発が近年盛んに行われている [1]．量子ビットは未知の状態に対するコピーが不可能なため， 距離に応じて一定の確率で損失が生じる通信路で量子通信を行うには， 後述する通信の信頼性を確保するためのプロトコルが必要となる [2], [3], [4], [5]．計算のみが目的である場合も， 量子計算に信頼性を確保する量子誤り訂正では符号化のために数百倍の量子ビットが必要となり， 現在有望とされる量子デバイスの集積度には技術的な限界があると考えられるため， 一定以上大規模な問題を解くには分散量子計算を導入するために量子デバイス間の通信が必要となる [6]．従って， いかに離れた量子デバイス間で高速に信頼性のある量子通信ができるかは， 広範な量子情報処理の応用における効率を決める重要な要素となる．

距離の離れた個々の量子デバイスで信頼性のある量子通信を行う際には， エンタングルメントを共有しこれを消費して離れた量子ビットを転送する量子テレポーテーションを用いるのが一般的である [2], [3], [4]．また， エンタングルメントを用いれば， 離れた二つの量子ビットに対する操作を行う量子ゲートテレポーテーションも可能となる．これらの非局所操作の忠実度は事前に共有されたエンタングルメントの忠実度が高いほど高くなるため， 量子情報処理では高い忠実度のエンタングルメントを効率的に共有する必要がある [6]．忠実度の高いエンタングルメントの生成は， 誤りのある量子通信とベル測定によって忠実度の低いエンタングルメントを生成するエンタングルメント生成と， 局所量子操作と古典通信で忠実度の低いエンタング

[1] 大阪大学 大学院基礎工学研究科
[2] NTT コンピュータ&データサイエンス研究所
[3] JST さきがけ
[4] 大阪大学 量子情報・量子生命研究センター
[a)] maeda-yuya@qi.mp.es.osaka-u.ac.jp

ルした量子ビットから忠実度の高いエンタングルメントを生成するエンタングルメント蒸留 [2] の組み合わせで実現できる．このプロトコルにより，忠実度が 0.5 より大きいエンタングルした量子ビットを十分な数用意でき，かつ，もし完全な局所操作と古典通信が可能であれば，任意の忠実度のエンタングルメントを生成することが出来る．

現実には量子ビットは有限の寿命を持ち，局所操作の忠実度も 100%ではないため，達成可能なエンタングルした量子ビットの状態の忠実度には限界がある．具体的にはエンタングルメント生成に時間を要したり，エンタングルメント蒸留で多くの量子操作を用いると，この間に生じるノイズで最終的に生成されるエンタングルした量子ビットの忠実度は小さくなってしまう．このため，信頼性のある量子情報処理を高速に行うには，デバイスに最適化されたエンタングルメント生成と蒸留のプロトコルが必要となる．エンタングルメントの生成レートは空間多重化により並列にベル測定を行うことで素朴に改善できる．特に近年は超伝導回路 [7]，中性原子 [8] などで二次元的な集積化が進んでおり，これらで空間多重化されたベル測定を行うことで高速なエンタングルメント生成が可能になると期待されている．一方，このように二次元的に集積化された量子デバイスのほとんどでは，蒸留において利用可能な操作が最近接の量子ビット間の相互作用のみに限定される．従って，蒸留を行うプロトコルはこうした制約に最適化されたものであることが望ましい．しかし，こうした二次元的に集積化された量子デバイスで高効率にエンタングルメント蒸留を行うプロトコルはこれまで提案されていなかった．

本研究では 2 次元正方格子状に量子ビットを集積化することによって蒸留プロトコルを空間多重化し，高効率なエンタングルメント蒸留プロトコルを提案する．本プロトコルでは正方格子状に並べられた量子ビットで多重化されたベル状態の生成を行い，確率的に成功したベル状態を移動し蒸留することを繰り返し，所望の数と忠実度のベル状態を生成する．本手法では高い忠実度のベル状態を効率的に生成するために，蒸留のスケジューリングを最小重み完全マッチング問題への帰着を用いる．さらに，数値計算により提案プロトコルの性能を調べ，量子デバイスの性能が本プロトコルの性能に与える影響を調べるとともに，分散量子計算などのインターフェイスとして活用する際に必要となる性能を実現するうえで要求される性能を見積もった．

2. Preliminary

2.1 エンタングルメント生成と蒸留

この章では，文献 [2] に基づくエンタングルメント生成と蒸留のプロトコルについて解説する．本稿ではベル状態を以下のように表記する．

$$\begin{aligned} |\Phi^{\pm}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \\ |\Psi^{\pm}\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \end{aligned} \tag{1}$$

2.1.1 エンタングルメント生成

Alice と Bob はそれぞれの持つ量子ビットとエンタングルした光子を送付する．この二つの光子を干渉させベル測定を行い，測定結果に応じて局所操作を行うと，Alice と Bob の間にシングレット状態 $|\Psi^-\rangle$ を生成することができる．この状態は理想的には忠実度は 1 となるが，通信路での光子損失や検出器の検出効率などに起因してプロトコルが一定の確率で失敗するだけでなく，プロトコルが成功したとしても通信路のノイズや検出器のダークカウントに起因して 1 より小さい忠実度を持つ．

忠実度 F のシングレット状態 $|\Psi^-\rangle$ は，random bilateral rotation (Alice と Bob はそれぞれの量子ビットに対してランダムかつ同じランダムなユニタリ操作をする) により以下の式の密度行列で表される Werner state と呼ばれる状態に常に変換することができる [9].

$$\begin{aligned} W_F = F\left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right| &+ \frac{1-F}{3}\left|\Psi^+\right\rangle\left\langle\Psi^+\right| \\ +\frac{1-F}{3}\left|\Phi^+\right\rangle\left\langle\Phi^+\right| &+ \frac{1-F}{3}\left|\Phi^-\right\rangle\left\langle\Phi^-\right| \end{aligned} \tag{2}$$

2.1.2 エンタングルメント蒸留

Alice と Bob は共通する二つのエンタングルした量子ビットのペアを選び，それぞれに対して random bilateral rotation を実施して Werner state に変換する．2 つの Werner state に対して Alice はパウリ Y 操作を行う．これによりベル状態は $|\Psi^{\pm}\rangle \leftrightarrow |\Phi^{\mp}\rangle$ の対応付けで入れ替わる．

次に，Alice と Bob はそれぞれ自身の持つ二つの量子ビットに対して XOR 操作 (U_{XOR}) を行う．

$$U_{\mathrm{XOR}} = |00\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| \tag{3}$$

この操作 ($U_{\mathrm{XOR}} \otimes U_{\mathrm{XOR}}$) によって片方のベル状態を Source，もう一方のベル状態を Target と考えた場合の対応表は表 1 のようになる．Alice と Bob はそれぞれ操作を加えた 2 つの Werner state のうち，XOR 操作の第二レジスタ側の量子ビットを測定する．Alice と Bob の測定結果が異なる場合，プロトコルに失敗したとして使用した量子ビットを破棄する．Alice の測定結果と Bob の測定結果が同じだった場合，Alice は残った Werner state に対してパウリ Y 操作を作用させ，蒸留後の量子状態とする．

2 つの Werner state の忠実度を f_1, f_2 としたとき，プロトコルの成功率は

$$f_1 f_2 + \frac{f_1(1-f_2)+(1-f_1)f_2}{3} + \frac{5(1-f_1)(1-f_2)}{9} \tag{4}$$

であり，プロトコルに成功したとき残った Werner state

Before		After	
Source	Target	Source	Target
$\Phi^{\pm}$	Φ^{+}	n.c.	n.c.
$\Psi^{\pm}$	Φ^{+}	n.c.	Ψ^{+}
$\Psi^{\pm}$	Ψ^{+}	n.c.	Φ^{+}
$\Phi^{\pm}$	Ψ^{+}	n.c.	n.c.
$\Phi^{\pm}$	Φ^{-}	$\Phi^{\mp}$	n.c.
$\Psi^{\pm}$	Φ^{-}	$\Psi^{\mp}$	Ψ^{-}
$\Psi^{\pm}$	Ψ^{-}	$\Psi^{\mp}$	Φ^{-}
$\Phi^{\pm}$	Ψ^{-}	$\Phi^{\mp}$	n.c.

表 1: 真偽表 (n.c. は状態が変化ない)．テーブルは [2] より．

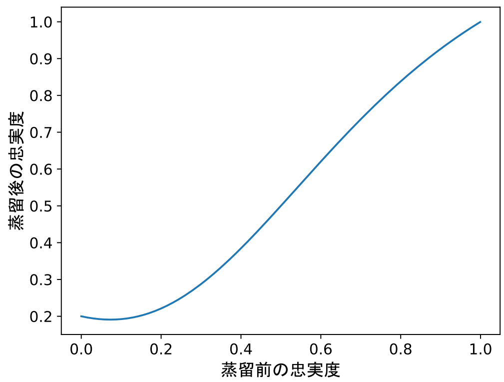


図 1: 蒸留後の忠実度

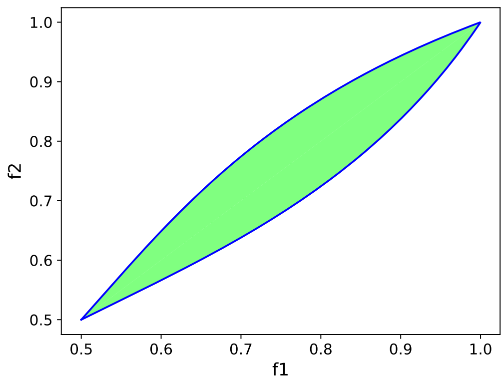


図 2: 蒸留して忠実度の上がる上限と下限

の忠実度は

$$\frac{f_1 f_2 + \frac{(1-f_1)(1-f_2)}{9}}{f_1 f_2 + \frac{f_1(1-f_2)+(1-f_1)f_2}{3} + \frac{5(1-f_1)(1-f_2)}{9}} \tag{5}$$

となる．**図 1** は同じ忠実度 $f_1 = f_2$ の 2 つの状態を蒸留に用いた場合に得られる忠実度のグラフである．蒸留を行った結果，蒸留後の忠実度が蒸留前の忠実度よりも高くなるためには，元々の忠実度が 1/2 より高い必要がある．**図 2** の緑の領域は蒸留前の f_1, f_2 によって蒸留後に忠実度が上がる領域である．

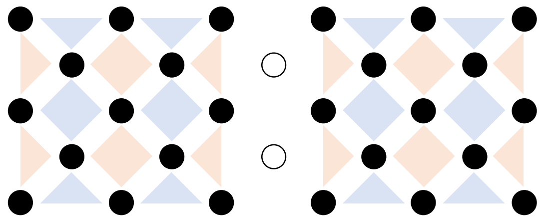


図 3: 二つの符号距離 3 の表面符号の論理量子ビット

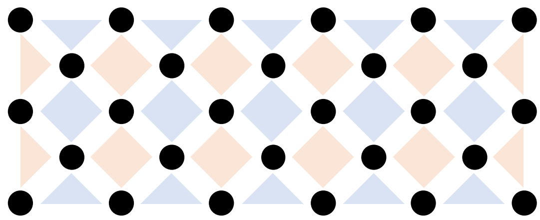


図 4: 格子手術中のスタビライザー測定のパターン

2.2 表面符号と格子蒸留

量子誤り訂正符号を用いて冗長な量子ビットから符号化された論理量子ビットを構成することで，実効的な量子ビットのエラー率を任意の値まで小さくすることができる [10]．あるノイズが高々 d 個の物理量子ビットに作用するとき，符号が検知できない非自明なエラーが作用する最小の d を符号距離と呼び，典型的には符号距離が大きい符号ほど論理エラーは小さくなる．表面符号 [11], [12], [13] は二次元正方格子に並んだ物理量子ビットに対して，**図 3** のようにチェッカーボード上にスタビライザー測定と呼ばれるパウリ測定によるパリティ検査を行うことで実現できる符号である．ここで，黒い丸は物理量子ビットであり，赤い (青い) タイルは頂点にあるデータ量子ビットに対するパウリ $Z(X)$ 測定で行われるスタビライザー測定と呼ばれる測定である．白い丸は配置はされているが計算に使われていないデータ量子ビットであり，後述の格子手術で使われる．表面符号では格子一つが一つの論理量子ビットに対応し，符号化のレベルを表す符号距離は格子の一辺に等しい．図の例では符号距離は 3 である．表面符号は二次元平面で正方格子状に並べられた量子ビットの隣接相互作用のみでパリティ検査や論理操作が可能なことから，実験的実現が最も有望視されている [13], [14], [15]．表面符号を用いると，その物理量子ビットの操作がしきい値と呼ばれる約 1% より小さければ，符号距離を大きくすることで論理量子ビットのエラー率をいくらでも下げることができる [13], [16]．現在のリソース推定では，物理量子ビットのエラー率はしきい値の 1/10 である 0.001 程度と想定されることが多い [17], [18]．

表面符号で符号化された論理ビットの間の 2 論理量子ビット操作は格子手術 [14], [19] という手法を用いて実現されるのが一般的である．格子手術とは，**図 4** のように

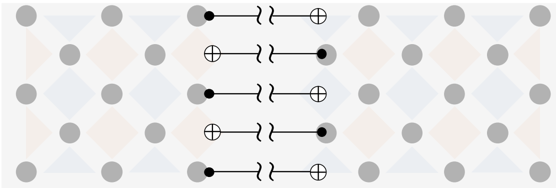


図 5: 二つの離れた場所での論理量子ビットの格子手術

二つの表面符号を一時的に一つの表面符号のように扱ってスタビライザー測定を行い， その後に図 3 のように元の状態に戻す一連の操作である．この操作は初期状態が論理状態であれば終状態も論理状態となる論理操作となっており， 論理空間における 2 体論理パウリ測定 $\frac{1}{2}(I \pm XX)$ と等しい．論理測定の測定値は一時的に結合した表面符号の間にあるスタビライザー測定の結果から計算することができる．論理 CNOT などの２論理量子ビットのユニタリ操作も， ２体論理パウリ測定を通して行うことが出来る．

表面符号で実用的なアプリケーションに必要な規模まで誤り率を下げるには， １論理ビットを構成するために数百量子ビット以上の物理量子ビットが必要になると期待されている．このため， 数千の論理ビットからなる量子計算を実現するには数百万の量子ビットが必要となるが， 二次元集積化された量子ビットのチップサイズには技術的な限界があると期待されるため， あるサイズからは複数の量子デバイスを量子的な通信が可能なインターコネクトで接続した分散量子計算の実現が必須となると考えられる．異なる量子デバイスで符号化されている論理量子ビットの間でユニバーサルな量子計算を行うには， **図 5** のように二つの離れた論理ビットの間で一時的な格子手術が可能となればよい [6]．符号距離が d の論理量子ビットの間で格子手術を行うには， $2d+1$ 個の CNOT ゲートがしきい値より高い精度で量子ゲートテレポーテーションで実現されればよいため， 必要なエンタングルした量子ビットのペアも $2d+1$ 個必要となる．

2.3 最小重み完全マッチング (MWPM)

頂点集合 V と辺集合 $E \subseteq V \times V$ からなるグラフ $G=(V,E)$ を考える．ここで，グラフのノード数 $N=|V|$ は偶数だとする．それぞれの辺には実数のコスト $f(E) \in \mathbb{R}$ が割り当てられているとする．グラフ上の辺で繋がったノードのペアの，重複の無い集合をマッチング $M=\{e_1,e_2,...\}$ $(\forall i \neq j, e_i \cap e_j = \emptyset)$ と呼ぶ．特に，ノードがマッチングに含まれる， つまり， $2M=N$ であるようなマッチングを完全マッチングと呼ぶ．また， マッチング M のコストを $\sum_{e \in M} f(e)$ としたとき， コストを最小化するような完全マッチングを最小重み完全マッチング (Minimum-weight perfect matching， MWPM) と呼ぶ．与えられた完全マッチングが存在するグラフについて， 最小重み完全マッチングを求める問題はエドモンドの花アルゴリズム [20] により多項式時間で解くことができることが知られている．

3. Method

この章では本研究での提案プロトコルについて解説する．ノイズを含む操作としては蒸留のための SWAP ゲートとベル状態の生成のみを仮定しており， ベル状態から Werner state への変換や蒸留操作は理想的に行えるとしている．また， コヒーレンス時間は十分に長く時間経過による状態の劣化は無視できると仮定している．本手法では Alice と Bob が同じサイズの 2 次元正方格子 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ 上に集積化された量子ビットをそれぞれ所有しており， $\mathcal{A}$・$\mathcal{B}$ 間のベル状態の生成と蒸留を行うことを考える．Alice と Bob は， $\mathcal{A}$・$\mathcal{B}$ 上の同じ座標に対応する位置の量子ビット間でのエンタングルメント生成， 各量子ビットの 1 量子ビット操作及び測定と， 同一格子上の隣接する量子ビット間の 2 量子ビット操作が許されているとする．

3.1 初期状態の生成

Alice と Bob はそれぞれの二次元正方格子 $\mathcal{A}$・$\mathcal{B}$ 上に集積化された量子ビットについて， 同じ X， Y 座標にある量子ビットのペアごとにエンタングルメント生成を行う．エンタングルメント生成に成功したペアについては， $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$ に有限のノイズを乗せた状態が得られる．ここで $|\cdot\rangle_{A(B)}$ は Alice(Bob) 側の格子 $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ 上にある量子ビット A (B) の状態である．エンタングルメント生成に失敗した場合はその量子ビットのペアは初期化する．例えばエンタングルメント生成の成功確率が 0.5 の場合は， 初期化が終わった段階では**図 6** のような配置がランダムに得られる．ここで図 6 の各ノードは Alice または Bob が持つ二次元格子の量子ビットを表している．緑色のノードはベル状態の生成に成功した量子ビットを表しており， 黒色のノードは初期状態に失敗し， 初期化された量子ビットを表している．

3.2 マッチングの決定

Alice と Bob は二次元格子上の量子ビットの集合に対して， 蒸留を実施するためのエンタングルメントペアを決定する．ある二つのペアに対して蒸留を行う場合， 蒸留の操作は２量子ビット操作である U_{XOR} が必要であり， 我々は最近接の量子ビットに対する操作しか許されていないため， 量子ビットを SWAP ゲートで隣接するように移動する必要がある．SWAP ゲートに必要な時間が無視できず， SWAP ゲートの忠実度が 1 ではない場合， 蒸留するペアは近ければ近いほどより効率的かつ高忠実度に蒸留を行うことができる．

本プロトコルでは上記の条件を満たすペアの決定は， MWPM への帰着を用いて行う．具体的にはまず， 以下の

手続きで二次元格子のグラフから偶数個ノードからなる全結合グラフを生成する．二次元格子中のノードのうち，エンタングルしている量子ビットを頂点として，二つのノードの間のエッジの重みを決定する．エンタングルしている量子ビットの数が奇数である場合は，ダミーとなるノードを追加してノード数を偶数にする．ノード間の辺について，二つのエンタングルした量子ビットを蒸留して成功したと仮定したときに得られる蒸留後の忠実度 F_e を計算し，1 から引いた値の対数 ($f(e) = \log(1 - F_e)$) を重みとして用いた．ただし，蒸留によって忠実度が元の二つのエンタングルした量子ビットのどちらよりも改善しない場合は，辺の重みは十分大きい定数値 c とする．また，ノード数が奇数の時に追加したダミーのノードへの辺の重みも全てこの定数 c とする．この戦略で重みの和を最小化することは，全ての蒸留が成功したと仮定したときの非忠実度の積を最大化することに等しい．このようにして生成した全結合グラフに関する MWPM をエドモンドの花アルゴリズムで解き，選ばれたペアを蒸留の候補とする．なお，重みが c となっているエッジがマッチングの結果として選ばれたときは，このペアはマッチングから取り除く．**図 7** は図 6 上のエンタングルした量子ビットをマッチングした結果を表している．

3.3 蒸留の実行

前節で決定したマッチングに基づき，蒸留を実施する．蒸留は左上にあるノードから順番に以下の手続きで行われる．まず，それぞれのエンタングルした量子ビットのペアの二次元格子上での初期化された量子ビットのみを通る最短経路を計算する．そのような経路が存在しない場合，そのペアの蒸留は行わない．最短経路が求まったら，経路の中点まで二つの量子ビットを SWAP ゲートで近づける．なお，ノード間の距離が奇数である場合は，どちらかのノードが一つ多く SWAP ゲートを用いる必要がある．この場合，二次元格子の中央より遠い側の量子ビットがより多く SWAP で移動することにする．蒸留を行う際には，二次元格子の中央より遠い側の量子ビットを測定して成功時に二次元格子の中央に近いノードを残すようにする．なお，上記のように二次元格子の中央に近いノードが残るよう優先するのは，次回の蒸留のイテレーションにおいて蒸留する量子ビットが出来るだけ中央によって残るようにし，距離を近くするためである．

図 7 のようにマッチングされた状態に対して蒸留を実行すると，**図 8** の状態が得られる．この図では，赤いノードは蒸留後のより高い忠実度を持ったベル状態のノードを表している．この例ではベル状態の数が奇数であったため，一つのノードは蒸留されずに忠実度が低いまま蒸留のフェイズを終えている．

蒸留を行っていく途中でエンタングルした量子ビットの数が失敗した際に必要な量子ビットの最小個数を下回る場合は，そこでプロトコルを終了する．また，蒸留のフェイズで一つも蒸留を行うペアが無かった時もプロトコルを終了する．エンタングルした量子ビットのペアが必要な量子ビットの個数より多い場合は，再びマッチングを行い上記の蒸留のプロセスを繰り返す．

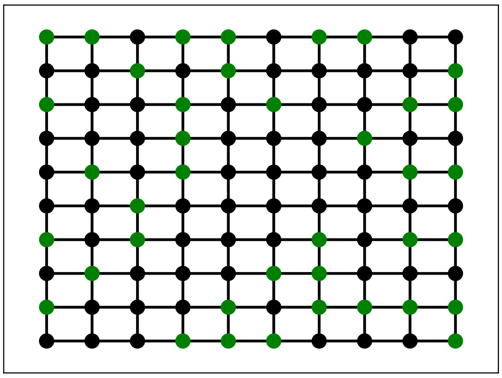


図 6: 初期状態 (初期忠実度:0.95)

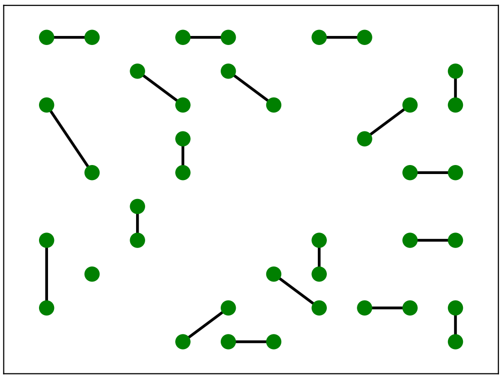


図 7: マッチング終了図

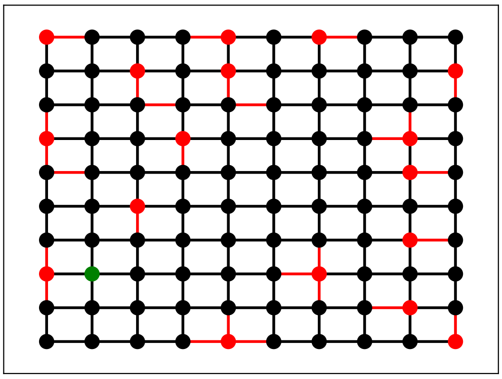


図 8: 蒸留 1 段階目終了図

4. Result

4.1 数値計算の設定

本研究は数値計算を様々なパラメータを変えつつ行い，提案したプロトコルの評価を行った．数値計算において性能に影響を及ぼす主なパラメータは以下の通りである．

格子サイズ
: 格子サイズは量子ビットを集積化する正方格子の辺に含まれるノード数

エンタングルメント生成の成功率
: 初期状態の準備で生成されるのベル状態生成の成功率

初期忠実度
: 初期状態の準備で生成されるベル状態の忠実度

SWAP ゲートの忠実度
: 一回の Alice， Bob 二人の SWAP ゲートの操作によるエンタングルメントの移動でベル状態の忠実度が減少する比率

現実の系ではそれぞれの量子ビットにコヒーレンス時間が存在しており， 時間経過によって各量子ビットの忠実度は低下していく．一般にはこの低下は $e^{-t/T}$(T は縦緩和の時定数) で起こるため， 移動を含めた蒸留のための操作を時定数に比べて十分短い時間で行うことが出来るのであれば十分小さい t の領域ではコヒーレンス時間による忠実度の低下は無視することが出来る．本研究では量子ビットのコヒーレンス時間は十分長いとして， 局所操作のノイズは SWAP ゲートによるもののみを考えた．より現実に近いシミュレートするためには， 実際にはそれぞれの初期状態の準備や操作時間， 操作回数， MWPM の計算時間によるコヒーレンスの低下の補正を付け加える必要があるが， こうした計算は今後の課題とする．本研究では， 蒸留で必要となる XOR 操作， パウリ Y 操作， 測定で生じるエラーは 0 であるとした．例えば， 測定に関しては， 中性原子やイオントラップの 2 次元アレイで測定を行う場合は蛍光によるノイズで隣接原子の忠実度を下げてしまうことが知られている．これを防ぐためには測定する原子やイオンを空間的に離れた場所へ光ピンセットなどで移動させてから測定を行うなどが考えられる．

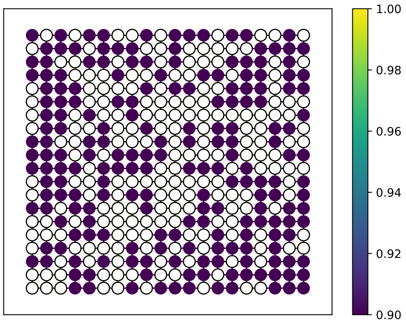
4.2 評価方法

数値計算では最終的に得られたベル状態の集合を以下の二つの基準で評価した．1 つ目の評価指標は平均非忠実度であり， これは最終的に得られたベル状態のうち最も忠実度が高い n 個の忠実度の算術平均を 1 から引いたものである．2 つ目の指標は n 個のうち， 忠実度の低いものから $n/2$ 個 (n が奇数の場合は $(n+1)/2$ 個) のベル状態の非忠実度 (1.0 と忠実度の差) の積をエラー率として評価したものである．これは表面符号の格子手術などで得られた n 個のエンタングルメントを用いたときに， ゲートテレポーテーションの忠実度の低さに起因して訂正が出来ない量の論理エラーが生じる確率であり， 分散量子計算の精度を特徴づける値である．

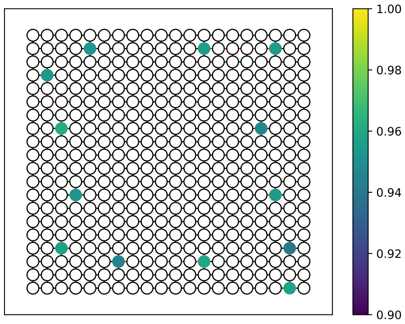
4.3 数値計算の結果

蒸留では SWAP ゲートの忠実度の大きさと蒸留に用いるエンタングルした量子ビットの初期忠実度によって， どの程度離れたベル状態とまでペアとして蒸留することが出来るかが決まる．このことを調べるために， 初期忠実度を 0.9 として SWAP ゲートの忠実度を 0.99 および 0.999 として， 改善できる蒸留ペアがなくなるまで蒸留した結果を計算した結果が**図 9** である．**図 9b**， **図 9d** のようにある程度離れた間隔で蒸留されたベル状態が並ぶと， 二つのベル状態を近づけて蒸留しても忠実度が向上しなくなるため，蒸留がストップしてしまう．特に SWAP ゲートの忠実度が低いときは， 離れたベル状態の間で蒸留を行っても移動によるノイズでベル状態の忠実度が改善されないため， より多くのベル状態を残したままプロトコルが停止してしまう傾向がみられる．一方， SWAP ゲートの忠実度が高い場合は， 遠くにあるベル状態間での蒸留を行うことができていることが分かる．従って， 本プロトコルでは現状所持しているベル状態の忠実度に対して SWAP ゲートの忠実度が低くなると， これ以上蒸留できなくなってしまうことが分かる．

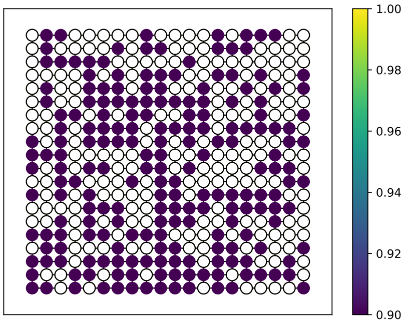
このことをより体系的に調べるために， SWAP ゲートの忠実度を変えながら平均忠実度及び論理エラー率について数値計算を行った．ここでは， $n = 11$， 初期忠実度を 0.99 で固定し， 複数のベル測定の成功率でプロットを行った．この数値計算では各データ点に対して 500 サンプルの計算を行っている．結果として得られたものが**図 10** である．図では様々なベル測定の成功率について，SWAP ゲートの忠実度を変化させながら平均非忠実度と論理エラー率の変化を調べている．上二つの図は 0.99 から 1.0 の間を線形に， 下二つの図は対数スケールで値を変化させている．SWAP ゲートの忠実度が低い領域では最終的な評価値は離散的に変化することが分かる．これは， SWAP ゲートの忠実度の上昇によって蒸留した方が得となる半径が離散的に変化するためだと考えられる．SWAP ゲートの非忠実度が 10^{-4} の領域になると， 最終的に得られる忠実度の値は飽和し変化しなくなる．この状態では， 蒸留可能なベル状態の半径が格子のサイズより大きくなり， SWAP ゲートの値が向上しても蒸留可能な回数にほとんど変化がなくなるためである．いくつかのデータ点では顕著に標準偏差の大きくなるデータ点が見られるが， これは離散的な振る舞いの中間的な状態にあるためであると考えられる．また，



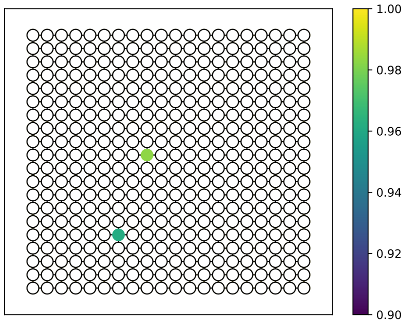
(a) SWAP ゲートの忠実度 0.99: 初期状態



(b) SWAP ゲートの忠実度 0.99: 終状態



(c) SWAP ゲートの忠実度 0.999: 初期状態



(d) SWAP ゲートの忠実度 0.999: 終状態

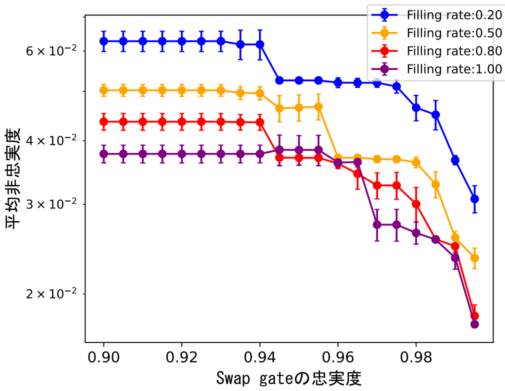
図 9: 初期忠実度 0.9, エンタングルメント生成の成功率 0.5 の下で最大まで蒸留した図

この傾向はエンタングルメント生成の成功率が小さいと大きくなる傾向があり， 正方格子のどこにエンタングルした量子ビットが出来たかのランダム性が蒸留結果に大きく影響するためだと考えられる．

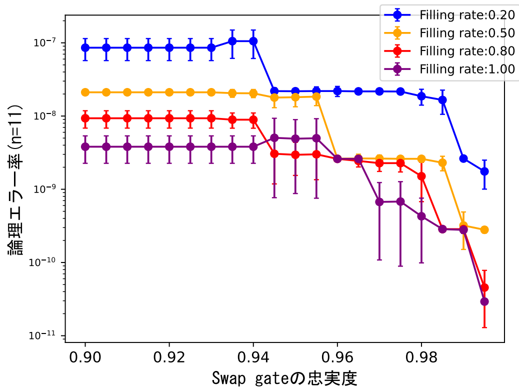
量子誤り訂正において十分なエラーの削減を行うには平均非忠実度が 0.1%以下であることが求められる．図 10 では一部の設定においてこの性能を達成できていることが分かる．量子デバイスの要求性能や振る舞いを明らかにするため， 次に我々は SWAP ゲートの忠実度以外のパラメータを変化させた時， この性能がどのように変化するのかを求めた．ここでは SWAP ゲートのエラー率を $10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ とし， 格子のサイズ， ベル状態生成の成功率， ベル状態の初期忠実度が性能に与える影響をそれぞれ評価した．

図 11 は初期忠実度が 0.99， エンタングルメント生成の成功率を 0.5 とし， 格子サイズの依存性を評価する数値計算の結果である．図より SWAP ゲートのエラー率が 10^{-3} のときのみ量子ビットの平均非忠実度 0.1%を達成できていないことが分かる．これは**図 10c** で， 仮にエンタングルメント生成の成功率が 1.0 であったとしてもエラー率 0.1%を達成できていないことから自然な結果である．SWAP ゲートのエラーが 10^{-3} の場合には， 格子サイズが 35 を超えたあたりで達成可能なエラー率が飽和する．従って， この領域では蒸留でペアリング可能なベル状態の数が SWAP ゲートのエラーの大きさによって制限されているためだと期待される．また， 同様の理由から SWAP ゲートのエラー率が 10^{-4} の場合は 40 程度のサイズでこうした領域が生じることが分かる．

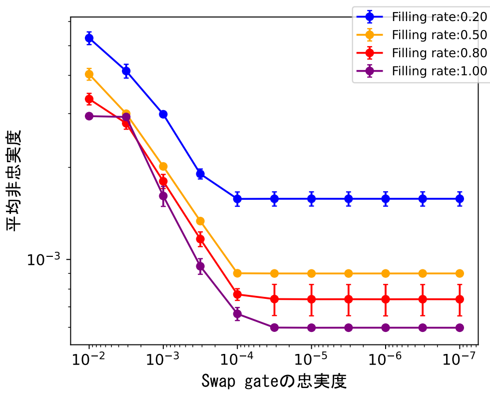
図 12 は初期忠実度が 0.99， 格子サイズを 40×40 とし， ベル測定の成功率の依存性を評価する数値計算の結果である．SWAP ゲートのエラー率が 10^{-3} 以外の条件ではどれもベル測定の成功率が 0.4 程度で目標の忠実度まで蒸留することが出来ている．これらの SWAP ゲートは初期忠実度が 0.99 のベル状態に対しては十分理想的な SWAP ゲートとみなすことができ， 忠実度 0.99 のベル状態が $40 \times 40 \times 0.4 = 640$ 個程度あれば 11 個の非忠実度が 10^{-3} 以下となったベル状態を用意できると考えられる．また，エンタングルメント生成の成功率が 0.8 以上の領域では SWAP ゲートのエラー率が 10^{-4} のものが $10^{-5}, 10^{-6}$ のものと比べ悪くなっており， この領域ではこの SWAP ゲートは理想的であるとはみなせない．これは狭い範囲に多くのベル状態があるため， 遠くに移動させる前にベル状態の忠実度が 1 に近くなり相対的に SWAP ゲートのエラー率が大きく感じるようになるため， SWAP ゲートで移動し



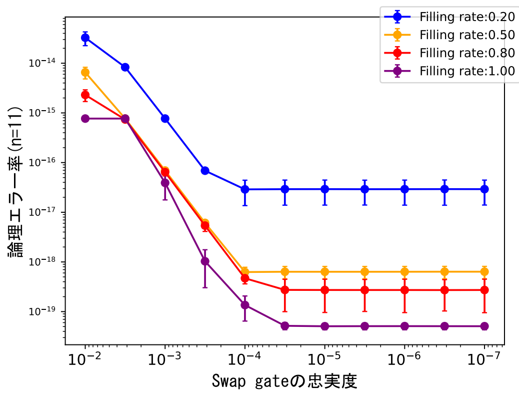
(a) 平均非忠実度



(b) 論理エラー率



(c) 平均非忠実度



(d) 論理エラー率

図 10: SWAP ゲートの忠実度を変化させながら平均非忠実度とエラー率を評価したプロット

て蒸留することで利得を得られる範囲が 40×40 の格子よりも狭くなってしまったためであると考えられる．

図 13 は格子サイズを 40×40，エンタングルメント生成の成功率を 0.5 としており，初期忠実度の依存性を評価した結果である．ここでもエラー率が 10^{-4} より小さい操作は理想的な SWAP ゲート操作になっていると言え，どれも 0.988 辺りの初期忠実度で非忠実度が 10^{-3} 以下まで蒸留することが出来ている．そのため，格子サイズ 40×40，エンタングルメント生成の成功率が 0.5 の場合，蒸留によって忠実度を 0.999 以上にするにはベル状態の初期忠実度を $\sim$0.988 以上にする必要があると考えられる．また，SWAP ゲートのエラー率が 10^{-3} の場合，初期忠実度が上昇しているにも関わらず，蒸留後に達成されている忠実度が悪くなっている場合も存在する．これは**図 10a**，**図 10b** に見られる離散的な振る舞いと考えられる．図 10a，図 10b では SWAP ゲートの忠実度の上昇によって蒸留することの出来る格子間の距離が伸びることで離散的に振る舞ったが，図 13 は初期忠実度が上昇することで蒸留することの出来る格子間が短くなり，離散的に振る舞っていると考えられる．

5. Discussion

図 10a では蒸留後のベル状態のエラーが 10^{-3} を達成しようと思った場合，エンタングルメント生成の成功率を上げる代わりに SWAP ゲートの精度を下げるなど，いくつかのトレードオフが存在する．量子計算への応用に向けた各パラメーターの選択は個別の物理系によって実験的な実現の難度が異なり，あるパラメーターの精度を上げると代わりにある物理系にとって難しい操作の精度を下げるなどの方針を取ることで実験的な実現を目指すことが出来る．例えば，中性原子やイオンの 2 次元トラップではベル状態の生成の確立は低くならざるを得ないため，2 次元格子上に密にベル状態を生成するのは難しい．そのため，SWAP ゲートの忠実度を上げる，もしくは初期忠実度を高くするなどの方針を取ることでベル状態の生成率が低いまま，蒸留プロトコルを行うことが出来る．

今回の研究ではコヒーレンス時間については考えていないため，これによる状態の劣化を数値計算に取り込むことは今後の課題であると考えている．コヒーレンス時間について考える場合は並列処理で行うなど，実時間での操作を

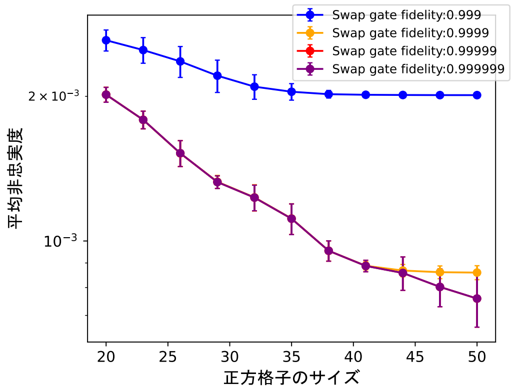


図 11: 格子サイズに対する平均非忠実度

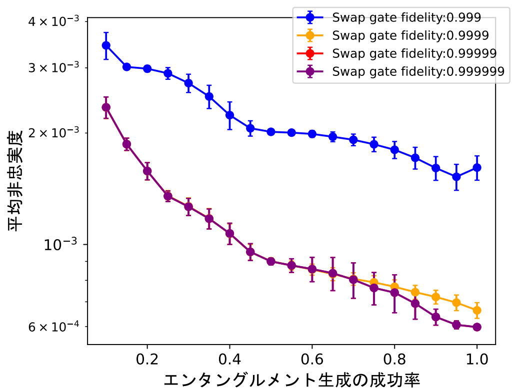


図 12: エンタングルメント生成の成功率に対する平均非忠実度

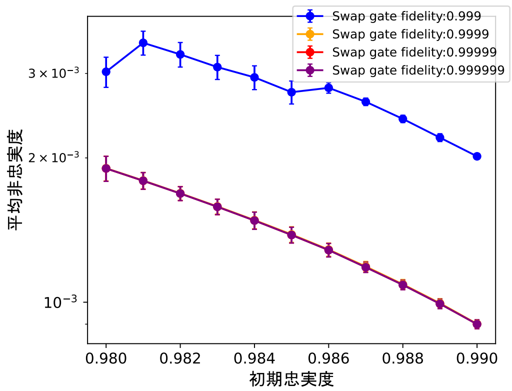


図 13: 初期忠実度に対する平均非忠実度

意識したプロトコルを考える必要がある．これにより，より実験の要請を正確に反映したシミュレーションが可能となる．

本研究では蒸留プロトコルが SWAP ゲートの作用の回数によって性能を制限されるのではないかとの着想から MWPM によって SWAP ゲートの数を抑える方向で発展させてきたが，限られた数の量子ビットを蒸留するうえではもっと有効な蒸留の方法が存在する可能性がある．例えば，エンタングルした量子ビットがスパースな正方格子では必ず SWAP ゲートによる移動が必要になるが，正方格子のエンタングルした量子ビットが密に存在する部分でそもそも移動が不要な蒸留にだけ限ったり，最初に密な形に成形して初期忠実度を下げてから蒸留を開始するなどがアイデアとして考えられる．また，本プロトコルではペアリングされたベル状態を蒸留する際に，最小距離の中点で蒸留を行っている．これは SWAP ゲートのエラーを対象にし移動時間を最小にするうえでは望ましい．一方，次の蒸留レベルを考えると全体としてベル状態が一か所に集まるようにスケジューリングすることが望ましい．このように，複数の蒸留レベル全体を考慮したより最適なスケジューリングを求めることも将来的な課題として重要である．

6. Conclusion

本研究では 2 次元正方格子に集積化された量子ビットの蒸留を行うプロトコルの提案を行い，その性能を数値計算で評価した．本プロトコルでは蒸留のスケジューリングを MWPM に帰着して行った．数値計算では，量子デバイスの各種性能がどのように蒸留の性能に影響を与えるかを明らかにした．特に，40×40 の正方格子上で量子誤り訂正に必要な 10^{-3} 以下の平均非忠実度を達成するには，例えば SWAP ゲートの忠実度，エンタングルメント生成の成功率，初期忠実度の各パラメーターの指針としてエラー率が 10^{-4} 以下の SWAP ゲート，成功率 0.4 以上，忠実度 0.988 程度のエンタングルメントの初期生成が求められることを明らかにした．

謝辞　本研究は JST さきがけ（助成番号：No. JP-MJPR1916），内閣府ムーンショット（助成番号：No. JPMJMS2061，JPMJMS2066）の助成の元で行いました．

参考文献

[1] Nielsen, M. A. and Chuang, I.: Quantum computation and quantum information (2002).
[2] Bennett, C. H. and et al.: *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, pp. 722–725 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.722 (1996).
[3] Briegel, H.-J., Dür, W., Cirac, J. I. and Zoller, P.: Quantum repeaters: the role of imperfect local operations in quantum communication, *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 26, p. 5932 (1998).
[4] Bennett, C. H., Brassard, G., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J. A. and Wootters, W. K.: Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels, *Physical review letters*, Vol. 76, No. 5, p. 722 (1996).
[5] Jiang, L., Taylor, J. M., Nemoto, K., Munro, W. J., Van Meter, R. and Lukin, M. D.: Quantum repeater with encoding, *Physical Review A*, Vol. 79, No. 3, p. 032325 (2009).
[6] Fowler, A. G., Wang, D. S., Hill, C. D., Ladd, T. D., Van Meter, R. and Hollenberg, L. C.: Surface code quantum communication, *Physical review letters*, Vol. 104, No. 18, p. 180503 (2010).

[7] Arute, F., Arya, K., Babbush, R., Bacon, D., Bardin, J. C., Barends, R., Biswas, R., Boixo, S., Brandao, F. G. S. L., Buell, D. A., Burkett, B., Chen, Y., Chen, Z., Chiaro, B., Collins, R., Courtney, W., Dunsworth, A., Farhi, E., Foxen, B., Fowler, A., Gidney, C., Giustina, M., Graff, R., Guerin, K., Habegger, S., Harrigan, M. P., Hartmann, M. J., Ho, A., Hoffmann, M., Huang, T., Humble, T. S., Isakov, S. V., Jeffrey, E., Jiang, Z., Kafri, D., Kechedzhi, K., Kelly, J., Klimov, P. V., Knysh, S., Korotkov, A., Kostritsa, F., Landhuis, D., Lindmark, M., Lucero, E., Lyakh, D., Mandrà, S., McClean, J. R., McEwen, M., Megrant, A., Mi, X., Michielsen, K., Mohseni, M., Mutus, J., Naaman, O., Neeley, M., Neill, C., Niu, M. Y., Ostby, E., Petukhov, A., Platt, J. C., Quintana, C., Rieffel, E. G., Roushan, P., Rubin, N. C., Sank, D., Satzinger, K. J., Smelyanskiy, V., Sung, K. J., Trevithick, M. D., Vainsencher, A., Villalonga, B., White, T., Yao, Z. J., Yeh, P., Zalcman, A., Neven, H. and Martinis, J. M.: Quantum supremacy using a programmable superconducting processor, *Nature*, Vol. 574, No. 7779, pp. 505–510 (online), DOI: 10.1038/s41586-019-1666-5 (2019).

[8] Schymik, K.-N., Lienhard, V., Barredo, D., Scholl, P., Williams, H., Browaeys, A. and Lahaye, T.: Enhanced atom-by-atom assembly of arbitrary tweezer arrays, *Phys. Rev. A*, Vol. 102, p. 063107 (online), DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063107 (2020).

[9] Werner, R. F.: *Phys. Rev. A*, Vol. 40, pp. 4277–4281 (online), DOI: 10.1103/PhysRevA.40.4277 (1989).

[10] Lidar, D. A. and Brun, T. A.: *Quantum error correction*, Cambridge University Press (2013).

[11] Kitaev, A. Y.: Quantum computations: algorithms and error correction, *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 52, No. 6, pp. 1191–1249 (1997).

[12] Bravyi, S. B. and Kitaev, A. Y.: Quantum codes on a lattice with boundary, *arXiv preprint quant-ph/9811052* (1998).

[13] Fowler, A. G., Whiteside, A. C. and Hollenberg, L. C.: Towards practical classical processing for the surface code, *Physical review letters*, Vol. 108, No. 18, p. 180501 (2012).

[14] Fowler, A. G. and Gidney, C.: Low overhead quantum computation using lattice surgery, *arXiv preprint arXiv:1808.06709* (2018).

[15] Chamberland, C., Noh, K., Arrangoiz-Arriola, P., Campbell, E. T., Hann, C. T., Iverson, J., Putterman, H., Bohdanowicz, T. C., Flammia, S. T., Keller, A., Refael, G., Preskill, J., Jiang, L., Safavi-Naeini, A. H., Painter, O. and Brandão, F. G.: Building a Fault-Tolerant Quantum Computer Using Concatenated Cat Codes, *PRX Quantum*, Vol. 3, No. 1 (online), DOI: 10.1103/prxquantum.3.010329 (2022).

[16] Wang, C., Harrington, J. and Preskill, J.: Confinement-Higgs transition in a disordered gauge theory and the accuracy threshold for quantum memory, *Annals of Physics*, Vol. 303, No. 1, pp. 31–58 (2003).

[17] Gidney, C. and Ekerå, M.: How to factor 2048 bit RSA integers in 8 hours using 20 million noisy qubits, *Quantum*, Vol. 5, p. 433 (2021).

[18] Babbush, R., Gidney, C., Berry, D. W., Wiebe, N., McClean, J., Paler, A., Fowler, A. and Neven, H.: Encoding electronic spectra in quantum circuits with linear T complexity, *Physical Review X*, Vol. 8, No. 4, p. 041015 (2018).

[19] Horsman, C., Fowler, A. G., Devitt, S. and Van Meter, R.: Surface code quantum computing by lattice surgery, *New Journal of Physics*, Vol. 14, No. 12, p. 123011 (2012).

[20] Edmonds, J.: Paths, trees, and flowers, *Canadian Journal of mathematics*, Vol. 17, No. 3, pp. 449–467 (1965).