情報処理学会論文誌 Vol.63 No.3 895–898 (Mar. 2022)

テクニカルノート

# 一般化されたSine積分Si$(a, x)$とCosine積分Ci$(a, x)$の数値計算法

吉田 年雄[1,a)] 足達 義則[1,b)]

受付日 2021年10月13日, 採録日 2021年12月3日

**概要**：一般化された Sine 積分 $\mathrm{Si}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\sin t dt$ と Cosine 積分 $\mathrm{Ci}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\cos t dt$ の新しい計算法を述べる．$\mathrm{Si}(a,x)$ は，奇数次の球ベッセル関数 $j_{2k+1}(x)$ の級数で表され，$\mathrm{Ci}(a,x)$ は，偶数次の球ベッセル関数 $j_{2k}(x)$ の級数で表される．本稿では，$x \geq 0$ の場合の $\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ に対して，この級数を計算するために，漸化式を用いる方法（ミラーの方法）を自動化（要求精度で関数値を求める）したドイフルハートの方法を適用することを新規に提案する．

キーワード：一般化された Sine 積分 $\mathrm{Si}(a,x)$，一般化された Cosine 積分 $\mathrm{Ci}(a,x)$，不完全ガンマ関数

# Computation of Generalized Sine Integral Si$(a, x)$ and Cosine Integrals Ci$(a, x)$

Toshio Yoshida[1,a)] Yoshinori Adachi[1,b)]

Received: October 13, 2021, Accepted: December 3, 2021

***Abstract:*** We describe a new numerical method for generalized Sine integral $\mathrm{Si}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\sin t dt$ and Cosine integral $\mathrm{Ci}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\cos t dt$. $\mathrm{Si}(a,x)$ is represented as the odd-order series of spherical Bessel functions. $\mathrm{Ci}(a,x)$ is represented as the even-order series of spherical Bessel functions. In this paper, we propose the application of Deuflhard's method where results are obtained with required accuracy for the computation of these series of spherical Bessel functions in case of $x \geq 0$. It is revised version of the recurrence technique (Miller's method).

***Keywords:*** generalized sine integral, generalized cosine integral, incomplete gamma function

## 1. はじめに

一般化された sine 積分と cosine 積分は

$$\mathrm{Si}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\sin t dt \qquad (a>-1) \tag{1}$$

$$\mathrm{Ci}(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\cos t dt \qquad (a>0) \tag{2}$$

で与えられ，それらのテイラー展開は，交代級数

$$\mathrm{Si}(a,x)=x^a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(a+2k+1)(2k+1)!} \tag{3}$$

$$\mathrm{Ci}(a,x)=x^a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(a+2k)(2k)!} \tag{4}$$

で表される [1]．Kreyszig は，これらの関数について詳細に分析・研究している [2], [3]．$\mathrm{Si}(a,x)$ は，フーリエ級数のギブス現象の研究に使われている [2]．

これらの関数の $x \geq 0$ での計算法については，Reinsch ら [4] により，チェビシェフ級数を用いた方法が提案された．その方法では，チェビシェフ級数の必要最大次数と係数をあらかじめ求めておく必要があり，さらに，プログラム化には手間がかかるのが欠点である．

本稿では，$x \geq 0$ の場合の $\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ について，要求精度で関数値を自動的に求めることができる方法を新規に提案する．本方法は，プログラム化も容易である．

[1] 中部大学
Chubu University, Kasugai, Aichi 487–8501, Japan
a) tyoshida67@yahoo.co.jp
b) adachiy@isc.chubu.ac.jp

この $\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ は，次式のように，球ベッセル関数 $j_n(x)$ の級数で表すことができる [1].

$$\mathrm{Si}(a,x) = x^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2k+\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)_{k+1}} j_{2k+1}(x) \tag{5}$$

$$\mathrm{Ci}(a,x) = x^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right)_k}{\left(\frac{a}{2}\right)_{k+1}} j_{2k}(x) \tag{6}$$

ここで，$(a)_k$ はポッホハンマーの記号で，$(a)_0 = 1$ であり，

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+k-1) \quad (k \geq 1)$$

である．

本稿では，球ベッセル関数 $j_n(x)$ の級数で表される $\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ を計算するために，漸化式を用いる方法（ミラーの方法）を自動化した（要求精度で関数値を求められる）ドイフルハートの方法を用いることにする．そのため，式 (5) と式 (6) を $j_k(x)$（$k=0,1,\ldots$）の級数に書き換えると，

$$\mathrm{Si}(a,x) = x^a \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(s)} j_k(x) \tag{7}$$

$$\mathrm{Ci}(a,x) = x^a \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(c)} j_k(x) \tag{8}$$

となる．ただし，$d_k^{(s)}$ は次式で表される．

$$\begin{aligned} &k = \text{偶数のとき}, \quad d_k^{(s)} = 0 \\ &k = \text{奇数のとき}, \quad d_k^{(s)} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)_{(k-1)/2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)_{(k+1)/2}} \end{aligned} \tag{9}$$

であり，$d_k^{(c)}$ は次式で表される．

$$\begin{aligned} &k = \text{偶数のとき}, \quad d_k^{(c)} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right)_{k/2}}{\left(\frac{a}{2}\right)_{k/2+1}} \\ &k = \text{奇数のとき}, \quad d_k^{(c)} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

## 2.　ミラー（Miller）の方法

ミラーの方法を説明する [6], [7], [8]．$m$ を適当に選ばれた正の偶整数とし，$\alpha$ を小さな任意定数とする．

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = \alpha \tag{11}$$

を初期値として，球ベッセル関数 $j_n(x)$ が満足する漸化式

$$F_{i-1}(x) = \frac{2i+1}{x} F_i(x) - F_{i+1}(x) \tag{12}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \ldots, F_0(x)$ を順次，計算する．そのとき，ある $N$（$< m$）に対して，$k = 0,1,\ldots,N$ についての $j_k(x)$ の計算式

$$j_k(x) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_k(x) \Bigg/ \sum_{i=0}^{m/2} \epsilon_i F_{2i}(x) \tag{13}$$

を得ることができる．ただし，

$$\epsilon_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} \tag{14}$$

である．この計算式 (13) の導出では，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k j_{2k} = 1 \tag{15}$$

を利用している（文献 [5] の公式 (7) と文献 [9] の公式 (10.1.1)）．

したがって，$\mathrm{Si}(a,x)$ の計算式は，式 (7) により，

$$\mathrm{Si}(a,x) \doteqdot x^a \sum_{k=0}^{[N/2]-1} d_{2k+1}^{(s)} F_{2k+1}(x) \Bigg/ \sum_{i=0}^{m/2} \epsilon_i F_{2i}(x) \tag{16}$$

として求められ，$\mathrm{Ci}(a,x)$ の計算式は，式 (8) により，

$$\mathrm{Ci}(a,x) \doteqdot x^a \sum_{k=0}^{[N/2]} d_{2k}^{(c)} F_{2k}(x) \Bigg/ \sum_{i=0}^{m/2} \epsilon_i F_{2i}(x) \tag{17}$$

として求められる．$x$ と $a$ を固定したとき，この計算式 (16) あるいは式 (17) の精度は $m$ を大きくすると高くなる．この計算式により $\mathrm{Si}(a,x)$ あるいは $\mathrm{Ci}(a,x)$ の値を能率的に求めるためには，式 (11) の $m$ は，与えられた $x$ と $a$ に対して，要求精度を満たす最小の $m$ をあらかじめ求めておくことが必要である．それは $x$ と $a$ が極く狭い範囲の値であれば可能かもしれないが，通常の場合には現実的でない．

## 3.　ドイフルハート（Deuflhard）の方法

これらの関数に対して，任意の精度で関数値を自動的に求めることができるドイフルハートの方法を適用する．この方法はミラーの方法を行列表現し，

$$\sum_{k=0}^{m} d_k \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_k(x) \Bigg/ \sum_{i=0}^{m/2} \epsilon_i F_{2i}(x) \tag{18}$$

を要求精度で計算できるようにした方法である（$d_k$ は定数係数）．$\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ の計算にドイフルハートの方法を適用することを提案するのは本稿が初めてである．紙面の都合で，ドイフルハートの方法の詳細な説明は文献 [7], [10] に任せることにして，ここでは，$\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ の具体的な計算アルゴリズムについて述べることにする．

アルゴリズムを容易に書くことができるように，ここでも，式 (15) を次式のように書き直す（$\epsilon_k = \varepsilon_{2k}$）．

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k j_k(x) = 1 \tag{19}$$

ただし，

$$\begin{aligned} &k = \text{偶数のとき}, \quad \varepsilon_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{k}{2}\right)!} \\ &k = \text{奇数のとき}, \quad \varepsilon_k = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

である．

まず，$\mathrm{Si}(a,x)$ の計算アルゴリズムを示す．

$$p_{-1}=0,\quad p_0=\varepsilon_0=1,\quad q_{-1}=0,\quad q_0=d_0^{(s)}=0$$

を初期値として，下の 2 つの式を $k=1,2,\ldots,m$ と繰り返す．

$$\begin{cases} p_k=\varepsilon_k+\dfrac{2k+1}{x}p_{k-1}-p_{k-2} \\ q_k=d_k^{(s)}+\dfrac{2k+1}{x}q_{k-1}-q_{k-2} \end{cases}$$
$$r_m=x^a\cdot q_m/p_m \tag{21}$$

上式の $d_k^{(s)}$ は式 (9) で与えられる．$q_m/p_m$ は，式 (18) において，$d_k$ を $d_k^{(s)}$ としたものと等しい（これは，文献 [7] の式 (2.31) と式 (2.35) から分かる）ので，$r_m$ は，式 (7) の $k=m$ までの和を表している．上のアルゴリズムで，$m$ を $m+1$ にするには，そのまま $k$ の繰り返しをもう 1 回追加すればよい．それで，次の計算アルゴリズムが得られる．

$$p_{-1}=0,\quad p_0=\varepsilon_0=1,\quad q_{-1}=0,\quad q_0=d_0^{(s)}=0$$

を初期値として，下の 2 つの式を $k=1,2,\ldots$ と繰り返す．

$$\begin{cases} p_k=\varepsilon_k+\dfrac{2k+1}{x}p_{k-1}-p_{k-2} \\ q_k=d_k^{(s)}+\dfrac{2k+1}{x}q_{k-1}-q_{k-2} \\ r_k=x^a\cdot q_k/p_k \end{cases} \tag{22}$$

これらの繰り返しは，$r_k$ が要求精度に収束するまで行う．

次に，$\mathrm{Ci}(a,x)$ の計算アルゴリズムも同様に次のように表される．

$$p_{-1}=0,\quad p_0=\varepsilon_0=1,\quad q_{-1}=0,\quad q_0=d_0^{(c)}=1/a$$

を初期値として，下の 2 つの式を $k=1,2,\ldots$ と繰り返す．

$$\begin{cases} p_k=\varepsilon_k+\dfrac{2k+1}{x}p_{k-1}-p_{k-2} \\ q_k=d_k^{(c)}+\dfrac{2k+1}{x}q_{k-1}-q_{k-2} \\ r_k=x^a\cdot q_k/p_k \end{cases} \tag{23}$$

上式の $d_k^{(c)}$ は式 (10) で与えられる．これらの繰り返しは，$r_k$ が要求精度に収束するまで行う．

これらの繰り返しを能率的に行うには，$\varepsilon_k$ の計算は，$\varepsilon_0=1$ を初期値として，漸化式

$$\varepsilon_k=\frac{(k-1)(2k+1)}{k(2k-3)}\varepsilon_{k-2}\quad (k=2,4,\ldots) \tag{24}$$

により計算するとよい．$d_k^{(s)}$ についても，$d_1^{(s)}=3/(a+1)$ を初期値として，漸化式

$$d_k^{(s)}=\frac{(2k+1)(k-a-1)}{(k+a)(2k-3)}d_{k-2}^{(s)}\quad (k=3,5,\ldots) \tag{25}$$

により計算し，$d_k^{(c)}$ についても，$d_1^{(c)}=1/a$ を初期値として，漸化式

$$d_k^{(c)}=\frac{(2k+1)(k-a-1)}{(k+a)(2k-3)}d_{k-2}^{(c)}\quad (k=2,4,\ldots) \tag{26}$$

により計算するとよい．

ドイフルハートの方法は，式 (22) あるいは式 (23) から分かるように，2 つの漸化式を計算するので，ミラーの方法の約 2 倍の計算量を必要とする．それでも，漸化式の繰り返し回数をあらかじめ与えておく必要がなく，任意精度で，自動的に $\mathrm{Si}(a,x)$ あるいは $\mathrm{Ci}(a,x)$ を計算できる．これがドイフルハートの方法を使う最大の利点である．

### 3.1 数値例

**表 1** には，倍精度演算で，要求相対精度が $10^{-14}$ のときの計算値を示す．この表の第 1 欄に示した $a$ と $x$ の場

**表 1** 倍精度演算で，要求相対精度 $10^{-14}$ のときのドイフルハートの方法（D）とテイラー展開（T）の計算値，その相対誤差と繰り返し回数（NR）

**Table 1** Calculated values of Deuflhard's method (D) and Taylor Expansion (T), relative error and the number of repeats (NR) in case of relative required accuracy $10^{-14}$ with double precision arithmetic.

| Calculated values for $a=2.1$, $x=10$ | | | Error | NR |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | D | 9.634123130215194d+00 | 1.2d–15 | 33 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | D | −9.037962972312949d+00 | 2.1d–15 | 33 |
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | T | 9.634123130212487d+00 | −2.8d–13 | 24 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | T | −9.037962972316379d+00 | 3.8d–13 | 25 |

| Calculated values for $a=20.1$, $x=10$ | | | Error | NR |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | D | −7.169205859528801d+17 | −5.5d–17 | 33 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | D | −5.647790887377182d+18 | 3.1d–15 | 33 |
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | T | −7.169205859542685d+17 | 1.9d–12 | 25 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | T | −5.647790887378625d+18 | 2.6d–13 | 25 |

| Calculated values for $a=50.1$, $x=10$ | | | Error | NR |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | D | −9.192324690050478d+47 | 2.3d–15 | 33 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | D | −2.290079564657968d+48 | 2.0d–15 | 33 |
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | T | −9.192324690056486d+47 | 6.6d–13 | 25 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | T | −2.290079564658744d+48 | 3.4d–13 | 25 |

| Calculated values for $a=2.2$, $x=20$ | | | Error | NR |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | D | −1.319510489105670d+01 | 1.7d–16 | 49 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | D | 3.306563733953536d+01 | 1.3d–15 | 49 |
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | T | −1.319510477738614d+01 | −8.6d–09 | 39 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | T | 3.306563739468277d+01 | 1.7d–09 | 39 |

| Calculated values for $a=2.2$, $x=50$ | | | Error | NR |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | D | −1.065246124628481d+02 | 6.4d–15 | 87 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | D | −2.719989632688914d+01 | 6.8d–15 | 87 |
| $\mathrm{Si}(a,x)$ | T | 3.568118379819611d+06 | −3.3d+04 | 76 |
| $\mathrm{Ci}(a,x)$ | T | 3.892415868504981d+06 | −1.4d+05 | 77 |

合の $\mathrm{Si}(a,x)$ と $\mathrm{Ci}(a,x)$ に対して，ドイフルハートの方法（D）による計算値，その相対誤差と漸化式の繰り返し回数，そして，式 (3)，(4) で表されるテイラー展開（T）による計算値，その相対誤差と計算した項数を表示している．これより，交代級数であるテイラー展開で，桁落ちにより結果が求められない場合でも，球ベッセル関数の級数による本方法は頑健であることが分かる．この方法は，$x$ が大きくなると，漸化式の繰り返し回数が多くなることを示している．なお，精度判定は，$|(r_k - r_{k-1})/r_k|$ で行っている．相対誤差を求めるために使う真値は，ドイフルハートの方法とテイラー展開を 4 倍精度演算で行って得たものを採用した．なお，これらの計算は，プロセッサー Intel(R) i3-2370M 2.40 GHz で，C & Fortran（Fujitsu Workbench）の Fortran コンパイラを用いて行った．

## 4. おわりに

一般化された sine 積分 $\mathrm{Si}(a,x)$ と cosine 積分 $\mathrm{Ci}(a,x)$ は，球ベッセル関数 $j_n(x)$ の級数で表すことができる．この級数を計算するための従来の計算法として，漸化式を用いる方法（ミラーの方法）があるが，本稿では，要求精度で自動的に，能率的に関数値を求められるドイフルハートの方法を新規に適用した方法を提案した．

### 参考文献


[1] Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert, R.F. and Clark, C.W.: *NIST Handbook of Mathematical Functions*, p.188, Cambridge University Press (2010).

[2] Kreyszig, E.: Uber den allgemeinen Integralsinus $\mathrm{Si}(z,a)$, Acta Math., Vol.85, pp.117–181 (1951).

[3] Kreyszig, E.: Der aligemeine Integralkosinus $\mathrm{Ci}(z,\alpha)$, Acta Math., Vol.89, pp.107–131 (1953).

[4] Reinsch, K.D., Bulirsch, R. and Puschmann, U.: Numerical Calculation of the Generalized Sine and Cosine Integral, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Vol.32, No.2, pp.813–826 (2002).

[5] Watson, G.N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (second edition), p.369, Cambridge University Press (1944).

[6] 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II，pp.103–121, 培風館 (1965).

[7] 二宮市三，吉田年雄，長谷川武光，秦野甯世，杉浦　洋，櫻井鉄也，細田陽介：数値計算のわざ，pp.21–41, 共立出版 (2006).

[8] Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations, *SIAM Review*, Vol.9, No.1, pp.24–82 (1967).

[9] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.437, Dover Publications (1972).

[10] Deuflhard, P.: A Summation Technique for Minimal Solutions of Linear Homogeneous Difference Equations, *Computing*, Vol.18, pp.1–13 (1977).



**吉田 年雄** （正会員）

1944 年生．1968 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業．1973 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程単位取得満期退学．工学博士．同年名古屋大学助手．1985 年同講師．1986 年中部大学助教授．1990 年同教授．2005 年同情報科学研究所長（〜2014 年 3 月）．2015 年同名誉教授．



**足達 義則** （正会員）

1953 年生．1976 年名古屋大学理学部数学科卒業．工学博士（東北大学）．同年名古屋工業大学助手．1988 年中部大学講師．1990 年同助教授．1996 年同教授．2018 年同経営情報学部長．2021 年同図書館長．