Vol.2022-GI-47 No.5
2022/3/18

Delete Nimの一般化と勝敗判定

篠田 正人[1,a)]

概要：石取りゲーム Nim には様々な変形ルールが提案されており，Delete Nim もその一つである．本研究では石の山数を n 個に一般化した Delete Nim として，プレイヤーが各手番で (i) $(n-1)$ 個の山を選んで除去し，残りの 1 山を n 個に分割する (ii) 1 個の山を選んで除去し，残りの山から 1 山を選んで 2 個に分割する という 2 種類のルールを提案し，各局面での勝敗条件について考察した．その結果, (i) のゲームすべてと (ii) の $n \leq 4$ の場合について勝敗条件を得られたこととなった．本報告では，特に (ii) の $n=4$ の場合についてその条件と証明を詳細に論じる．

Generalizations of Delete Nim Game and determining the winner

1. はじめに

Nim は古くからよく知られたゲームの一つである．最も基本的なルールの Nim は 2 人のプレイヤーで行われる．いくつかの石で構成される山が 3 つあり，プレイヤーは自分の手番で 1 つの山を選び，その山から任意の正の整数個の石を取り除く．ゲームの途中の局面を 3 つの山の石の数を列挙することで $\langle x, y, z \rangle$ の形で表す（x, y, z はすべて非負整数）とき，たとえば $\langle 3,5,7 \rangle$ の局面において手番側のプレイヤーは $\langle 3,2,7 \rangle$ や $\langle 0,5,7 \rangle$ の局面にすることができる．この手番での操作を交互に行い，最後の石を取ったほうのプレイヤーが勝ちである．たとえば, $\langle 0,0,3 \rangle$ において手番側のプレイヤーは $\langle 0,0,0 \rangle$ の局面にすることで勝利を得る．このゲームは山の数を 3 つより増やした場合も同様のルールで定義することができる．この Nim は二人零和完全情報確定有限ゲームであり引き分けがないため，すべての局面を手番側必勝（その局面で手番であるプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{N}$ 局面と手番側必敗（その局面で手番でないプレイヤーが必ず勝てる）である $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．上述の Nim における $\mathcal{N}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の判定は Bouton [3] で示され, このゲームの勝敗条件には数学的にも興味深い構造が含まれることが知られるようになった．またゲームのより詳しい解析として各局面の Grundy 数を得る研究もなされている．この Grundy 数は，複数のゲームを組合せたゲームの勝敗判定に有用である．これらのゲームについては文献 [2], [4], [6] などに詳しく，最近の日本語での解説記事として [9], [10] がある．

Nim で石を取るルールを変えた様々な亜種のゲームとして Moore のゲーム，Welter=佐藤のゲーム（マヤゲーム），Wythoff のゲームなどが提案されており, それぞれのルールにおける勝敗条件が調べられその数学的な表現が興味の対象となっている．また石の山を分割するゲームとして Grundy のゲームなども知られている．本研究では，Abuku-Suetsugu [1] らによって導入された，石を取りつつ山を分割するゲームである Delete Nim の一般化を提案し，その勝敗条件について考察する．

本報告の構成は以下の通りである．第 2 章で Delete Nim のルールと勝敗判定について述べる．この章の内容は石の山の数が 2 つの場合に関するものである．第 3 章で，Delete Nim の石の山数を 3 つ以上に拡張する 2 種類のルールについて述べる．この 2 種類のルールについて得られた結果を第 4 章から第 7 章において述べ，第 8 章ではそのうちの 1 つの定理について証明を詳しく述べる．

2. Delete Nim

本章では，Delete Nim のルールと勝敗判定について説明する．Delete Nim については文献 [1], [8] および [7] で異なる形の 2 種類のルールが与えられているが，これらは合法手に関して同値なゲームであり，本報告では後者の形での設定を行う．

Delete Nim ではいくつかの石で構成する山が 2 つあり，

1 奈良女子大学研究院自然科学系
Division of Natural Sciences, Nara, Nara 630-8506, Japan
a) shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い（この2つの操作を合わせて「一手」と呼ぶことにする），手番を相手に交代する．

- 片方の山を選び，その山の石をすべて取り去ることで山を除去する．
- 残っているもう1つの山の石を2つの山に分ける．このとき，どちらの山も1個以上の石を含むようにしなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．Delete Nim の局面を2つの山の石の数 y, z を用いて $\langle y, z\rangle$ と表し，正の整数の集合を $\mathbb{N}$ で表すとき，ゲームに現れる局面（どちらの手番であるかという情報を含まない）全体の集合は $G_2 = \{\langle y, z\rangle \mid y, z \in \mathbb{N}\}$ であり，$\langle 1, 1\rangle$ では手番側のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる．

Delete Nim も Nim 同様に二人零和完全情報確定有限かつ引き分けのないゲームであるため，G に含まれる各局面は手番側が必ず勝てる $\mathcal{N}$ 局面と手番側が必敗である $\mathcal{P}$ 局面に分類できる．この判定条件は以下のように知られている．

定理 1　Delete Nim において y, z がともに奇数であるとき $\langle y, z\rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面であり，それ以外は $\mathcal{N}$ 局面である．

証明は前述の文献に記載されているためここでは省略するが，本報告の定理2の証明にも含まれている．[1], [8] ではこのゲームの各局面の Grundy 数も得られている．

3. 山数を一般化した Delete Nim のルール

本節では，Delete Nim の山の数を一般化する2種類の拡張ルールを定義する．以下，n は2以上の整数とする．

定義 1　(All-but one delete Nim) いくつかの石で構成される n 個の山がある．2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- $n-1$ 個の山を選び，それらの山を除去する．
- 残っている1つの山の石を n 個の山に分ける．このとき，どの山も1個以上の石を含まなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．

定義 2　(Single-delete Nim) いくつかの石で構成される n 個の山がある．2人のプレイヤーはそれぞれの手番で以下の2つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- 1つの山を選んで除去する．
- 残っている $n-1$ 個の山のうちの1つを選んで2つの山に分ける．このとき，どちらの山も1個以上の石を含まなければならない．

自分の手番でこれらの操作ができないプレイヤーは負けとなる．

All-but one delete Nim（以後 **ABO-delete Nim** と略記する）および Single-delete Nim において，各手番終了後の山の数はつねに n 個であることに注意する．これらのゲームに現れる局面（手番情報を含まない）全体の集合は $G_n = \{\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle \mid z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{N}\}$ であり，$n = 2$ の場合はいずれも2章で述べた Delete Nim に相当するため，どちらのゲームも Delete Nim の山数を一般化した拡張であると言える．ルールの定義により，ABO-delete Nim における終了局面の集合は $\{\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle \mid 1 \leq z_1, z_2, \ldots, z_n \leq n-1\}$ であり，Single-delete Nim における終了局面は $\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle$ のみである．

注意 この2種類の拡張ルールの Single-delete Nim，ABO-delete Nim という命名は本論文で定めたものである．山の削除と残りの山の分割の定め方によって他の拡張ルールも考えられるため，この命名では「1つの山だけを削除する」「1つの山以外を削除する」という意味合いを明確にしている．

4. ABO-delete Nim の勝敗判定

本章では ABO-delete Nim の各局面について，$\mathcal{P}$ 局面であるか $\mathcal{N}$ 局面であるかの判定条件を示す．すべての n に対し，以下の結果を得た．

定理 2　（ABO-delete Nim の勝敗判定） ABO-delete Nim の局面 $\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，

$(*)$ すべての i に対し，z_i を $n(n-1)$ で割った余りが
　　1以上 $n-1$ 以下である

ことである．

証明 ABO-delete Nim に現れる局面全体の集合 G_n のうち，$(*)$ の条件をみたす局面の集合を P，それ以外の局面の集合を N で表す．このゲームの進行において山の石数の総和は単調減少であること，および P は ABO-delete Nim における終了局面をすべて含んでいることから，P に含まれるどの局面も一手では P に含まれる局面に移せないこと，および N に含まれるどの局面からも一手で P に含まれる局面に移せることを示せば十分である．

P に含まれるどの局面も一手では P に含まれる局面に移せないことを示す．$\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle \in P$ から一手で移すことのできる $\langle z'_1, z'_2, \ldots, z'_n\rangle$ について，$z_i = z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_n$ となる i が存在する．従って $(*)$ の条件から $z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_n$ を $n(n-1)$ で割った余りは1以上 $n-1$ 以下である．一方，$\langle z'_1, z'_2, \ldots, z'_n\rangle$ も $(*)$ の条件をみたすとすると $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ それぞれを $n(n-1)$ で割った余りの和は n 以上 $n(n-1)$ 以下である．よって P に含まれるどの局面も一手では P

に含まれる局面に移せないことが示された．

N に含まれるどの局面からも一手で P に含まれる局面に移せることを示す．$\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle \in N$ であるとき，ある z_i を $n(n-1)$ を割った余りは n 以上である（ただし $n(n-1)$ で割り切れるときは余り $n(n-1)$ だとみなす）．その i 番目の山以外を除去し，i 番目の山を $n-1$ 個の山に分割して $(*)$ の条件をみたすことが可能である．□

5. 3 山 Single-delete Nim の勝敗判定

以下の章では Single-delete Nim の各局面の勝敗条件について考察する．まず本章では山の数が 3 つであるときを扱う．

勝敗条件を提示するために記号を定義する．正の整数 z に対し，z が 2^k で割り切れて 2^{k+1} で割り切れないとき $v_2(z) = k$ と表す．z が奇数のときは $v_2(z) = 0$ である．

3 山の Single-delete Nim において以下の結果が坂井 [5] により知られている．

定理 3 （**3 山 Single-delete Nim の勝敗判定**）山数が 3 の Single-delete Nim の局面 $\langle x, y, z\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，

$$(\#) \qquad v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$$

である．

定理 3 の証明は [5] の p59-63 で示されているが，次章以降で 4 山の場合の説明をするためにも有用であるので本報告でも改めて記述する．証明のために以下の命題を用意する．いずれもほぼ自明の事実であり証明は省略するが，次章以降でも頻繁に用いるためここでまとめて述べておく．

命題 4 $x + y = z$ をみたす $x, y, z \in \mathbb{N}$ について，以下の (i), (ii) が成り立つ．

(i) $v_2(x) = v_2(y)$ ならば $v_2(z) > v_2(x)$,

(ii) $v_2(x) \neq v_2(y)$ ならば $v_2(z) = \min\{v_2(x), v_2(y)\}$.

命題 5 $z \in \mathbb{N}$ かつ $v_2(z) \geq 1$ であるとき，任意の非負整数 $k < v_2(z)$ に対して $x + y = z$ かつ $v_2(x) = v_2(y) = k$ をみたす $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する．

この命題 5 の条件をみたす x, y の一例として $x = z - 2^k, y = 2^k$ を挙げることができる．

定理 3 の証明 3 山 Single-delete Nim に現れる局面全体の集合 $G_3 = \{\langle x, y, z\rangle \mid x, y, z \in \mathbb{N}\}$ のうち，$(\#)$ の条件をみたす局面全体の集合を P，それ以外の局面の集合を N で表す．このゲームの進行において山の石数の総和は単調減少であること，および P は 3 山 Single-delete Nim における終了局面 $\langle 1, 1, 1\rangle$ を含んでいることから，P に含まれるどの局面も一手では P に含まれる局面に移せないこと，および N に含まれるどの局面からも一手で P に含まれる局面に移せることを示せば十分である．

まず $\langle x, y, z\rangle \in P$ とする．このとき $v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$ であるので，次の一手では，z 個の石を含む山を除去し x 個の石を含む山を x' 個と x'' 個の石を含む山に分割して $\langle x', x'', y\rangle$ に移す場合を考えれば十分である．命題 4 より，$v_2(x') = v_2(x'')$ ならば $v_2(x') < v_2(x) = v_2(y)$ となるので $v_2(x') = v_2(x'') = v_2(y)$ が成り立つことはない．すなわち，P に含まれるどの局面からも一手では P に含まれる局面に移れない．

次に $\langle x, y, z\rangle \in N$ とする．$v_2(x) = v_2(y) = v_2(z)$ ではないので $v_2(x) < v_2(y)$ の場合を考えれば十分である．命題 5 より，y 個の石を含む山を，$v_2(y') = v_2(y'') = v_2(x)$ をみたすような y' 個と y'' 個の石の山に分割することができ，z 個の石を含む山を除去すれば $\langle x, y', y''\rangle \in P$ とできる．すなわち，N に含まれるどの局面も一手で P に含まれる局面に移すことができる．□

6. 4 山 Single-delete Nim の勝敗判定

本章では山の数が 4 つである Single-delete Nim の勝敗判定条件を定理 6 として述べる．

定理 6 を述べるために，正の整数の 2 進法表示に関する記法を導入する．$z \in \mathbb{N}$ を 2 進法で表したときの下から k 桁目の数字を $I_k(z)$ で表す．つまり z を 2^{k-1} で割ったときの商が偶数なら $I_k(z) = 0$，奇数なら $I_k(z) = 1$ であり，$v_2(z) = \min\{\, k \mid I_k(z) = 1\} - 1$ と表される．

定理 6 （**4 山 Single-delete Nim の勝敗判定**）山数が 4 の Single-delete Nim の局面 $\langle w, x, y, z\rangle$ において $a = v_2(w), b = v_2(x), c = v_2(y), d = v_2(z)$ とする．$a \leq b \leq c \leq d$ であるとき，この $\langle w, x, y, z\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，以下の (1),(2),(3),(4),(5) のいずれかの条件をみたすことである．

(1) $a = b = c = d$.

(2) $a < b = c = d$ かつ
 (2A) $I_{d+1}(w) = 0$.

(3) $a < b < c = d$ かつ (3A)-(3C) がすべて成り立つ．
 (3A) $I_{d+1}(w) = I_{d+1}(x) = 0$,
 (3B) $b + 2 \leq k \leq d$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1$,
 (3C) $I_{b+1}(w) = 1$.

(4) $a < b < c < d$ かつ (4A)-(4E) がすべて成り立つ．
 (4A) $I_{d+1}(w) = I_{d+1}(x) = I_{d+1}(y) = 0$,
 (4B) $c+2 \leq j \leq d$ に対し $I_j(w)+I_j(x)+I_j(y) \geq 2$,
 (4C) $I_{c+1}(w) = I_{c+1}(x) = 1$,
 (4D) $b + 2 \leq k \leq c$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1$,
 (4E) $I_{b+1}(w) = 1$.

(5) $a < b < c < d$ かつ (5A)-(5F) がすべて成り立つ．
 (5A) $i \geq d + 2$ に対し
  $I_i(w) + I_i(x) + I_i(y) + I_i(z) \in \{0, 3, 4\}$,
 (5B) $I_{d+1}(w) = I_{d+1}(x) = I_{d+1}(y) = 1$,
 (5C) $c+2 \leq j \leq d$ に対し $I_j(w)+I_j(x)+I_j(y) \geq 2$,

(5D) $I_{c+1}(w) = I_{c+1}(x) = 1$,
(5E) $b+2 \leq k \leq c$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1$,
(5F) $I_{b+1}(w) = 1$.

この定理 6 の証明は第 8 章でまとめて行う．この章では上記 (1)-(5) の条件がどのような必要性から得られるかを，以下の具体例での比較により簡単に述べる．

(1) この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 1440, 864, 672, 1120 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 10110100000 \\ x & 01101100000 \\ y & 01010100000 \\ z & 10001100000 \end{array}$$

であり，最も下の桁に現れる 1 の位置が同一である．

(2) この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 294, 208, 304, 432 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 100100110 \\ x & 011010000 \\ y & 100110000 \\ z & 110110000 \end{array}$$

である．(2A) の条件がみたされない類似局面

$$\begin{array}{ll} w & 1001\underline{1}0110 \\ x & 011010000 \\ y & 100110000 \\ z & 110110000 \end{array}$$

においては，x を消去して w を w', w'' に分割し

$$\begin{array}{ll} w' & 100100110 \\ w'' & 000010000 \\ y & 100110000 \\ z & 110110000 \end{array}$$

として一手で (2) の条件をみたすことができてしまう．

(3) この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 669, 468, 800, 288 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 1010011101 \\ x & 0111010100 \\ y & 1100100000 \\ z & 0100100000 \end{array}$$

である．(3B) の条件がみたされない類似局面

$$\begin{array}{ll} w & 10100\underline{0}1101 \\ x & 01110\underline{0}0100 \\ y & 1100100000 \\ z & 0100100000 \end{array}$$

においては，z を消去し y を y', y'' に分割し

$$\begin{array}{ll} w & 1010001101 \\ x & 0111000100 \\ y' & 1100010000 \\ y'' & 0000010000 \end{array}$$

として一手で (3) の条件をみたすことができてしまう．

(4) この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 11133, 12716, 7136, 13312 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ x & 11000110101100 \\ y & 01101111100000 \\ z & 11010000000000 \end{array}$$

である．(4B) の条件がみたされない類似局面

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ x & 11000110101100 \\ y & 011011\underline{0}1100000 \\ z & 11010000000000 \end{array}$$

においては，x を消去し z を z', z'' に分割し

$$\begin{array}{ll} w & 10101101111101 \\ y & 01101101100000 \\ z' & 11001110000000 \\ z'' & 00000010000000 \end{array}$$

として一手で (3) の条件をみたすことができてしまう．

(5) この場合の局面の具体的な例として $\langle w, x, y, z \rangle = \langle 45053, 62932, 32576, 64512 \rangle$ がある．石数を 2 進表記すると

$$\begin{array}{ll} w & 1010111111111101 \\ x & 1111010111010100 \\ y & 0111111101000000 \\ z & 1111110000000000 \end{array}$$

である．(5A) の条件がみたされない類似局面

$$\begin{array}{ll} w & 1010111111111101 \\ x & 1111010111010100 \\ y & 011\underline{0}111101000000 \\ z & 1111110000000000 \end{array}$$

においては，x を消去し z を z', z'' に分割し

$$\begin{array}{ll} w & 1010111111111101 \\ y & 0110111101000000 \\ z' & 1110110000000000 \\ z'' & 0001000000000000 \end{array}$$

として一手で (4) の条件をみたすことができてしまう．

7. 5 山以上の Single-delete Nim

第 6 章で述べたように，4 山の Single-delete Nim の勝敗条件は 3 山以下の場合と比べて複雑になっており，さらに山の数を増やす場合の条件は予想することもできていない。山数が 5 以上の場合の Single-delete Nim について，本報告では以下のほぼ自明な 2 つの命題を示すにとどめる．特に命題 8 は，定理 3 や定理 6(1) の条件のように各山の石の個数が 2 で割れる回数がすべて等しくても，山の数によっては $\mathcal{P}$ 局面となるとは限らず勝敗条件がより複雑になることを示唆している．

命題 7 山数 n が 2 以上の Single-delete Nim において，局面 $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle$ は x_i がすべて奇数であれば $\mathcal{P}$ 局面である．

証明 x_i がすべて奇数である局面の集合を P_0 とする．局面 $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \in P_0$ で手番側のプレイヤーが一手で $\langle x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n \rangle$ に移すとき，$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$ のうちのただ 1 つが偶数となる．次の一手で奇数を 1 つ除去し，偶数を奇数の和に分割すると再度 P_0 の局面に戻すことができる．従って，$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \in P_0$ で手番側のプレイヤーはつねに P_0 の局面で手番側になることを強制され，最後には終了局面 $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ に到達する．□

命題 8 山数 n が 2 以上の Single-delete Nim において，n を 3 で割った余りが 2 であれば $\langle 2, 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ は $\mathcal{N}$ 局面であり，それ以外の n に対しては $\langle 2, 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ は $\mathcal{P}$ 局面である．

証明 初期局面を $\langle 2, 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ とする Single-delete Nim においてゲーム進行中に現れる局面は，n 個の山のうち石の数が 2 個であるものが k 個，1 個であるものが $n-k$ 個（$1 \le k \le n$）であり，各手番でプレイヤーの行う操作は石の数が 1 個または 2 個の山を除去し石の数が 2 個の山の 1 つを分割する操作に限られることを考えると，k の値に注目すればこのゲームは以下の形の石取りゲームと同値である．

- 最初の手番のプレイヤーは，n 個の石から 2 個を取る．それ以降の手番ではどちらのプレイヤーも，1 個または 2 個の石を取る．
- 最後の石を取ったほうが勝ちとなる．

従って n を 3 で割った余りが 2 であるとき，最初の手番のプレイヤーは 2 個の石を取った後，相手が 2 個の石を取れば自分は次の手番で 1 個の石を取り，相手が 1 個の石を取れば自分は次の手番で 2 個の石を取ることで必ず勝つことができる．（n を 3 で割った余りが 2 でないときの証明は省略する）□

8. 定理 6 の証明

本章では定理 6 の証明を行う．4 山 Single-delete Nim の局面全体の集合 $G_4 = \{ \langle w, x, y, z \rangle \mid w, x, y, z \in \mathbb{N} \}$ に含まれる $\langle w, x, y, z \rangle$ が $v_2(w) \le v_2(x) \le v_2(y) \le v_2(z)$ をみたすとき $\langle w, x, y, z \rangle$ は標準形であると言うこととし，$\langle w, x, y, z \rangle \in G_4$ の要素の表示順序を並べ替えて標準形で表すことを $\langle w, x, y, z \rangle$ の標準化と言うこととする．G_4 の部分集合 P を，$\langle w, x, y, z \rangle$ の標準化が定理 6 の条件 (1)〜(5) のいずれかをみたすならば $\langle w, x, y, z \rangle \in P$，として定め，$P$ に含まれない G_4 の局面の集合を N とする．すなわち，P, N はそれぞれこのゲームの $\mathcal{P}$ 局面の集合と $\mathcal{N}$ 局面の集合に対応している．

このゲームの進行において山の石数の総和は単調減少であること，および P は 4 山 Single-delete Nim における終了局面 $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ を含んでいることから，定理 6 の証明で示すべきことは以下の 2 つの補題である．

補題 9 局面 $\langle w, x, y, z \rangle \in P$ から局面 $\langle w', x', y', z' \rangle$ に一手で移せるとするとき，$\langle w', x', y', z' \rangle \notin P$ である．

補題 10 局面 $\langle w, x, y, z \rangle \in N$ に対し，この局面から一手で移せる $\langle w', x', y', z' \rangle \in P$ が存在する．

これらの補題の証明に際し，共通の記号を導入しておく．$\langle w, x, y, z \rangle$ の標準化が定理 6 の条件 (i) をみたす（$1 \le i \le 5$）とき $\langle w, x, y, z \rangle \in P_i$ である，として P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を定める．従って $P = \bigcup_{i=1}^{5} P_i$ であり，(1)〜(5) の条件により $i \ne j$ であれば $P_i \cap P_j = \emptyset$ である．

2 つの補題の証明のために次の命題を掲げる．

命題 11 $w, x \in \mathbb{N}$ が $i < j$ について $I_i(w) = I_i(x) = 1$ かつ $I_j(w) = I_j(x) = 0$ であり，さらに $i < k < j$ をみたすすべての k に対して $I_k(w) + I_k(x) \ge 1$ であるとき，$I_j(w + x) = 1$ である．

2 進法での繰り上がりを考えれば命題 11 が成り立つことは明らかである．以上を踏まえ，ここから補題 9 と補題 10 の証明を行う．

補題 9 の証明 $\langle w, x, y, z \rangle$ から局面 $\langle w', x', y', z' \rangle$ に一手で移す操作を逆に考えると

- w', x', y', z' のうちの 2 つを選び、和を作って 1 つの数にする
- 新たに要素 $u' \in \mathbb{N}$ を付加し，全部で 4 つの数にする

ことになる．よってこの証明中では局面 $\langle w, x, y, z \rangle$ から局面 $\langle w', x', y', z' \rangle$ に一手で移すとき，上記の逆操作を考え，$\langle w', x', y', z' \rangle \in P$ ならば $\langle w, x, y, z \rangle \notin P$ であることを示す．以下で $\langle w', x', y', z' \rangle \in P_i$ $(1 \le i \le 5)$ それぞれの場合に分けて証明する．なお $a = v_2(w), b = v_2(x), c = v_2(y), d = v_2(z)$ である局面 $\langle w, x, y, z \rangle$ において

(△) $a=b=c<d,\ a=b<c=d,\ a=b<c<d,$ $a<b=c<d$ のいずれかのときは (1)〜(5) のいずれの条件もみたせないので P には含まれない．

この事実も以下での説明で頻繁に用いる．

a) $\langle w',x',y',z'\rangle \in P_1$ のとき
$v_2(w')=v_2(x')=v_2(y')=v_2(z')$ であるので，逆操作において和 $y'+z'$ を作る場合のみを考えれば十分である．このとき命題 4(i) により $v_2(w')=v_2(x')<v_2(y'+z')$ であるため，どのような u' を付加しても $\langle u',w',x',y'+z'\rangle$ は (△) に該当し，いずれの P_i にも含まれない．

b) $\langle w',x',y',z'\rangle \in P_2$ のとき
$v_2(w')<v_2(x')=v_2(y')=v_2(z')$ であるとする．$d=v_2(z')$ とし，以下の事実を用いる．
($♣_1$) (2A) から $I_{d+1}(w')=0$.
($♣_2$) $I_{d+1}(w'+z')=1$.

逆操作で和 $y'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x',y'+z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w')<v_2(x')<v_2(y'+z')$ である．もし $v_2(u')>v_2(x')$ であると ($♣_1$) により (3C)，(4E) または (5F) をみたせない．$v_2(u')=v_2(x')$ または $v_2(u')=v_2(w')$ であると (△) に該当する．$v_2(u')<v_2(x')$ かつ $v_2(u')\neq v_2(w')$ であると ($♣_1$) により (4C) または (5D) をみたせない．よって $\langle u',w',x',y'+z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $w'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+z',x',y'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w'+z')<v_2(x')=v_2(y')$ である．もし $v_2(u')>v_2(y')$ であると (△) に該当する．$v_2(u')\le v_2(y')$ であると ($♣_2$) により (2A) または (3A) をみたせない．よって $\langle u',w'+z',x',y'\rangle \notin P$ であることがいえる．

c) $\langle w',x',y',z'\rangle \in P_3$ のとき
$v_2(w')<v_2(x')<v_2(y')=v_2(z')$ であるとする．$d=v_2(z')$ とし，以下の事実を用いる．
($\diamondsuit_1$) (3A) から $I_{d+1}(w')=I_{d+1}(x')=0$.
($\diamondsuit_2$) $I_{d+1}(x'+z')=1$.
($\diamondsuit_3$) (3B) と命題 11 から $I_{d+1}(w'+x')=1$.

逆操作で和 $y'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x',y'+z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w')<v_2(x')<d<v_2(y'+z')$ である．もし $v_2(u')>d$ であると ($\diamondsuit_1$) により (3B)，(4D) または (5E) をみたせない．$v_2(u')=d$ であると ($\diamondsuit_1$) により (4C) または (5D) をみたせない．$v_2(u')<d$ かつ $v_2(u')\neq v_2(w'),v_2(x')$ であると ($\diamondsuit_1$) により (4B) または (5C) をみたせない．$v_2(u')=v_2(w')$ または $v_2(u')=v_2(x')$ であると (△) に該当する．よって $\langle u',w',x',y'+z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $x'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x'+z',y'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w')<v_2(x'+z')<v_2(y')$ である．もし $v_2(u')>v_2(y')$ であると ($\diamondsuit_1$) により (4C) または (5D) をみたせない．$v_2(u')=v_2(y')$ であると ($\diamondsuit_2$) により (3A) をみたせない．$v_2(u')<v_2(y')$ かつ $v_2(u')\neq v_2(x'+z'),v_2(w')$ であると ($\diamondsuit_1$) と ($\diamondsuit_2$) により (4A) または (5B) をみたせない．$v_2(u')=v_2(x'+w')$ または $v_2(u')=v_2(z')$ であると (△) に該当する．よって $\langle u',w',x'+z',y'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $w'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+z',x',y'\rangle$ についても，和 $x'+z'$ を作り u' を付加した場合と同様に P に含まれないことが示される．

逆操作で和 $w'+x'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+x',y',z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w'+x')<v_2(y')=v_2(z')$ である．もし $v_2(u')>v_2(y')$ であると (△) に該当する．$v_2(u')\le v_2(y')$ かつ $v_2(u')\neq v_2(w'+x')$ であると ($\diamondsuit_3$) により (2A) または (3A) をみたせない．$v_2(u')=v_2(w'+x')$ であると (△) に該当する．よって $\langle u',w'+x',y',z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

d) $\langle w',x',y',z'\rangle \in P_4$ のとき
$v_2(w')<v_2(x')<v_2(y')<v_2(z')$ であるとする．$c=v_2(y'),d=v_2(z')$ とし，以下の事実を用いる．
($\heartsuit_1$) (4A) から $I_{d+1}(w')=I_{d+1}(x')=I_{d+1}(y')=0$.
($\heartsuit_2$) (4C) から $I_{c+1}(w')=I_{c+1}(x')=1$.
($\heartsuit_3$) (4B) から $c+2\le j\le d$ に対し
$$I_j(w)+I_j(x)+I_j(y)\ge 2.$$
($\heartsuit_4$) (4B) と命題 10 から
$$I_{d+1}(w'+x')=I_{d+1}(w'+y')=I_{d+1}(x'+y')=1.$$

逆操作で和 $y'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x',y'+z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w')<v_2(x')<v_2(y'+z')<d$ である．もし $v_2(u')>d$ であると ($\heartsuit_1$) により (4B) または (5C) をみたせない．$v_2(u')=d$ であると ($\heartsuit_1$) により (4A) または (5B) をみたせない．$v_2(u')<d$ かつ $v_2(u')\neq v_2(y'+z'),v_2(x'),v_2(w')$ であると ($\heartsuit_1$) と ($\heartsuit_3$) により (4A) または (5A) をみたせない．$v_2(u')=v_2(y'+z')$ であると ($\heartsuit_2$) により (3A) をみたせない．$v_2(u')=v_2(x')$ または $v_2(u')=v_2(w')$ であると (△) に該当する．よって $\langle u',w',x',y'+z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $x'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x'+z',y'\rangle$ および和 $w'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+z',x',y'\rangle$ についても，和 $y'+z'$ を作り u' を付加した場合と同様に P に含まれないことが示される．

逆操作で和 $x'+y'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x'+y',z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w') < v_2(x'+y') < v_2(z') < d$ である．もし $v_2(u') > v_2(z')$ であると ($\heartsuit_1$) により (4C) または (5D) をみたせない．$v_2(u') = v_2(z')$ であると ($\heartsuit_4$) により (3A) をみたせない．$v_2(u') < v_2(z')$ かつ $v_2(u') \neq v_2(x'+y'), v_2(w')$ であると ($\heartsuit_1$) と ($\heartsuit_4$) により (4A) または (5B) をみたせない．$v_2(u') = v_2(x'+y')$ または $v_2(u') = v_2(w')$ であると ($\triangle$) に該当する．よって $\langle u',w',x'+y',z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $w'+y'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+y',x',z'\rangle$ および和 $w'+x'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+x',y',z'\rangle$ についても，和 $x'+y'$ を作り u' を付加した場合と同様に P に含まれないことが示される．

e) $\langle w',x',y',z'\rangle \in P_5$ のとき

$v_2(w') < v_2(x') < v_2(y') < v_2(z')$ であるとする．$b = v_2(x'), c = v_2(y'), d = v_2(z')$ とし，

($\spadesuit_1$) $I_{e+1}(w') = I_{e+1}(x') = I_{e+1}(y') = I_{e+1}(z') = 0$ かつ $e > d$ となる最小の e を定める．さらに以下の事実を用いる．

($\spadesuit_2$) (5A) から $d+2 \leq i \leq e$ に対して
$$I_i(w') + I_i(x') + I_i(y') + I_i(z') \geq 3.$$

($\spadesuit_3$) (5B) から $I_{d+1}(w') = I_{d+1}(x') = I_{d+1}(y') = 1$ かつ
$$I_{d+1}(w'+z') = I_{d+1}(x'+z') = I_{d+1}(y'+z') = 0.$$

($\spadesuit_4$) (5D) から $I_{c+1}(w') = I_{c+1}(x') = 1$.

($\spadesuit_5$) (5C) から $c+2 \leq j \leq d$ に対し $I_j(w) + I_j(x) + I_j(y) \geq 2$,
(5E) から $b+2 \leq k \leq c$ に対し $I_k(w) + I_k(x) \geq 1$.

($\spadesuit_6$) (5A) と命題 11 から w',x',y',z' のうちの 2 つの和について
$$I_{e+1}(w'+x') = \cdots = I_{e+1}(y'+z') = 1.$$

逆操作で和 $y'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x',y'+z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w') < v_2(x') < d < v_2(y'+z') = e$ である．もし $v_2(u') > e$ であると ($\spadesuit_1$) により (4B) をみたせない．$d < v_2(u') \leq e$ であると ($\spadesuit_2$) により (4A) をみたせず，さらに ($\spadesuit_1$) と ($\spadesuit_6$) から (5A) をみたせない．$v_2(u') = d$ であると ($\spadesuit_3$) により (4A) または (5B) をみたせない．$v_2(u') < d$ かつ $v_2(u') \neq v_2(y'+z'), v_2(x'), v_2(w')$ であると ($\spadesuit_5$) により (4A)，($\spadesuit_1$) と ($\spadesuit_6$) により (5A) をみたせない．$v_2(u') = v_2(y'+z')$ であると ($\spadesuit_4$) により (3A) をみたせない．$v_2(u') = v_2(x')$ または $v_2(u') = v_2(w')$ であると ($\triangle$) に該当する．よって $\langle u',w',x',y'+z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $x'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x'+z',y'\rangle$ および和 $w'+z'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+z',x',y'\rangle$ についても，和 $y'+z'$ を作り u' を付加した場合と同様に P に含まれないことが示される．

逆操作で和 $x'+y'$ を作り u' を付加した $\langle u',w',x'+y',z'\rangle$ が P に含まれるかどうかを考える．ここで $v_2(w') < v_2(x'+y') < v_2(z')$ である．もし $v_2(u') > e$ であると ($\spadesuit_1$) により (4B) をみたせない．$v_2(z') < v_2(u') \leq e$ であると ($\spadesuit_2$) により (4A) をみたせず，さらに ($\spadesuit_1$) と ($\spadesuit_6$) から (5A) をみたせない．$v_2(u') = v_2(z')$ であると ($\spadesuit_3$) から (3A) をみたせない．$v_2(u') < v_2(z')$ かつ $v_2(u') \neq v_2(x'+y'), v_2(w')$ であると ($\spadesuit_5$) により (4A)，($\spadesuit_1$) と ($\spadesuit_6$) により (5A) をみたせない．$v_2(u') = v_2(x'+y')$ または $v_2(u') = v_2(w')$ であると ($\triangle$) に該当する．よって $\langle u',w',x'+y',z'\rangle \notin P$ であることがいえる．

逆操作で和 $w'+y'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+y',x',z'\rangle$ および和 $w'+x'$ を作り u' を付加した $\langle u',w'+x',y',z'\rangle$ についても，和 $x'+y'$ を作り u' を付加した場合と同様に P に含まれないことが示される．□

補題 10 の証明 P に含まれない $\langle w,x,y,z\rangle$ について，一手で P に含まれる局面に移せることを具体的に示す．$a = v_2(w), b = v_2(x), c = v_2(y), d = v_2(z)$ とする．

a) $a = b = c < d, a = b < c = d, a = b < c < d$, $a < b = c < d$ のいずれかのとき

$a = b < c < d$ のときを示す．命題 5 より，$y = y' + y''$ かつ $v_2(y') = v_2(y'') = a$ となる分割が存在する．よって $\langle w,x,y,z\rangle$ から $\langle w,x,y',y''\rangle \in P_1$ に一手で移せる．$a = b = c < d, a = b < c = d, a < b = c < d$ のときも同様に $\langle w,x,y',y''\rangle \in P_1$ に一手で移せる．

b) $a < b = c = d$ かつ (2A) をみたさないとき

w を $w' = w - 2^d$ と $w'' = 2^d$ に分割することで $\langle w',w'',x,y\rangle \in P_2$ に一手で移せる．

c) $a < b < c = d$ かつ (3A),(3B),(3C) のいずれかをみたさないとき

(3A) をみたさず $I_{d+1}(w) = 1$ であるとする．w を $w' = w - 2^d$ と $w'' = 2^d$ に分割することで $\langle w',w'',x,y\rangle \in P_2$ に一手で移せる．$I_{d+1}(x) = 1$ の場合も同様である．

(3C) をみたさず $I_{b+1}(w) = 0$ であるとする．命題 5 より，$y = y' + y''$ かつ $v_2(y') = v_2(y'') = b$ となる分割を行うと $\langle w,x,y',y''\rangle \in P_2$ に一手で移せる．

(3C) をみたすが (3B) をみたさないとする．$c < k < d$ かつ $I_{k+1}(w) = I_{k+1}(x) = 0$ となる最小の k に対し，$y = y' + y''$ かつ $v_2(y') = v_2(y'') = k$ となる分割を行

うと $\langle w, x, y', y'' \rangle \in P_3$ に一手で移せる．

d) $a < b < c < d$ かつ (4A) をみたすが (4B),(4C),(4D),(4E) のいずれかをみたさないとき

(4E) をみたさず $I_{b+1}(w) = 0$ であるとする．$y = y' + y''$ かつ $v_2(y') = v_2(y'') = b$ となる分割を行うと $\langle w, x, y', y'' \rangle \in P_2$ に一手で移せる．

(4E) をみたすが (4D) の条件をみたさないとする．$b < k < c$ かつ $I_{k+1}(w) = I_{k+1}(x) = 0$ となる最小の k に対し，$y = y' + y''$ かつ $v_2(y') = v_2(y'') = k$ となる分割を行うと $\langle w, x, y', y'' \rangle \in P_3$ に一手で移せる．

(4C) をみたさず $I_{c+1}(w) = 0$ であるとする．z を $z' = z - 2^c$ と $z'' = 2^c$ に分割することで $\langle w, y, z', z'' \rangle \in P_2$ に一手で移せる．$I_{c+1}(x) = 0$ の場合も同様である．

(4C),(4D),(4E) をみたすが (4B) をみたさないとする．$c < k < d$ かつ $I_{k+1}(w), I_{k+1}(x), I_{k+1}(y)$ のうちの 2 つ以上が 0 である最小の k を定める．たとえば $I_{k+1}(w) = I_{k+1}(x) = 0$ であるとすると，$z = z' + z''$ かつ $v_2(z') = v_2(z'') = k$ となる分割を行うと $\langle w, x, z', z'' \rangle \in P_3$ に一手で移せる．他の場合も同様である．

e) $a < b < c < d$ かつ (4B),(4C),(4D),(4E) をみたすが (4A) をみたさないとき

$I_{d+1}(w) + I_{d+1}(x) + I_{d+1}(y) \in \{1, 2\}$ であるので $I_{d+1}(w), I_{d+1}(x), I_{d+1}(y)$ のうちの少なくとも 1 つは 1 であり少なくとも 1 つは 0 である．たとえば $I_{d+1}(w) = 1, I_{d+1}(x) = 0$ とするとき，$w' = w - 2^d, w'' = 2^d$ とすると $\langle w', x, w'', z \rangle \in P_3$ に一手で移せる．他の場合も同様である．

f) $a < b < c < d$ かつ (5B) をみたすが (5C),(5D),(5E),(5F) のいずれかをみたさないとき

上記 d) の場合と同様に示せる．

g) $a < b < c < d$ かつ (5C),(5D),(5E),(5F) をみたすが (5B) をみたさないとき

上記 e) の場合と同様に示せる．

h) $a < b < c < d$ かつ (5B),(5C),(5D),(5E),(5F) をみたすが (5A) をみたさないとき

$k > d$ かつ $I_{k+1}(w) + I_{k+1}(x) + I_{k+1}(y) + I_{k+1}(z) \in \{1, 2\}$ である最小の k を定める．$I_{k+1}(w)$,$I_{k+1}(x)$, $I_{k+1}(y)$,$I_{k+1}(z)$ のうちの少なくとも 1 つは 1 であり少なくとも 2 つは 0 である．たとえば $I_{k+1}(w) = 1, I_{k+1}(x) = I_{k+1}(y) = 0$ であるとすると，$w' = w - 2^k, w'' = 2^k$ とすると $\langle w', x, y, w'' \rangle \in P_4$ に一手で移せる．他の場合も同様である．□

9. まとめ

本報告では，Delete Nim の山数を一般化した All-but one delete Nim，Single-delete Nim という 2 つのゲームを導入しその勝敗条件について考察した．その結果，All-but one delete Nim についてはすべての山数の場合の勝敗条件を得た（定理 2）．また Single-delete Nim については $n = 4$ の場合の勝敗条件を得た（定理 6）．今後 $n \geq 5$ の場合の一般的な勝敗判定を行うことが目標である．

謝辞　本報告に関する研究は科学研究費基盤研究 (C)「数理ゲームを題材とする確率的最適化の研究および機械学習の有効性判定への活用（研究代表者 篠田正人）」に基づき行われた．また本報告の研究内容に関し，末續鴻輝，安福智明，坂井公の各氏に大変貴重なコメントを頂いたことに感謝する．

参考文献

[1] Abuku,T. and Suetsugu,K. : Delete Nim, *Journal of Mathematics, Tokushima University* **55**, 75-81 (2021).
[2] Albert,M.H., Nowakousuki, R.J. and Wolfe, D.（川辺治之訳）: 組合せゲーム理論入門-勝利の方程式-，共立出版 (2011).
[3] Bouton, C.L.: Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory, *Annals of Mathematics* **3**, 35-39 (1902).
[4] 一松信: 石取りゲームの数理，森北出版 (1968).
[5] 坂井公: 数学でピザを切り分ける！パズルの国のアリス 4，日経サイエンス社 (2021).
[6] 佐藤文広: 石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).
[7] Stankova Z. and Rike T. (eds.) : *A Decade of the Berkeley Math Circle Vol.1*, Mathematical Circles Library, 159 (2008).
[8] 末續鴻輝: 不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2019-GI-41, No.22, 1-7 (2019).
[9] 末續鴻輝: 詰め不偏ゲーム/組合せゲーム理論でゲームを解く，数学セミナー 2022 年 2 月号，26-31 (2022).
[10] 末續鴻輝，安福智明: 組合せゲームとその数学的構造，システム/制御/情報，Vol.65, No.10, 391-396 (2021).