1J-03

サイズ5安定結婚問題の安定マッチング数の上限についての考察

佐藤　陸†

国立 豊橋技術科学大学 情報・知能工学専攻†

1. はじめに

安定結婚問題(SMP)は同数存在する男女（男女の人数を「サイズ」と呼ぶ）がそれぞれ異性に対する好みの順序を持つとき、ブロッキングペアを持たないマッチングを求める問題を言う。ただし、ブロッキングペアとは、マッチングにおけるペア間で、ペアを組んでいる人物よりもるという男女のペアを指す [1]。

SMP はマッチングが必要となる様々な場面で利用できるのだが、代表的な例として研修医の病院への配属や、大学の学生の研究室配属などの社会的な配属の問題が挙げられる。

SMP は様々な分野から研究が行われているが、そのうち研究が行われてきた分野の一つに「安定マッチングの数」というものがある。これまで行われてきた研究により、サイズ4までにおけるSMPで、安定マッチングを最も多く持つインスタンスがどのようなものであるかが判明している。また、一般のサイズnに対する安定マッチング数の上限 f(n)についての上界についても研究が行われており、A.R.Karlin は f(n)が指数サイズで抑えられると証明した [2]。

本研究では、未だ研究が行われていない f(5)の具体的な数値および f(5)を持つインスタンスの構造について考察を行う。

2. 安定結婚問題

サイズn安定結婚問題(SMP)では、n人の男性集合Hとn人の女性集合Dが存在する。各人は異性を好きな順に並べた「選好順序」を持つ。

1人の男性hと1人の女性dの組み合わせ(h,d)をペアと呼ぶ。いずれかのペアにすべての男性および女性が属し、かつすべての人が1つより多くのペアに属さないとき、それらのペアの集合 M をマッチングと呼ぶ。

「On the upper bound of the number of stable matchings for the size-5 stable marriage problem」
†「Riku Sato」
‡「Toyohashi University of Technology」

マッチング M に含まれるペア(h,d)について、男性hに対する 女性d、女性dに対する男性hをそれぞれに対するパートナーと呼び、$d = p_M(h), h = p_M(d)$と書く。

① $(h', d') \notin M \; and \; h' \in H \; d' \in D$
② $d <_{h'} p_M(h')$
③ $h <_{d'} p_M(d')$

反対に、ブロッキングペアを含まないマッチングを「安定マッチング」と呼び、SMP は安定マッチングを求める問題である。

具体例として、サイズ4のSMPを示す。この例はf(4)=10個の安定マッチングを持つインスタンスである [3]。

1: a b c d	a: 4 3 2 1
2: b a d c	b: 3 4 1 2
3: c d a b	c: 2 1 4 3
4: d c b a	d: 1 2 3 4

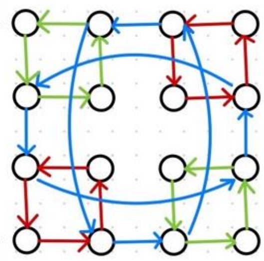

図 1 サイズ4のSMPとその安定結婚グラフ 安定マッチングを10個持つ

3. 安定結婚グラフ

SMP を表現するための手段として有向グラフを用いる方法がある。SMP を表現する安定結婚グラフは次のような点集合と枝集合のペアとして定義される [4]。

- 点集合：$H \times D$
- 枝集合：$A = A_H \cup A_D$
  - $A_H = \{(h,d),(h,d') \mid h \in H, d, d' \in D, d' <_h d\}$
  - $A_D = \{(h,d),(h',d) \mid h, h' \in H, d \in D, h' <_d h\}$

また、次のように点集合の部分集合を定義する。

- $pre_H(h,d) = \{(h,d') \mid d' \in D, d' <_h d\}$
- $pre_D(h,d) = \{(h',d) \mid h' \in H, h' <_d h\}$
- $suc_H(h,d) = \{(h,d') \mid d' \in D, d <_h d'\}$
- $suc_D(h,d) = \{(h',d) \mid h' \in H, h <_d h'\}$

さらに、ある点 (h,d) が $pre_H(h,d) = \varnothing$, $pre_D(h,d) = \varnothing$となる点をそれぞれ男性最良点、女性最良点と呼ぶ。また、$sub_H(h,d)$内に対して

h に関する選好順序が一番高い点を次良点と呼ぶ。

3.1. 安定マッチングの導出

安定結婚グラフを用いて安定マッチングを導出する際、「既約化」と「ローテーションに沿った交換」という操作を行う。

既約化とは、男性最良点または女性最良点に支配されている点と、その点に接続されている辺を除去することを言う。ここで、男性（女性）最良点(h,d)に支配されているとは、$suc_D(h,d)$に属することを呼ぶ。既約化が行われた安定結婚グラフを既約安定結婚グラフと呼び。既約安定結婚グラフの男性（女性）最良点の組は安定マッチングとなる。

また、既約安定結婚グラフの部分グラフとして、次の様なグラフを定義する。

- 点集合：男性最良点の集合M_1と次良点N_1の集合
- 枝集合：$\{((h,d'),(h,d)) \in A_H \mid (h,d) \in M_1, (h,d') \in N_1\} \cup \{((h',d'),(h,d')) \in A_D \mid (h',d') \in M_1\}$

以上の様に定義されたグラフをローテーショングラフと呼び、このグラフに存在する有向閉路をローテーションと呼ぶ。ローテーション上の最良点とその点に接続されている辺を除去することを「ローテーションに沿った交換」（以下、交換）と呼ぶ。

交換により点が除去された後の既約安定結婚グラフの最良点の組は安定マッチングとなるため、交換によって得られたローテーションの半順序集合からインスタンスから求められる全ての安定マッチングを求めることができる。

3.2. ローテーションによる安定マッチングの上限の考察

安定結婚グラフの枝集合の定義からわかるように、ローテーションは少なくとも 4 つの点からなる。すなわち、n=k である SMP において、同時に生ずるローテーションは多くとも$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$である。ここで、同時に生ずる複数のローテーションに対して交換を行う場合の数は、組み合わせの総和で書ける。

また安定結婚グラフの点は男女のペアを表しているため、n=k である SMP についてある人 h に関する点は k つしかない。言い換えると、h に関するローテーションは多くとも k-1 つしか現れない。以上より、交換から導ける安定マッチングの上限$f(n)$は

$$f(n) \leq (2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - 1)(n-1) + 1$$

となる。

4. サイズ 5 SMP の安定マッチングの上限

上式から、$f(5) \leq 13$となる。また次に示すのは、11 の安定マッチングを持つ n=5 の SMP である。したがって、$11 \leq f(5) \leq 13$を示せる。

3.2 の考察では、既約化により点が除去されないことを想定している。このインスタンスでは ペア(1,c),(3,a),(3,b),(4,c),(5,c)を表す点がそれぞれ除去される。このことから、安定マッチング数が 11 よりも多いサイズ 5 SMP のインスタンスが存在するならば、このインスタンスよりも既約化により除去される点の数が少なくなると考察できる。

1: c e d b a	a: 1 2 4 5 3
2: c d e a b	b: 2 1 5 4 3
3: a d e b c	c: 3 2 5 4 1
4: b a c e d	d: 4 5 1 2 3
5: a b c d e	e: 5 4 2 1 3

図 2 サイズ 5 の安定マッチングを 11 個持つ SMP インスタンス

5. おわりに

本研究では「ローテーションに沿った交換」の考え方から一般のサイズ n に対する SMP の安定マッチングの最大値の上界を導出し、その結果からサイズ 5 SMP における最大マッチング数について$f(5) \leq 13$を導いた。また具体的なサイズ 5 SMP インスタンスを提示することで$11 \leq f(5) \leq 13$を示した。

サイズ 5 SMP について安定マッチング数が 11 より多いインスタンスが存在するかどうか、またサイズ 6 以上の SMP について最大の安定マッチング数を持つインスタンスを示すことは今後の課題である。

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, ″College admissions and the stability of marriage,″ *American Mathematical Monthly,* vol. 69, pp. 9-15, 1962.

[2] A. R. Karlin, S. O. Gharan , R. Weber, “A simply exponential upper bound on the maximum number of stable matchings,” STOC 2018, 2017.

[3] D. E. Knuth, “Mariages Stables,” Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.

[4] M. Balinski and G. Ratier, ″On stable marriages and graphs, and strategy and polytopes,″ *In: SIAM,* vol. 39, no. 4, pp. 575-604, 1997.