6B-03

Magic Matrix の提案とその性質

杉山 雅英, 西舘 陽平 (会津大)

1. まえがき

$n \times n$ 行列 A とその逆行列 A^{-1} の成分が全て整数である時，A はユニモジュラ行列であると呼ばれる．本報告ではユニモジュラ行列 A の成分が整数の初項と公差 a, d $(d > 0)$ の等差数列で与えられる異なる n^2 個の整数である時，行列 A を n 次 (a, d) Magic Matrix (MM) であると定義し，Magic Matrix の性質及び SAT ソルバーを用いた構成方法を述べる．

2. Magic Matrix の性質

ユニモジュラ行列は行列式で特徴付けられることが知られている．

命題 1 ユニモジュラ行列 A の行列式 $\det A$ の値は ± 1 に等しい．またその逆も成り立つ [1]**．**

$\det A^{-1} = \det A$ である．行列の対角成分が ± 1 の上三角・下三角行列，反対角成分が ± 1 の反上三角・反下三角行列はユニモジュラ行列である．A がユニモジュラ行列であれば $-A$，転置行列 A^t，反転置行列 A^τ, 任意の行・列を交換した行列，成分を回転した行列，任意の行・列の符号の変換した行列，逆行列 A^{-1} もユニモジュラ行列である．A, B がユニモジュラ行列であれば積 AB もユニモジュラ行列であるので $n \times n$ ユニモジュラ行列の集合 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ は群であり，要素数は無限である．

命題 2 行列 A が n 次 (a, d) MM とする．

1. **転置，反転置行列 A^t, A^τ，任意の行・列の交換，回転で得られる行列は (a, d) MM である．**
2. **$-A$ は $(\tilde{a}, d)$ MM である．ここで $\tilde{a} = -a - (n^2 - 1)d$ とする．**

これより (a, d) MM から他の (a, d) MM 及び異なる初項の $(\tilde{a}, d)$ MM が構成できる．行列式の符号は変化するが任意の行・列を交換しても (a, d) MM であるので A の任意の ij 成分を任意の $i'j'$ 成分に移動した (a, d) MM が存在する．従って 1, 1 成分が数列の初項 a に一致しさらに $k_{1n} < k_{n1}$ 及び 1 行 1 列を除いて k_{nn} が最大要素となる変形で得られる MM を標準形と呼ぶ. 整数の初項と公差 a, d $(d > 0)$ の数列 $a, a+d, \cdots, a+(n^2-1)d$ を配置した A の ij 成分を $a_{ij} = a + k_{ij}d$ と書き表す. ここで $\{k_{ij}\} = \{0, 1, 2, \cdots, n^2 - 1\}, k_{11} = 0$ である．1 行目及び 1 列目の他の行・列からの減算で命題 3 を得る．

命題 3 n 次 (a, d) MM $A = (a + k_{ij}d)$ の行列式は初項 a の一次式 $\det A = c_1 a + c_2$ で表され $d = 1$ に限られる．ここで $c_1 = \det(t_{ij}), t_{ij} = k_{ij} - (k_{1j} + k_{i1}), c_2 = \det(k_{ij})$ である．(t_{ij}) は $(n-1) \times (n-1)$ 行列，行列 (k_{ij}) は行列 A で $a = 0, d = 1$ に該当する．

c_1, c_2 は d^{n-1} を因数に持つので命題 1 から $d = 1$ に限られる．以下では $(a, 1)$ MM と表記する．$\det A = c_1 a + c_2 = \pm 1$ の配置と初項 k_{ij}, a を構成すれば良い．

命題 4 n 次 $(a, 1)$ MM A の配置 k_{ij} は 3 つの型に分類できる．

1. **無限型: $c_1 = 0, c_2 = \pm 1$ の場合，初項 a は任意の整数であり無限個．**
2. **双子型: 初項 a は a^+, a^- の 2 個.**
   a^+, a^- は $\det A = \pm 1$ に対応
   - **$c_1 = \pm 1$ の場合，$a^+ - a^- = \pm 2$**
   - **$c_1 = \pm 2, c_2 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod.}\ 2)$ の場合，$a^+ - a^- = \pm 1$**
3. **単独型: $c_1 \neq 0, \pm 1, \pm 2$ で $c_2 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod.}\ c_1)$ の場合，初項 a は 1 個.**

配置の個数は有限であるが無限型が存在すれば MM は無限に存在する．一方双子型・単独型の個数は有限個である．

命題 5 n 次 $(a, 1)$ MM A の双子 MM の初項 (a^+, a^-) の集合は以下の対称性, 双対性が成り立つ.

1. **対称性: 直線 $y = x$ に対して対称**

$$(\hat{a}^+, \hat{a}^-) = (a^-, a^+)$$

2. **双対性:**

$$(\tilde{a}^+, \tilde{a}^-) = -(n^2-1) - \begin{cases} (a^+, a^-) & (n\text{: 偶数}) \\ (a^-, a^+) & (n\text{: 奇数}) \end{cases}$$

[θ] Magic Matrices and Their Properties,
†M. Sugiyama(Emeritus Professor, The Univ. of Aizu), Y. Nishidate (The Univ. of Aizu)

命題 6 2 次 $(a, 1)$ MM の標準形は A_1, A_2 のみで双子 MM である．さらにそれらの逆行列も $(a, 1)$ MM である．無限型・単独型は存在しない．

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. SAT ソルバーを用いた MM の探索

配置 k_{ij} で c_1, c_2 は決定され初項 a の 1 次式 (命題 3) で表される MM の行列式の値は ± 1 である (命題 1)．組み合わせ問題であるので SAT ソルバーを用いた解の探索問題に帰着できる．本報告では SAT ソルバーとして minisat，符号化器として sugar を用いる [2]．sugar では整数の加減算・乗算が使用できる．一方，整数 c_1, c_2, a の探索範囲の指定が必要である [3]．$|k_{ij}| \leq n^2 - 1$ であるので $|c_1|, |c_2|$ の上限を $|c_1| \leq (n-1)!(2(n^2-2))^{n-1}, |c_2| \leq (n-1)!(n^2-1)^n$，さらに $c_1 \neq 0$ の時，$|a|$ の上限を $|a| \leq \dfrac{|c_2|+1}{|c_1|}$ と評価できる．$n = 3$ の場合は $|c_1| \leq 392, |c_2| \leq 1024$ である．ただし SAT ソルバーを用いた $n = 3$ の c_1, c_2 の最大・最小値は $c_1 : [-81, 81], c_2 : [-332, 332]$ である． 標準形に限定することで探索を高速化できる．

ソルバーによる 3 次 MM の探索結果を述べる．無限型 MM $(c_1 = 0, c_2 = \pm 1)$ は式 (1), (2) に示すように標準形で 2 個だけ存在し互いにもう一方の異符号の標準形である．ここで初項 a は任意の整数である．

$$A_+ = \begin{pmatrix} a+0 & a+8 & a+5 \\ a+6 & a+1 & a+3 \\ a+7 & a+2 & a+4 \end{pmatrix}, (\det A = +1), \quad (1)$$

$$A_- = \begin{pmatrix} a+0 & a+8 & a+3 \\ a+6 & a+1 & a+4 \\ a+7 & a+2 & a+5 \end{pmatrix}, (\det A = -1). \quad (2)$$

双子型 MM $(c_1 = \pm 1, \pm 2)$ の初項 (a^+, a^-) の存在領域を図 1 に示す．(a^+, a^-) は $y = x \pm 1, y = x \pm 2$ の直線状に候補を持つ．存在する 182 ペアすべてを図 2 に示す．命題 5 で示したように最大のペア $(79, 77), (77, 79)$，最小のペア $(-87, -85), (-85, -87)$ のように双子型 MM の対称性と $(79, 77) \leftrightarrow (-87, -85)$ のように双対性 (点 $(-4, -4)$ に対する点対称) が成り立つ．図中の赤色線は $x = -4, y = -4$ である． 単独型 MM $(c_1 \neq 0, \pm 1, \pm 2)$ も多数存在し，初項 a の最大・最小は $19(c_1 = 3, c_2 = -56), -27(c_1 = 3, c_2 = 82)$ である．ただし c_1 の存在区間 $[-81, 81]$ の全ての値に対して MM が存在する訳ではない．例えば $c_1 = 25, 29, \cdots, 79 \sim 81$ を満たす MM は存在しない．

命題 7 3 次 MM は無限型，双子型，単独型が存在する．

4. むすび

本報告では Magic Matrix を定義しその性質を述べ $2 \times 2, 3 \times 3$ Magic Matrix の構成法を示し，SAT ソルバーを用いた解の探索を行った．今後は $n \geq 4$ の Magic Matrix について検討する．

謝辞 助言を頂いた神保秀司博士 (岡山大) に感謝いたします．

参考文献

[1] 斎藤正彦, 線形代数入門, 東京大学出版会. p.91

[2] 杉山, SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成とその応用, 情報処理学会, 3C-03 (2017-03).

[3] http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/sugar/

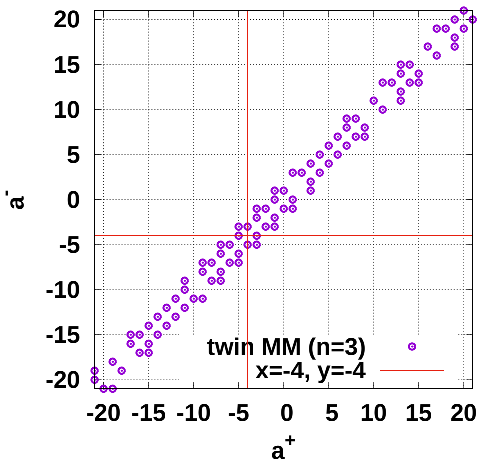

図 1: **双子型 Magic Matrix** $(n = 3)$ **の初項** (a^+, a^-) **の存在領域 (赤色線:** $x = -4, y = -4$)

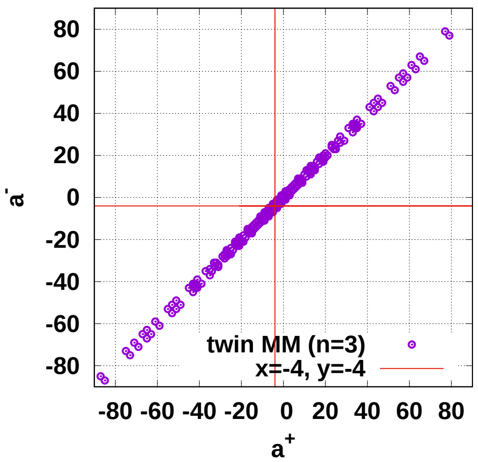

図 2: **双子型 Magic Matrix** $(n = 3)$ **の初項** (a^+, a^-) **の存在領域 (全域) (赤色線:** $x = -4, y = -4$)