情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2021-AL-185 No.12
2021/11/19

手札の強さ関係を一般化した二人単貧民の性質

大渡 勝己[,a)]　木谷 裕紀[1,b)]

概要：大富豪のルールを簡略化し二人完全情報ゲームとした二人単貧民について，いくつかの美しい性質が発見されている．大富豪や単貧民では通常，カードの強さが一直線上に並んでいるが，本研究ではこれを一般化し，一般の有向グラフによってカードの強さを定義した単貧民ゲームを考える．このとき，グラフがループを含まない場合には互いにパスをし続けるべきツークツワンク局面が存在しないなど，通常の二人単貧民の多くの性質が引き継がれることを示す．

キーワード：大富豪，大貧民，単貧民，組合せゲーム，ツークツワンク，グラフ理論

1. はじめに

大富豪は主に日本で遊ばれているトランプゲームである．各地で多種多様なローカルルールが加えられており，自由に遊べることが魅力的なゲームである．一方，このようにルールを入れ替えても楽しめるのは，「強い札を弱い札の上に出していく」というルールの根幹が堅牢であり，ルールの細かな差異を考慮せずとも直感的に良い手を選ぶことができる性質があることが理由の一つだろう．

著者らはこれまで，この大富豪の根幹のルールに対して数学的な見地からいくつかの洞察を与え，大富豪が内包する簡潔な構造を明らかにしてきた．特に，大富豪を一枚出しのみ，特殊ルールなしに簡略化したゲームは単貧民 [1] と呼ばれ，二人単貧民の必勝プレイヤ等は手札枚数に対して線形時間で判定できることを示してきた [2–5].

ただし，この結果は二人単貧民が簡単すぎるために起こったという反論もあろう．実際に大富豪では手札を複数枚同時に出すことができ，さらに革命[*1]やイレブンバック[*2]のようなルールによって手札の強さは一定ではない．

本稿ではこの「手札の強さ」について数学の立場から一般化した状況を考えてみる．具体的には，手札の強さの関係がいくらでも複雑になりうる単貧民，つまり，手札の強さを一般のグラフに拡張した単貧民を考え，**一般化単貧民**と名付ける．このゲームでは複数枚を同時に出すことはできないが，札の強さの関係は大富豪よりもさらに複雑である．このようなゲームルールの一般化は，組合せゲーム理論の研究においては数多く見られるものである．

本稿ではこの一般化単貧民のゲームの性質についての結果を紹介する．大富豪において「場が強いと不利」「手札が強いと有利」「互いにパスをし続けるべき局面は存在しない」というゲームの性質は自然に想起されうるものであるが，これらの性質は妥当な定義や条件のもと一般化二人単貧民においても成立することを示した．

2. 二人単貧民と一般化二人単貧民

まず先行研究で扱ってきた二人単貧民のルールを説明し，その後本研究で扱う一般化単貧民との差異を述べる．

2.1 二人単貧民

ゲームで用いられる札（カード）は，それぞれ「強さ」を表す数値が正の整数（$1, 2, 3, ...$）として割り当てられている．各プレイヤの手札は一枚以上であれば枚数制限はなく，同じ数値の札が何枚含まれていてもよい．手札を決定した後，以下のようにゲームを進める．

- 先手後手を決め，先手プレイヤ，後手プレイヤの順に交代で，手札から場に一枚ずつ札を出していく．
- 場は最初，空である．
- 手番のプレイヤは，手札の中から場の札の値よりも大

[1] 九州大学経済学研究院
Faculty of Economics, Kyushu University
[a)] katsuki.ohto@gmail.com
[b)] h-kiya@econ.kyushu-u.ac.jp

[*1] 一般に，同じ強さの四枚組を出すと，強さがゲーム終了まで反転するルール．
[*2] 一般に，11 の札を含む札組を出すと強さが場が流れるまで反転するルール．

きい値の札を一枚出すことができる．出した札が次の場の札になり，手番はもう一人のプレイヤに移る．

- 手番のプレイヤは，手札を出さずに手番をもう一人のプレイヤに譲ることができる（パスをする，という）．このとき場は空になる．
- 先に手札がなくなった（上がった）プレイヤを勝者とする．

ゲームを通して手番は交互に移るが，ある時点で手番が来ているプレイヤ を**手番プレイヤ**，もう一人のプレイヤを**非手番プレイヤ**と呼ぶ．

2.2 一般化二人単貧民

本研究が扱う一般化二人単貧民では，ゲームで用いられる札に対して，「ある札がある札の上に出せるか」の関係を有向グラフによって定義する．具体的には，**有向グラフ上のある頂点 a から別の頂点 b へ有向辺があれば，a の上に b を出すことができる**，とする[*3]．本稿では以降，この有向グラフを「札のグラフ」や単に「グラフ」と呼ぶ．

一般化二人単貧民の局面例として図 1 を挙げる．

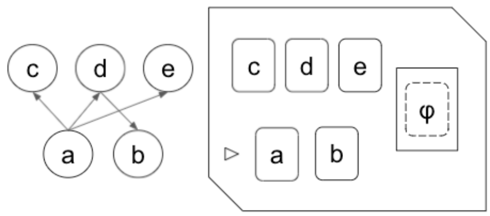

図 1 一般化二人単貧民の局面例.

図 1 の局面では場が空であり（本稿では表記上，すべての札が上に出すことが可能な ϕ の札が置かれている，として扱う），手番側は a と b のどちらの札を出すこともできる．しかし，a を出して相手に c または e を返されるとパスしかできず，相手に上がられてしまう．そこで，最初に b を出して相手はパス，その後 a を出す．こうすると手番側必勝である．

本稿では，札のグラフ G，手番プレイヤの手札 X，非手番プレイヤの手札 $\bar{X}$，場札 r，であるような局面は，局面 $(G, X, \bar{X}, r)$ として四つ組によって表記する．なお，議論を簡単にするため，グラフには両プレイヤの手札，場札と議論に登場するすべての札が含まれているものとして扱う．また，通常の単貧民と違い，グラフ中の一頂点に対応する札が複数枚登場することは考えない[*4]．

[*3] グラフの有向辺の向きは，先行研究にて単貧民を有向グラフと捉えた時と逆向きに定義した．これは，Geography（しりとり）ゲームとの関連性を意識してそうしている．

[*4] グラフに頂点を追加することで，同じ強さの札が複数枚存在するのと等価なグラフを得ることが可能であるためである．

3. 一般化二人単貧民の性質

本節では，一般化単貧民と通常の単貧民の共通点を検証する．

3.1 場札と手札の強さによる局面の優劣

本稿では，大富豪系の二人ゲームの局面の**価値**（互いに最善の戦略でゲームを進めた際の勝敗）を，手番側必勝なら 1, 非手番側必勝なら -1，互いにパスを続ける千日手引き分けであれば 0 として定義する[*5]．

まず，場札の強さと局面の価値について考える．大富豪系のゲームにおいて多くの場合には「場札が強ければ強いほど手番側が不利である」という性質があるが，これは通常の二人単貧民では以下の命題としての意味で常に成り立つことが知られている [2]．

命題 1. 二人単貧民において，場札 a, b に対して札の数値の大きさが $a \leq b$ であれば，a を場札とする局面の価値は手札が同じで b を場札とする局面の価値以上である．

この命題を一般化単貧民に適用する．以降，ある札 x の上に出せる相手の札の集合を，有向グラフにおける子ノードの集合を表す $Child(x)$ と表記する．逆に，ある札 x を出すことができる相手の札や場札の集合を，有向グラフにおける親ノードの集合を表す $Parent(x)$ と表記する．さらに，f を一般化二人単貧民の価値関数とし，局面 s が手番側必勝であれば $f(s) = 1$ と表記する．この価値関数 f を用いて，局面同士の手番側から見た優劣を比較する．

定理 1. 場札のみが異なる一般化二人単貧民の任意の局面の組

$$s = (G, X, \bar{X}, r),$$

$$s' = (G, X, \bar{X}, r')$$

において，

$$Child(r) \supseteq Child(r')$$

ならば，s' の価値は s の価値以上である．

証明. $Child(r) \supseteq Child(r')$ より，s における合法手はすべて s' における合法手である．そのため s における最善手を s' で出すことで，少なくとも s と同じ結果を得ることができる．ゆえに $f(s') \geq f(s)$ が成り立つ． □

このように，二人単貧民における命題を，一般化二人単貧民においても常に成り立つ性質として定義し直すことができた．

次に，手札についても，自分の札が強ければ強いほど，

[*5] 本稿では，ゲームのルールとしての千日手引き分けを特別に定義していない．ただし，互いにパスが続いて有限手数以内に終了しない場合は引き分けとして価値 0 で扱いたいので，空場から二人ともがパスをした時点で引き分けによる終了という前提の下で価値を計算する．

相手の札が弱ければ弱いほど有利である，という性質について考える．この性質は複数枚出しの可能な大富豪においては手札単位でなく同じ数字の札の集合単位で考える必要があり，さらに革命などの強さが逆転するルールによってしばしば不成立になる．しかし，一枚出しで特殊ルールのない単貧民においては手札単位で常に成り立つことが，グラフマッチングによる判定法 [3] からも明らかである．

命題 2. 二人単貧民の手番側の手札の一枚をより強い札に入れ替えると，この局面の価値は常に元の局面の価値以上である．逆に，非手番側の手札の一枚をより強い札に入れ替えると，この局面の手番側にとっての価値は常に元の局面の価値以下である．

この性質を一般化二人単貧民に適用し，さらに入れ替え枚数も一般化して以下のように定式化する．

定理 2. 両プレイヤの手札の一部のみが異なる一般化二人単貧民の任意の局面の組

$$s = (G, X + \{x_1, x_2, ..., x_k\}, \bar{X} + \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\}, r),$$

$$s' = (G, X + \{x'_1, x'_2, ..., x'_k\}, \bar{X} + \{\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, ..., \bar{x}'_l\}, r)$$

において，すべての i（$1 \leq i \leq k$）に対して

$$Parent(x_i) \subseteq Parent(x'_i) \text{ かつ } Child(x_i) \supseteq Child(x'_i)$$

かつすべての j（$1 \leq j \leq l$）に対して

$$Parent(\bar{x}_j) \supseteq Parent(\bar{x}'_j) \text{ かつ } Child(\bar{x}_j) \subseteq Child(\bar{x}'_j)$$

ならば，s' の価値は s の価値以上である．

証明は，手札の一枚だけが異なる場合についての以下の補題 1，補題 2 を示すことで行う．これらの補題から定理 2 は明らかである．

補題 1. 手番側の手札の一枚だけが異なり，それぞれ x, x' である一般化二人単貧民の局面 s, s' において，$Parent(x) \subseteq Parent(x')$ かつ $Child(x) \supseteq Child(x')$ であれば，$f(s) \leq f(s')$ である．

補題 2. 非手番側の手札の一枚だけが異なり，それぞれ $\bar{x}, \bar{x}'$ である一般化二人単貧民の局面 s, s' において，$Parent(\bar{x}) \subseteq Parent(\bar{x}')$ かつ $Child(\bar{x}) \supseteq Child(\bar{x}')$ であれば，$f(s) \geq f(s')$ である．

ここまでの議論から，**一般化単貧民における札の「強さ」は札のグラフの有効辺ではなく，子ノードと親ノードの集合の比較から議論される**ということがいえる．以降，$Child(x) \subseteq Child(y)$ を「x は y より上が強い」，$Parent(x) \supseteq Parent(y)$ を「x は y より下が強い」とも表記する．

証明. 帰納法によって証明する．

(i) 手札が一枚ずつのとき，手番側は最後の一枚の札が下に強ければ強いほど上がりやすい．一方で非手番側は，手番側が上がれずにパスした後には空場になるため，価値は手札の強さと無関係である．ゆえに，補題 1 と補題 2 は手札が一枚ずつのとき成立する．

(ii) 手札が合計で k（≥ 2）枚のとき，補題 1 と補題 2 の性質を，合計手札枚数 k 枚のときに限定した形でそれぞれ (a)(b) として仮定する．

手札が合計が $k+1$ 枚のとき，合計手札枚数が $k+1$ 枚である局面 s と，s の手番側の手札の一枚（x とする）を上下共にそれ以上に強い札（x' とする）に変更した任意の局面 s' について考える．同様に，合計手札枚数が $k+1$ 枚である局面 t と，t の非手番側の手札の一枚を上下共にそれ以上に強い札に変更した任意の局面 t' について考える．

(ii-A) s **で札を出す手が最善手であるとき**を考える．

(ii-A1) この最善手が x のとき，s' で x' を出すことができ，この x' を出すことを考える．残り一枚で x を出して上がりの場合，x' を出しても上がりである．上がりではない場合，x' を出した局面の方が場札が上に強く，両プレイヤの手札は同じであるため，定理 1 より $f(s') \geq f(s)$ である．

(ii-A2) この最善手が x 以外の札のとき，s' でも同じ札を出すことを考える．出した後の局面は場札が同じで，非手番側の手札一枚のみが異なるので帰納法の仮定 (b) より $f(s') \geq f(s)$ である．

(ii-B) t' **で札を出す手が最善手であるとき**，t でも同じ札を出すことを考える．出した後の局面は場札が同じで，手番側の手札一枚のみが異なるので帰納法の仮定 (a) より $f(t) \geq f(t')$ である．

(ii-C) s **が相手が空場でパスした局面で，パスのみが最善手であるとき**，s' でパスをすることで少なくとも千日手にはできるので，$f(s') \geq 0 = f(s)$ である．

(ii-D) t' **が相手が空場でパスした局面で，パスのみが最善手であるとき**，t でパスをすることで少なくとも千日手にはできるので，$f(t) \geq 0 = f(t')$ である．

(ii-E) s **が空場で，パスのみが最善手であるとき**，s でパスをした局面と s' でパスをした局面を比較する．この局面における最善手が札を出す手とパスのいずれであっても，(ii-B) と (ii-D) により $f(s') \geq f(s)$ である．

(ii-F) t' **が空場で，パスのみが最善手であるとき**，t' でパスをした局面と t でパスをした局面を比較する．(ii-A) と (ii-C) により $f(t) \geq f(t')$ である．

(ii-G) s **が空場ではなく，パスのみが最善手であるとき**，s でパスをした局面と s' でパスをした局面を比較する．(ii-B) と (ii-F) により，$f(s') \geq f(s)$ である．

(ii-H) t' **が空場で，パスのみが最善手であるとき**，t' でパスをした局面と t でパスをした局面を比較する．(ii-A) と (ii-E) により，$f(t) \geq f(t')$ である．

(ii-A)(ii-C)(ii-E)(ii-G) より，合計手札枚数が $k+1$ 枚である任意の局面 s と，s の手番側の手札の一枚を上下共にそれ以上に強い札に変更した任意の局面 s' について，$f(s') \geq f(s)$ である．同じように，(ii-B)(ii-D)(ii-F)(ii-H) より，合計手札枚数が $k+1$ 枚である任意の局面 t と，t の非手番側の手札の一枚を上下共にそれ以上に強い札に変更した任意の局面 t' について，$f(t) \geq f(t')$ である．

よって手札が合計 $k+1$ 枚の任意の局面においても補題 1 と補題 2 の性質を満たす．

(i)(ii) からなる帰納法により，任意の局面において補題 1 と補題 2 は成り立つ． □

3.2 ツークツワンク

次に, 空の場で互いにパスを続けるのが最善になる**ツークツワンク**の局面が存在するかどうか考える．ツークツワンクは様々なゲームにおいて興味深い性質として紹介されており [6–8]，例外的ではあるがゲームの勝敗を左右する重要な概念になりうる．

一方で，大富豪においては空の場でパスが可能であるかがルールによって異なる [9] など，空の場でのパスが重要視されてきたとは言えない．それでも著者は過去に実際の大富豪ゲームにおいて空場のパスが良い手となる局面が稀に起こることを報告した [9]．

ただし，この結果は三人以上のゲームであることや，特殊ルールの存在の影響が強く，逆に二人単貧民では明確に空場でのパスの有効性が否定されており [10]，どこまでの範囲でツークツワンクが起こらないのかは興味深いテーマである．

命題 3. 二人単貧民において，互いにパスを続けることが唯一の最善手となるツークツワンクは存在しない．

本稿で定義した一般化二人単貧民においては，**ツークツワンクとなる局面は存在する**．実例を図 2 に示す．

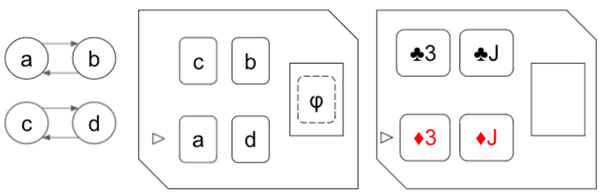

図 2 ツークツワンクとなる一般化二人単貧民の局面と，それと等価なイレブンバックあり大富豪の局面．

図 2 左側の局面において，札のグラフにループが存在する．これは以前の単貧民とは大きく異なる箇所であるが，大富豪においてはイレブンバックルールによって図 2 右側の等価な状況が発生する[*6]．

逆に，ループが存在しない場合には，ツークツワンクは起こり得るだろうか．実は，**札のグラフにループがない場合には，ツークツワンクにはならない**ことを示すことができる．

定理 3. 一般化二人単貧民において，札のグラフにループが存在しないならば，互いにパスを続けることが唯一の最善手となるツークツワンクは存在しない．

直感的には，ループがなければ「最弱」の札を片方のプレイヤが所持しており，その札を出さずに温存することで負けが勝ちに変わることがない，という理由である．

本稿では，この事実を次の方針で証明していく．

- 空の場でパスをしてはいけないルールの一般二人単貧民を考える．
- この単貧民で,「相手の札の上に出せない札」を空場局面の手札に加えたとき，加えた側が有利にならないことを帰納法で示す．
- 先に出した方が負けの局面が存在しないことを背理法で示す．

空の場でパスをしてはいけないルールにおける局面の価値を関数 g によって表現し，次の補題 3，4 を示す．

補題 3. 空の場でパスができない一般化二人単貧民の任意の局面 $s=(G,X,\bar{X},r)$ と，場札 r にも非手番側の札 $\bar{X}$ の上にも出すことができない任意の札 x について，

$$g((G,X,\bar{X},r)) \geq g((G,X+\{x\},\bar{X},r))$$

を満たす．

補題 4. 空の場でパスができない一般化二人単貧民の任意の局面 $s=(G,X,\bar{X},r)$ と，手番側の札 X の上に出すことができない任意の札 $\bar{x}$ について，

$$g((G,X,\bar{X},r)) \leq g((G,X,\bar{X}+\{\bar{x}\},r))$$

を満たす．

証明. 帰納法によって補題 3，4 の証明を一度に行う．

(i) お互い一枚ずつのときを考える．

(i-A) 手番側必敗となるのは場に出せないときである．このとき，空場ではなく，不要札はやはり出せないので不要札を加えても手番側必敗である．

(i-B) 非手番側必敗となるのは手番側が場に出せるときである．このとき，非手番側に札を加えてもやはり必敗である．

(i-A)(i-B) より，手札が一枚ずつのとき補題 3 と補題 4 の性質は成り立つ．

(ii) 両者の合計手札枚数が k（≥ 2）枚のとき，補題 3 と補題 4 の性質がどちらも成り立つと仮定し，(a)(b) とする．合計手札枚数 $k+1$ の任意の局面 $s=(G,X,\bar{X},r)$ について考える．

(ii-A) s の手番側に，非手番側の札の上に出せない札 x

[*6] あくまで図 2 の局面が等価であるだけで，一般にはイレブンバックルールと札のグラフのループに対応関係はない．

を加えた局面を $s' = (G, X + \{x\}, \bar{X}, r)$ とし，s と s' を比較する．

(ii-A1) s' で x が最善手であるとき，x を場に出せるならば s, s' は空の場である．相手がパスを返すと s と同じ局面になるので，$g(s) \geq g(s')$ である．

(ii-A2) s' で x 以外の札が最善手であるとき，s で x を出した局面と s' で x を出した局面を比較する．帰納法の仮定 (b) より，$g(s) \geq g(s')$ である．

s が空場であればパスを考慮しないため, (ii-A1) と (ii-A2) から，$r = 0 \to g(s) \geq g(s')$ である．

(ii-B) s の非手番側に，手番側の札の上に出せない札 $\bar{x}$ を加えた局面を $s'' = (G, X, \bar{X} + \{\bar{x}\}, r)$ とし，s と s'' を比較する．

(ii-B1) s で札を出す手のなかに最善の手 x があるとき，s で x を出した局面と s'' で同じく x を出した局面を比較する．帰納法の仮定 (a) より，$g(s'') \geq g(s)$ である．

(ii-B2) s でパスのみが最善手のとき，s でパスをした局面と s'' でパスをした局面を比較する．パスの後は空場局面なので (ii-A1) より $g(s'') \geq g(s)$ である．

以上より s での最善手が札を出す手であってもパスであっても，同じ手を s'' でも選ぶことで常に $f(s'') \geq f(s)$ である．

(ii-A3) s' における最善手がパスのみであるとき，s でパスをした局面と s'' でパスをした局面を比較する．パスの後は空場局面なので，(ii-B1) より $g(s) \geq g(s')$ である．

(ii-A1)(ii-A2)(ii-A3) より，合計手札枚数 $k+1$ 枚の任意の局面において補題 3 の性質を満たす．同様に，(ii-B1)(ii-B2) より，合計手札枚数 $k+1$ 枚の任意の局面において補題 4 の性質を満たす．

(i)(ii) からなる帰納法により，任意の局面において補題 3 と補題 4 は成り立つ． □

さらに，このような「相手の手札の上に出せない札」が存在する条件として補題 5 を示す．

補題 5. 札のグラフにループが存在しない一般化単貧民[*7]において，少なくとも一人のプレイヤが，誰の札の上にも出せない札を所持している．

証明. 札のグラフから，全プレイヤの手札を表すノード集合に対する部分グラフを構築する．この部分グラフはループを含まず，ループを含まないグラフには有向辺が出ていかない頂点が少なくとも一つ存在する．その頂点に対応する札は，他の誰の札の上にも出すことができない． □

最後に，補題 3，4 を用いて，定理 3 を証明する．

証明. 背理法による．最小のツークツワンク局面 $s = (G, X, \bar{X}, \phi)$ の存在を仮定する．

この局面は最小のツークツワンク局面であるため，いずれかのプレイヤが一枚でも札を出した以降に空の場でのパスを考慮する必要がない．そのため，この局面を空の場でパスができない一般化二人単貧民の局面と解釈すると，

$$g(s) = g((G, \bar{X}, X, \phi)) = -1$$

である．

ここで, 補題 5 より, X 内に相手の札の上に出せない札がある, としても一般性を失わない．X 内で相手の札の上に出せない札を x とし，s で x を出した局面 $(G, \bar{X}, X - \{x\}, x)$ について考える．

x は $(\bar{X}, X - \{x\}, x)$ の非手番側において，相手（手番側）の札の上に出せない札であるから，補題 4 より $g((\bar{X}, X - \{x\}, x)) \leq g((\bar{X}, X, x)$ である．

さらに定理 1 より $g((G, \bar{X}, X, x)) \leq g((G, \bar{X}, X, \phi))$ であるから，

$$\begin{aligned} g((G, \bar{X}, X - \{x\}, x)) &\leq g((G, \bar{X}, X, x)) \\ &\leq g((G, \bar{X}, X, \phi)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

ゆえに，s で手番側は x を出すことで勝利でき，$g(s) = 1$ となり，矛盾する．

以上より，最小のツークツワンク局面の存在が否定され，マスターグラフにループを持たない一般化二人単貧民にはツークツワンク局面が存在しないことが示された． □

ループを持たない一般化二人単貧民の中には，先行研究で扱った８切り[*8]ありの単貧民 [11] や複数系列単貧民 [9] [*9]も含まれる．

８切りありの二人単貧民は線形時間での勝者の判定アルゴリズムが知られており，ツークツワンクが発生しないことも明らかであったが，複数系列単貧民においても二人のゲームではツークツワンクが発生しないことを示したのは本研究が初である．

4. 関連研究

大富豪は AI の大会[*10]が行われるなど AI の研究も盛んである．ゲームの性質 [12] やヒューリスティクス [13] の研究であったり，モンテカルロ法 [14–18] などが適用されてきた．また多人数ゲームの一例としてのレーティング研究 [19] や，不完全情報ゲームにおける不完全情報の重要性の検証 [20] など研究は多岐にわたる．

*7 一般化二人単貧民に限定されない命題として紹介する．

*8 一般に，8 の札を含む札組を出すと場を流せるルール．

*9 単貧民が複数の系列に分かれ，空の場ではどの系列も出せるが場に札がある場合には同じ系列のより大きな数値の札しか出せないゲーム．複数枚出しが可能な特殊ルールのない大富豪において，手札の同じ数値の札の組を崩すことなく出すゲームの一般化としても捉えられる．

*10 http://www.tnlab.inf.uec.ac.jp/daihinmin/ （2021.10.15 閲覧）

著者らは以前の研究で，二人単貧民の亜種となるゲームにおいて，二人単貧民のように手札枚数に対して線形時間で勝敗を判定できるケースを示している [10,11,21,22]．これらのゲームの性質が手札の強さの一般化によってどのように変化するかは検証課題である．

一般化単貧民は札を出していくゲームであるが，パスを除いてはグラフ上の有向辺を辿っていくゲームであるので，Generalized Geography [23] ゲームの近縁であると考えられ，必勝プレイヤ判定の計算量は PSPACE 完全であることが予想される．しかし二人単貧民のように，多項式解決できる部分問題も多数あると考えられるので，今後は計算量の詳細な解析に繋げたい．

謝辞

この研究は，株式会社 quantum[*11] と電気通信大学西野順二研究室[*12] のサポートを受けて完成に至りました．この場を借りて深く御礼申し上げます．

参考文献

[1] 西野順二：単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察，ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集，pp. 66–73 (2007).
[2] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定問題，火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4 (2017).
[3] 木谷裕紀，小野廣隆：二人単貧民の必勝判定アルゴリズムとその拡張について，火の国情報シンポジウム 2018 論文集, A3-4 (2018).
[4] 大渡勝己，木谷裕紀：負け側の残り枚数を最大化する二人単貧民の解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 131–138 (2020).
[5] Kiya, H., Ohto, K. and Ono, H.: Computing the Winner of 2-Player TANHINMIN., *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E104.A, No. 9, pp. 1134–1141 (2021).
[6] 田中哲朗：ボードゲーム「シンペイ」の完全解析，情報処理学会論文誌， Vol. 48, No. 11, pp. 3470–3476 (2007).
[7] 田中哲朗：「どうぶつしょうぎ」の完全解析，情報処理学会研究報告, 2009-GI-22，No. 3, pp. 1–8 (2009).
[8] 木谷裕紀，小野廣隆：手札公開ババ抜きについて，ゲームプログラミングワークショップ 2018 論文集, pp. 199–203 (2018).
[9] 大渡勝己，田中哲朗：大貧民の空場におけるパスの有効性の検証，情報処理学会研究報告, 2017-GI-37，No. 11, pp. 1–8 (2017).
[10] 大渡勝己，木谷裕紀：二人単貧民の消費枚数に関する勝利条件の一般化とその解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 30–37 (2020).
[11] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆：８切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題, 情報処理学会研究報告, 2018-GI-40, No. 3, pp. 1–5 (2018).
[12] 佐藤裕紀，伊藤毅志：大貧民におけるプレースタイルの相性に関する研究，情報処理学会研究報告, 2008-GI-020, No. 59, pp. 37–43 (2008).
[13] 田頭幸三, 但馬康宏：コンピュータ大貧民におけるヒューリスティック戦略の実装と効果，情報処理学会論文誌, Vol. 57, No. 11, pp. 2403–2413 (2016).
[14] 小沼　啓，本多武尊，保木邦仁，西野哲朗：コンピュータ大貧民に対する差分学習法の応用，情報処理学会研究報告, 2012-GI-27，No. 1, pp. 1–4 (2012).
[15] 地曳隆将，松崎公紀：大貧民において不完全情報性がモンテカルロ法によるプレイヤに与える影響の調査，情報処理学会研究報告, 2012-GI-28，No. 6, pp. 1–8 (2012).
[16] 大渡勝己，田中哲朗：方策勾配を用いた教師有り学習によるコンピュータ大貧民の方策関数の学習とモンテカルロシミュレーションへの利用，情報処理学会研究報告, 2016-GI-35，No. 10, pp. 1–8 (2016).
[17] 土橋康希，大久保誠也，若月光夫，西野哲朗：大貧民におけるモンテカルロ法の報酬値に関する研究，情報処理学会研究報告, 2019-GI-41，No. 18, pp. 1–8 (2019).
[18] 坪倉弘治，西野順二：不完全情報ゲームにおける MCTS へのグループ化の適用，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 1–5 (2020).
[19] 藤村光希，大久保誠也，若月光夫，西野哲朗：コンピュータ大貧民におけるレーティング手法の最適化に関する研究，情報処理学会研究報告, 2021-GI-45，No. 8, pp. 1–8 (2021).
[20] 西野順二，西野哲朗：コンピュータ大貧民における最良手の推定について，情報処理学会研究報告, 2012-MPS-90, No. 4, pp. 1–6 (2012).
[21] 木谷裕紀，大渡勝己，小野廣隆：不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル，ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集，pp. 258–265 (2019).
[22] 大渡勝己，木谷裕紀：上がり札に相手が返せるかを考慮した二人単貧民の部分的解析，情報処理学会研究報告, 2021-GI-46，No. 15, pp. 1–7 (2021).
[23] David, L. and Michael, S.: Go is polynomial-space hard, *Journal of the ACM*, Vol. 27, No. 2, pp. 393–401 (1980).

[*11] https://quantum.ne.jp/ （2021.10.15 閲覧）
[*12] https://sites.google.com/view/konohenfuzzy（2021.10.15 閲覧）