

物理ベースオートエンコーダを用いた 分光画像からの塗布顔料の厚みと混合比率推定

部 竜太¹ 藤村 友貴¹ 船富 卓哉¹ 向川 康博¹ 森本 哲郎² 大石 岳史² 高松 淳³ 池内 克史³

概要: 本研究では、物理モデルベースのオートエンコーダを用いて分光画像から顔料の厚みと混合比率を推定する教師なしアルゴリズムを提案する。オートエンコーダのデコーダ部に物理モデルを用いることにより、中間層の潜在変数を顔料の厚みと混合比率として解釈可能にした。シミュレーション実験より、顔料の厚みと混合比率推定の定量評価を行なった。また、装飾古墳壁画に使われていたものと同種の顔料で作成したサンプルを用いて実験を行い、定性評価を行った。

1. はじめに

彫刻や彩色が施されている装飾古墳壁画や水彩画などの芸術作品は、その時代背景を反映させた歴史的価値の高いものである。しかし、これらの歴史的遺産は時間の流れとともに、図 1 のように劣化や損傷が起こる。たとえ美術館や博物館などで保存展示されていたとしても、将来的には劣化や損傷の可能性がある。そのため、作成された当時の状態の復元や現在の状態の記録が必要である。装飾古墳壁画や水彩画などの層状表面物体は、顔料が塗布されている顔料層と下地の 2 層の構造を持っているため、どのような顔料が使われていて、どのような厚みで塗布されているかを非破壊・非接触で記録する必要がある。

層状表面物体の色を、現在入手可能な原色顔料で再現する様々な手法が提案されている。多くの手法では、原色顔料をどのような比率で混合することで、再現できるかという混合比率を推定する。Abed [1] は、Kubelka-Munk 理論 (以後、KM 理論と略す) に基づく物理モデルを用いて、非負最小二乗法で顔料の混合比率の推定を行った。しかし、混合比率のみを推定する手法は下地からの反射光を考慮していない油絵を対象としているため、下地が露出している古墳壁画や水彩画には不向きである。また、森本ら [10] は、顔料層での光の吸収現象と下地の反射を Lambert-Beer の法則でモデル化し、RGB 空間で曲線フィッティングすることにより、下地と顔料層に分離した。しかし、Lambert-Beer の法則は光の減衰のみを考慮した単純なモデル化であり、顔料層での光の散乱と減衰の両方をモデル化した KM 理論



図 1 層状表面物体の劣化の例

を用いた方がより詳細な分析が可能である。

近年、コンピュータビジョンや自然言語処理分野の様々なタスクにおいて、ニューラルネットワークを用いることにより精度を向上させている。福本ら [4] は、顔料の混合比率を変えた様々なサンプルを合成により作成し、ニューラルネットワークを学習し、顔料の混合比率を推定した。Shi ら [8] は、3D プリンタで油絵のスペクトルを再現するために、顔料の 3D レイアウトをニューラルネットワークで推定した。しかし、ニューラルネットワークの学習には、大量の正解データが必要となる。多くの研究では、この問題を解決するために、ニューラルネットワークと微分可能な物理モデルを組み合わせている。これらの研究は、コンピュータグラフィックスの分野で多くされている [5]。例えば、画像集合から 3 次元シーンをニューラルネットワークで復元する際に、正解データとして 3 次元シーンが必要である。しかし、物理モデルにより、ニューラルネットワークで復元した 3 次元シーンから画像にレンダリングすることにより、正解データを不要にできる。

本研究では、層状表面物体の顔料層の厚みと混合比率を推定することを目的とし、物理モデルベースのオートエンコーダを用いて分光画像から顔料の厚みと混合比率を推定する教師なしアルゴリズムを提案する。

¹ 奈良先端科学技術大学院大学
² 東京大学
³ Microsoft

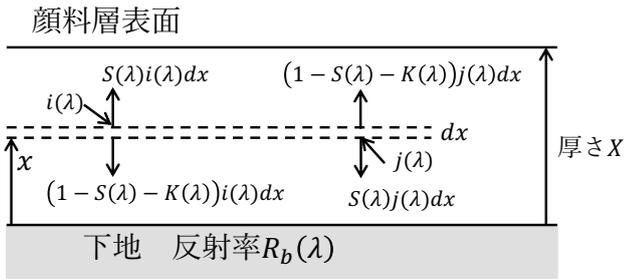


図 2 Kubelka-Munk 理論での光束の挙動

2. 層状表面物体の光の観測モデル

装飾古墳壁画や水彩画などは、顔料で形成される顔料層と下地の 2 層から成るため、層状表面物体と呼ばれる。層状表面物体では、顔料層内部での光の散乱と吸収の両方をモデル化した物理モデルである KM 理論が幅広く用いられている [7].

2.1 Kubelka-Munk 理論

KM 理論に基づく反射光の物理モデルでは、議論を簡単にするために以下の 3 つの条件を仮定する。

- 顔料層内部での光束はすべて拡散光束である。
- 顔料層での散乱因子である顔料の粒子は均一かつランダムに存在する。
- 顔料層に平行に進む光束は無視できる

これら 3 つの仮定の下、図 2 のように、顔料層表面から下地へ向かう拡散光束 $i(\lambda)$ と下地から顔料層表面に向かう拡散光束 $j(\lambda)$ とする。このとき、顔料層の厚みを X とし、微小単位の厚み dx とし、下地から微小厚みまでの距離を x とする。微小単位の厚みの顔料層を通過する下地向きの拡散光束の変化量と顔料層表面向きの拡散光束の変化量は式 (1) 及び (2) で表される。

$$di(\lambda) = (S(\lambda) + K(\lambda))i(\lambda)dx - S(\lambda)j(\lambda)dx \quad (1)$$

$$dj(\lambda) = -(S(\lambda) + K(\lambda))j(\lambda)dx + S(\lambda)i(\lambda)dx \quad (2)$$

ここで、 $S(\lambda)$ と $K(\lambda)$ は、顔料層を形成する顔料固有の散乱係数及び吸収係数である。散乱係数は、顔料層の微小厚みでの反射率の増加割合を表し、吸収係数は顔料層の微小厚みでの透過率の減少割合を表している。また、 λ は波長であり、KM 理論の物理モデルではすべて波長ごとに計算が行われる。以下では、式が煩雑になる場合には指数 λ を省略する。

上記の微分方程式である式 (1)、式 (2) を解くことにより [11]、厚み X の顔料の反射率 $R_{KM}(X; R_\infty)$ は、下地の反射率 R_b と顔料層のみ（下地の影響を受けない時）の反射率 R_∞ を用いて、

$$R_{KM}(X; R_\infty) = \frac{\frac{1}{R_\infty}(R_b - R_\infty) - R_\infty(R_b - \frac{1}{R_\infty})e^{SX(\frac{1}{R_\infty} - R_\infty)}}{(R_b - R_\infty) - (R_b - \frac{1}{R_\infty})e^{SX(\frac{1}{R_\infty} - R_\infty)}} \quad (3)$$

と表される。式 (3) に $X = 0$ を代入すると、下地の反射率 R_b になることがわかる。そして、顔料層のみの反射率 R_∞ は、散乱係数 S と吸収係数 K を用いて、

$$R_\infty(S, K) = 1 + \frac{K}{S} - \sqrt{\left(\frac{K}{S}\right)^2 + 2\frac{K}{S}} \quad (4)$$

と表される。散乱係数と吸収係数は、実際の顔料から直接計測することが困難であり、計算によって導出するのが一般的である。測定した反射率から導出する方法 [11], [12] やユーザの入力から導出する方法 [2] が提案されている。式 (4) より、顔料固有の散乱係数と吸収係数が既知の場合、顔料層のみの反射率を計算できることがわかる。また、これらの計算を波長ごとに行うことにより、反射スペクトルを算出できる。

2.2 顔料の混色理論

Duncan [3] は、 n 種類の原色顔料を混合して混合顔料を作成する場合、各原色顔料の散乱係数と吸収係数には、加法性が成り立つことを示した。つまり、各原色顔料の散乱係数と吸収係数を S^1, S^2, \dots, S^n と K^1, K^2, \dots, K^n とし、各原色顔料の混合比率をそれぞれ C^1, C^2, \dots, C^n 、混合して作られる混合顔料の散乱係数と吸収係数をそれぞれ S^{mix}, K^{mix} とすると次の関係が成り立つ。

$$\frac{K^{mix}}{S^{mix}} = \frac{C^1 K^1 + C^2 K^2 + \dots + C^n K^n}{C^1 S^1 + C^2 S^2 + \dots + C^n S^n} \quad (5)$$

where $\sum_{i=1}^n C^i = 1$

これにより、原色顔料にはない様々な色を再現することができる。

3. 物理ベースオートエンコーダによる解析

本章では、層状表面物体のハイパースペクトル画像を入力として、厚みと混合比率を教師なしで推定する物理ベースオートエンコーダについて説明する。

3.1 問題設定

層状表面物体のハイパースペクトル画像の各ピクセルでは、顔料層の反射スペクトルと下地の反射スペクトルが混ざって観測される。各ピクセルのバンド数 d の反射スペクトルは、KM 理論に基づく反射光の物理モデルを仮定すれば、層状表面物体の下地の反射スペクトル R_b と顔料層の n 個の顔料の散乱係数 S^i と吸収係数 K^i と混合比率 $C^i (i = 1, \dots, n)$ と厚み X で決まる。 R_b, S^i, K^i は以下のように定義する：

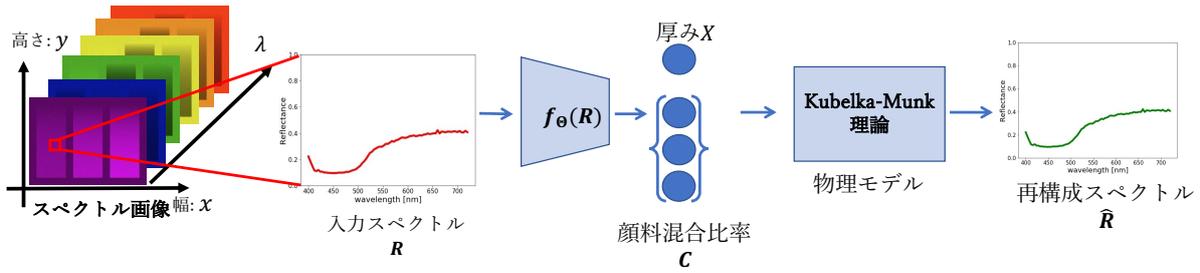


図 3 物理ベースオートエンコーダの全体像

$$\mathbf{R}_b = (R_b(\lambda_1), R_b(\lambda_2), \dots, R_b(\lambda_d))^T \quad (6)$$

$$\mathbf{S}^i = (S^i(\lambda_1), S^i(\lambda_2), \dots, S^i(\lambda_d))^T \quad (7)$$

$$\mathbf{K}^i = (K^i(\lambda_1), K^i(\lambda_2), \dots, K^i(\lambda_d))^T \quad (8)$$

本研究では、 \mathbf{R}_b , \mathbf{S}^i , \mathbf{K}^i を既知とし、反射スペクトルから各ピクセルごとに厚みと混合比率を推定する問題を考える。装飾壁画古墳や水彩画などでは、顔料の成分分析が行われており、どのような顔料が使われているかが明らかとなっている。一般的に考えられる手法は、反射スペクトルとそれに対応する厚みと混合比率をアノテーションし、それをデータセットとして教師ありのフレームワークで学習することである。しかし、厚みと混合比率を様々に変えて、多くのサンプルを実際に作ることは難しい。また、学習に必要なサンプル数を見積もることも難しい。また、シミュレーションで学習データを作る方法もあるが、シミュレーションデータと実測データでは乖離があり、実測データでの推定誤差が大きくなることを見込まれる。そこで本研究では、教師なしのフレームワークで厚みと混合比率を学習・推定する手法を提案する。

3.2 物理ベースオートエンコーダ

提案手法である物理ベースオートエンコーダの全体像を図 3 に示す。まず、任意のピクセルのスペクトルを入力して、そのピクセルの厚みと混合比率にエンコードする。その後、エンコーダによって得られた厚みと混合比率をデコーダである KM 理論に基づく物理モデルに入力し、スペクトルを再構成する。最後に、入力スペクトルと出力スペクトルの誤差を計算して、エンコーダを最適化する。

推定対象である層状表面物体のスペクトル画像のそれぞれのピクセルのスペクトル $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^d$ をエンコーダ $f_{\Theta}(\mathbf{R})$ により、厚み $\hat{X} \in \mathbb{R}$ と混合比率 $\hat{C} \in \mathbb{R}^n$ を出力する：

$$(\hat{X}, \hat{C}) = f_{\Theta}(\mathbf{R}) \quad (9)$$

エンコーダ f_{Θ} は、多層パーセプトロンとして構築する。 Θ がエンコーダの学習する重み集合である。厚みの出力を正の値として出力するために、出力の活性化関数として ReLU 関数を用いる。また、顔料混合比率は総和が 1 となるように正規化する必要があるため、出力の活性化関数として softmax 関数を用いる。

次に、KM 理論に基づく物理モデルベースのデコーダについて説明する。エンコーダの出力である厚み X と混合比率 C を用いて、再構成スペクトル $\hat{\mathbf{R}}$ を得る。まず、式 (5) より、混合比率と既知の顔料の散乱係数と吸収係数から、顔料を混合した時の散乱係数 \mathbf{S}^{mix} と吸収係数 \mathbf{K}^{mix} を以下のように計算する：

$$\mathbf{S}^{mix}(\hat{C}) = \sum_{i=1}^n \hat{C}^i \mathbf{S}^i \quad (10)$$

$$\mathbf{K}^{mix}(\hat{C}) = \sum_{i=1}^n \hat{C}^i \mathbf{K}^i \quad (11)$$

そして、式 (4) より、混合顔料で構成される顔料層のみの反射スペクトル $\mathbf{R}_{\infty}^{mix}$ を計算する：

$$\mathbf{R}_{\infty}^{mix}(\hat{C}) = R_{\infty}(\mathbf{S}^{mix}(\hat{C}), \mathbf{K}^{mix}(\hat{C})) \quad (12)$$

最後に、計算した顔料層のみの反射スペクトル $\mathbf{R}_{\infty}^{mix}$ 、厚み \hat{X} 、下地の反射スペクトル \mathbf{R}_b 、混合した散乱係数 \mathbf{S}^{mix} を用いて、顔料層の反射スペクトルと下地の反射スペクトルが混ざった再構成スペクトル $\hat{\mathbf{R}}$ を計算する：

$$\hat{\mathbf{R}}(\hat{X}, \hat{C}) = R_{KM}(\hat{X}; \mathbf{R}_{\infty}^{mix}(\hat{C}))$$

エンコーダの重みの最適化について説明する。誤差関数を次のように定義する：

$$L = \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{R}} \left\| \hat{\mathbf{R}}(f_{\Theta}(\mathbf{R})) - \mathbf{R} \right\|_2^2 + \lambda_{reg} \sum_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_2^2 \quad (13)$$

\mathcal{R} は、それぞれのバッチ中の入力スペクトル集合である。誤差関数の第 1 項は、入力スペクトルと物理ベースオートエンコーダによる再構成スペクトルとの再構成誤差である。第 2 項は、エンコーダの重みの正則化項である。この誤差関数を用いて、エンコーダの重みを勾配法のアルゴリズムで学習を行う。勾配法では、重みに対する勾配が必要となる。KM 理論に基づく物理モデルベースのデコーダは、すべて微分可能な計算であるため、誤差逆伝播法により、重みの勾配を計算することができる。これにより、エンコーダは、顔料層の厚みと混合比率を入力スペクトルと再構成スペクトルとの差分で学習する。

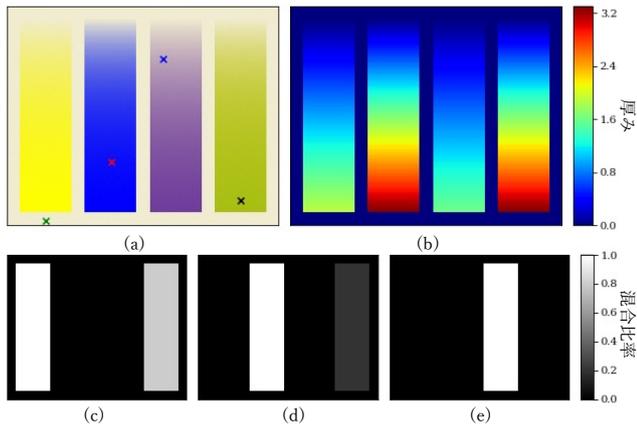


図 4 シミュレーションデータ. (a) は、スペクトル画像から再現した RGB 画像である. (b) は、厚みマップの真値である. (c)-(e) は、それぞれ黄色、青色、紫色の混合比率の真値である.

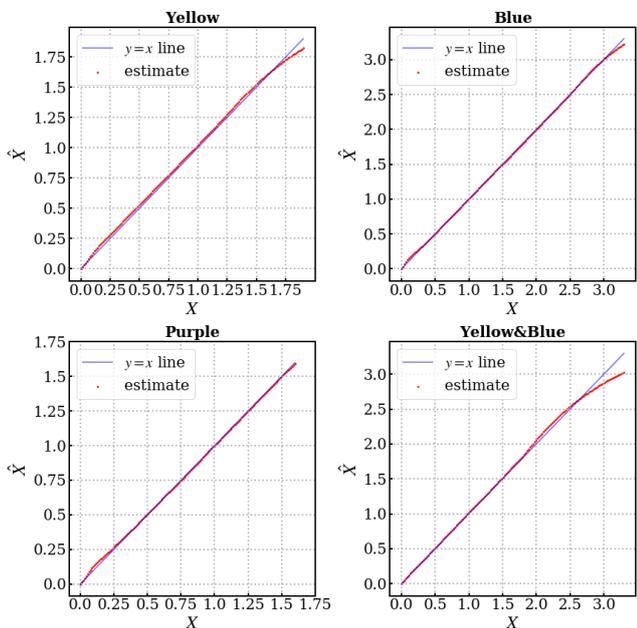


図 5 シミュレーションデータでの厚み推定結果の比較

4. 実験

提案手法の有効性を確認するために、シミュレーションデータと実測データを用いて、評価を行った。シミュレーションデータでは、厚みと混合比率の真値と提案手法の推定値から定量評価を行った。また、実測データでは、厚みと混合比率の真値が不明であるため定性評価を行った。最後に、シミュレーションデータを用いた教師あり学習と教師なし学習である提案手法の比較を行った。

4.1 実装方法

まず、[11] に従い、各顔料の散乱係数と吸収係数を算出した。スペクトル画像のピクセルの波長は、シミュレーションデータでは 400 nm から 720 nm の間の 81 バンド、実測データでは 440 nm から 810 nm の間の 70 バンドを使

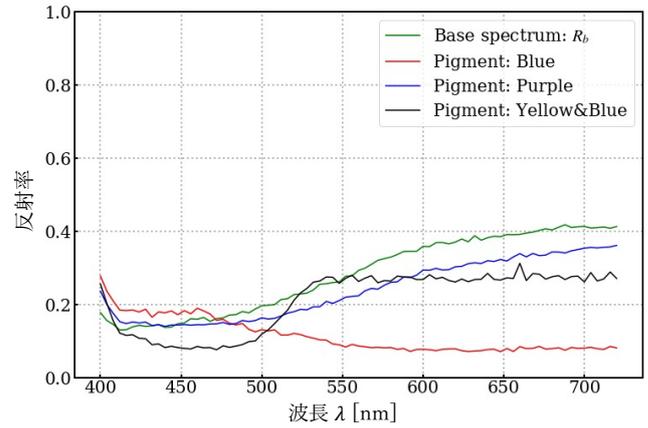


図 6 スペクトルのサンプル. それぞれ、図 4(a) のマーカーの色と位置に対応している.

用した. 多層パーセプトロン f_{Θ} には、7 層の全結合層 (中間層の活性化関数は ReLU, 各層のユニット数は 300) を用いた. 最適化アルゴリズムとして、Adam [6] を使用した.

4.2 シミュレーションデータ

黄・青・紫の顔料から算出した散乱係数と吸収係数を用いて、KM 理論からスペクトル画像を作成した. そのスペクトル画像を用いて、厚みと混合比率の定量評価を行い、提案手法の有効性を確認した.

作成方法 まず、それぞれのピクセル位置 (x, y) に厚み $X(x, y)$ と混合比率 $C(x, y)$ を設定した. これらの値が、厚みと混合比率の真値となる. その後、それぞれのピクセルに設定した値と既知である散乱係数と吸収係数と下地のスペクトルから KM 理論を用いてスペクトルを作成した. それぞれのスペクトルの各バンドには、平均 0 で標準偏差 0.003 のガウシアンノイズを加えた. 図 4 にシミュレーションデータを示す. また、スペクトル画像から数点をサンプリングしたスペクトルを図 6 に示す. シミュレーションデータには、4 本の縦線がある. この 4 本の縦線が、顔料が塗布されている領域であり、他の部分は厚み 0 の下地のみの領域である. 左の縦線の 3 本は、順に黄色、青色、紫色の混合比率をそれぞれ 1 として作成した. 一番右側の縦線は、黄色と青色の混合割合を 0.8 と 0.2 で混合した (図 4(c)-(e)). また、厚みはそれぞれの縦線を上から下に向かって、厚みが大きくなるように作成した. (図 4(b)). それぞれの縦線ごとに厚みの最大値が異なるのは、それぞれの顔料ごとに散乱と吸収の割合が違い、下地が完全に隠蔽される厚みが異なるためである.

評価 作成したシミュレーションデータに対して、誤差関数が一定値に収束するまで、オートエンコーダを学習した. その後、学習したエンコーダが、中間層の出力として厚みと混合比率を正しく推定できているかを評価した

厚みの真値 $X(x, y)$ と厚みの推定値 $\hat{X}(x, y)$ の平均二乗誤差は、0.0017 であった. また、それぞれの原色顔料ごと

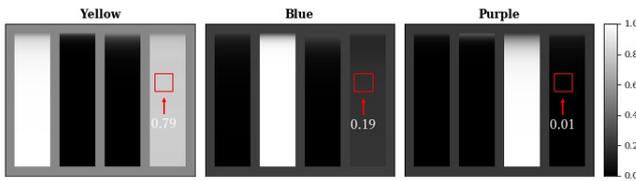


図 7 シミュレーションデータでの混合比率の推定結果

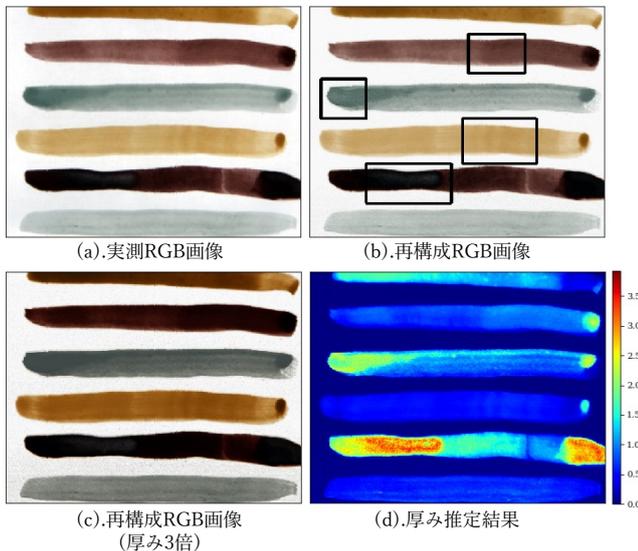


図 8 RGB 再構成と厚み推定結果

の厚みの比較を図 5 に示す。横軸を真値とし、縦軸を推定値とした。この結果より、真値と推定値がほぼ一致しており、提案手法により厚みが正しく推定できていることがわかる。また、黄色と青色を混ぜた混合顔料でも、正しく推定ができています。図 7 に、顔料の混合比率の推定結果を示す。それぞれの塗布されている顔料の部分が正しく推定できていることがわかる。ただ、厚みが薄いそれぞれの縦線の上部の部分は、混合比率の推定精度が低下している。これは、厚みが薄い領域では、下地のスペクトルが支配的になり、スペクトルの変化が少ないことが起因している。また、下地だけの部分も顔料の混合比率を推定しているが、厚みが 0 と正しく推定されているため、どの値に推定されても問題ない。また、黄色と青色を混合した領域でも概ね正しく推定できていることがわかる。

4.3 実測データ

装飾古墳壁画に使われていたものと同種の原色顔料で模擬サンプルを作り、実際にスペクトル画像を撮影し、提案手法の定性評価を行った。装飾古墳壁画に使われていたものと同種の原色顔料であるベンガラ (赤色)、稲荷黄土 (黄色)、合鼠 (碧灰末、水色) の 3 つの顔料を上質紙に塗布したサンプルを作成した。このサンプルでは顔料の混合を行わず、それぞれの原色顔料をそのまま塗布した。塗布する際に、顔料を紙に定着させるために、結合剤として膠液を用いた。このサンプルを Surface Optics 社製のハイパス

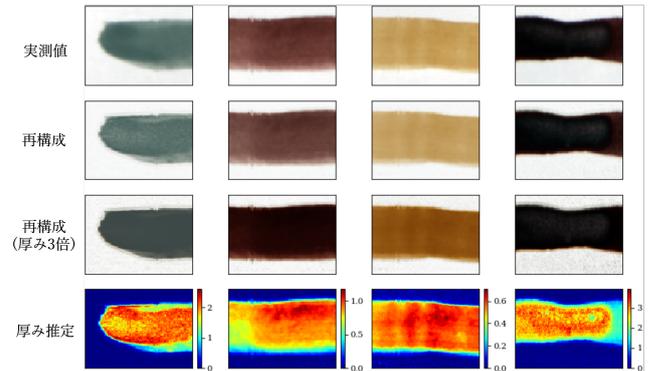


図 9 RGB 再構成と厚み推定結果の一部切り取り 参照:図 8(b)

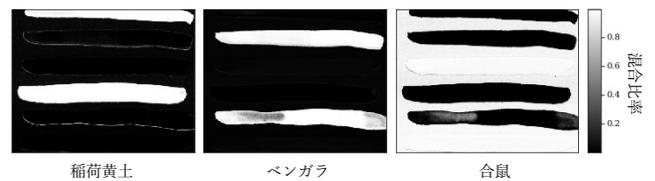


図 10 混合比率推定結果

ペクトルカメラ (SOC710-VP) を用いて撮影した。白熱電球下で撮影を行い、標準白色板を用いて、スペクトルを正規化した。スペクトルから RGB 画像をレンダリングしたサンプルを図 8(a) に示す。

評価 撮影したスペクトル画像に対して、提案手法で厚みと混合比率推定を行った。厚み推定と混合比率推定の結果を、それぞれ図 8(d)、図 10 に示す。実測の RGB 画像と厚み推定結果を比較すると、塗布されている領域と厚みが 0 以上の領域が一致している。そのため、厚みが推定できていることが確認できる。同様に、顔料が塗布されていない白色の下地だけの領域には、厚みが 0 と推定されていることが確認できる。また、混合比率の推定では、それぞれの顔料の領域を判別できている。しかし、ベンガラが厚く塗られている領域が合鼠との混合として誤推定している。これは、厚く塗られている領域では、膠液が層を形成してしまい、スペクトルに変化が生じてしまったためだと考えられる。

次に、推定した厚みと混合比率から KM 理論を用いて再構成したスペクトルから作成した RGB 画像を図 8(b) と図 9 に示す。再構成した RGB 画像は、実測の RGB 画像と類似しており、厚みと混合比率の情報から実測の RGB 画像が再現できることがわかる。また、厚みを変化させることにより、様々な RGB 画像を作り出すことができる。これは、自然劣化により厚みが薄くなってしまった層状表面物体を、劣化前の状態に再現できることを示唆している。

4.4 シミュレーションデータを用いた教師あり学習との比較

本節では、物理モデルに従って生成したデータを用いた教師あり学習と提案手法の比較を行う。厚みと混合比率

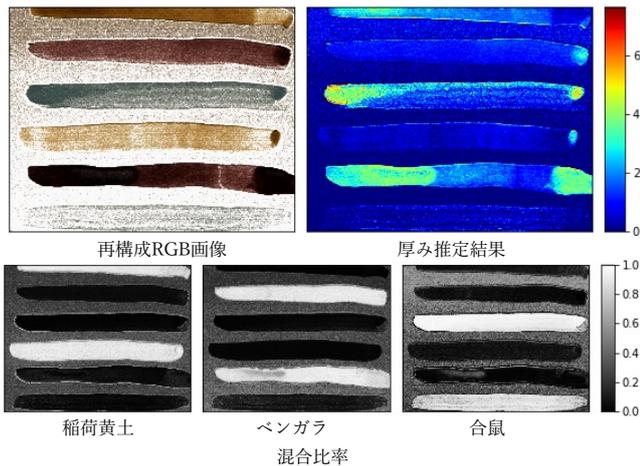


図 11 教師あり学習での推定結果

を設定することにより、KM 理論に基づく物理モデルを用いて、反射スペクトルをシミュレーションできる。そのため、このシミュレーションした反射スペクトルを入力データ、設定した厚みと混合比率を正解データとして、教師ありでエンコーダ f_{Θ} のみを学習することができる。シミュレーションデータは、ベンガラ、稲荷黄土、合鼠の原色顔料から算出された散乱係数と吸収係数、および下地の反射スペクトルの実測値を用いて、それぞれの混合比率は $[0, 1]$ の範囲を 0.01 刻みで、厚みは $[0, 5]$ の範囲を 0.1 刻みで変えて作成した。従って、作られたデータ数は 262,701 である。このデータを使って、教師ありでエンコーダを学習させた。厚みと混合比率の誤差関数には、それぞれ二乗誤差と交差エントロピー誤差を用いた。その後、実測データに対して、厚みと混合比率推定を行った結果と RGB 画像を再構成した結果が図 11 である。再構成した RGB 画像と実測 RGB 画像を比べると、全体的に良い結果が得られていないことがわかる。特に、画像上部の下地のみの領域において、スペクトルを再構成できていないことがわかる。また、画像下部の合鼠が塗布されている領域も、同様に再構成できていない。推定精度が低い原因として、学習データ数の少なさや誤差関数が適応していないことが挙げられる。加えて、学習データが実測データと乖離していることも原因として考えられる。一方で、提案手法では、スペクトルを一致させる単純な誤差関数を使い、実測データの 213,200 ピクセルで学習を行った。提案手法と教師あり学習では、ほぼ同じ数のデータ数を用いたが、提案手法の方が推定精度が高い。これらの結果より、提案手法の方が、実測データで学習を行うため、学習データと推定するデータの乖離が少なく学習できることがわかる。

5. まとめ

本研究では、層状表面物体に対して、顔料層の厚みと混合比率の推定を行った。オートエンコーダのデコーダに

KM 理論に基づく反射光の物理モデルを用いることにより、中間層の潜在変数を厚みと混合比率として解釈可能にし、推定する手法を考案した。シミュレーションデータと実測データにより、本手法の有効性を確認した。また、物理モデルに従って生成したデータを用いた教師あり学習と比較することで、実測データで学習することのできる本手法の優位性を確認した。

本手法では、原色顔料の散乱係数と吸収係数が既知という条件で推定を行う。そのため、これらの係数に誤差があると、厚みと混合比率を正確に推定することができない。この問題を解決するために、厚みと顔料混合比率を推定しながら、散乱係数と吸収係数を修正する方法が考えられる。また、デコーダの物理モデルとして、2 光束の KM 理論を用いたが、4 光束 [9] などのより複雑なモデルを用いることで精度を向上させることができる可能性がある。

参考文献

- [1] Abed, F. M.: Pigment identification of paintings based on Kubelka–Munk theory and spectral images, *Ph.D. thesis (Rochester Institute of Technology 2014)* (2014).
- [2] C.J.Curis, S.E. Anderson, K. F. and Salesin, D.: Computer-generated watercolor, *Proc. SIGGRAPH*, pp. 421–430 (1997).
- [3] Duncan, D. R.: The colour of pigment mixtures, *Proceedings of the Physical Society*, Vol. 52, No. 3, pp. 390–401 (1940).
- [4] K. Fukumoto, N. T. and Berns, R.: Estimating pigment concentrations from spectral images using an encoder–decoder neural network, *Journal of Imaging Science and Technology*, Vol. 64, No. 3, pp. 30502–1–30502–15 (2020).
- [5] Kato, H., Beker, D., Morariu, M., Ando, T., Matsuoka, T., Kehl, W. and Gaidon, A.: Differentiable rendering: a survey, *arXiv preprint arXiv:2006.12057* (2020).
- [6] Kingma, D. and Ba, J.: Adam: A method for stochastic optimization, *Proc. International Conference on Learning Representations (ICLR)* (2015).
- [7] Kubelka, P. and Munk, F.: Ein Beitrag zur Optik der farbanstriche., *Z. Tech. Phys.*, Vol. 12, pp. 593–601 (1931).
- [8] Shi, L., Babaei, V., Kim, C., Foshey, M., Hu, Y., Sittthi-Amorn, P., Rusinkiewicz, S. and Matusik, W.: Deep multispectral painting reproduction via multi-Layer, custom-ink printing, *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, Vol. 37, No. 6 (2018).
- [9] Simonot, L., Hersch, R. D., Hebert, M. and Mazauric, S.: Multilayer four-flux matrix model accounting for directional-diffuse light transfers, *Appl. Opt.*, Vol. 55, No. 1, pp. 27–37 (2016).
- [10] T. Morimoto, R. T. Tan, R. K. and Ikeuchi, K.: Estimating optical properties of layered surfaces using the spider model, *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (2010).
- [11] 品田登: Kubelka-Munk 理論とその応用, *色材協会誌*, Vol. 42, No. 10, pp. 470–476 (1969).
- [12] 齋藤豪, 中嶋正之: Kubelka-munk の理論を用いたデジタルペインティングのための絵の具モデル, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. 第 J82-D-2 巻, No. 3, pp. 399–406 (1999).