

# 一般化ぷよぷよのより強い計算困難性

江藤 宏<sup>1,a)</sup> 木谷 裕紀<sup>2,b)</sup> 小野 廣隆<sup>3,c)</sup>

**概要：**本研究では一般化ぷよぷよの計算複雑度について考える。対象とするのは盤面サイズ、色数に関して一般化した、オフライン型パズルとしてのぷよぷよである。本研究ではこの一般化ぷよぷよにおける2つの問題を取り上げる。1つは全消し判定であり、もう一つは連鎖数最大化である。前者に関してはぷよ2色（おじゃまぷよあり）の設定であってもNP完全であることが、後者に関してはぷよ4色（おじゃまぷよあり）の設定でもNP困難であることが示されている。特に後者に関しては、詳細な証明は公開されていないがぷよ3色（おじゃまぷよあり）の設定で、あるいはぷよ5色（おじゃまぷよなし）でもNP困難であることが指摘されている。本研究ではこれらの結果をいくつかの側面から強化する。我々の結果は以下のとおりである：(1) 連鎖数最大化はぷよ3色（おじゃまぷよなし）でもNP困難、(2)  $P \neq NP$ の仮定の下で、ぷよ4色（おじゃまぷよあり）の連鎖数最大化に対しては近似比の精度保証が入力が多項式以下となるような多項式時間近似アルゴリズムは存在しない、(3) 全消し判定はぷよ4色（おじゃまぷよなし）でもNP完全である。

**キーワード：**ぷよぷよ, パズル計算量, NP完全性, 近似困難

## Stronger Hardness Results on Generalized Puyopuyo

HIROSHI ETO<sup>1,a)</sup> HIRONORI KIYA<sup>2,b)</sup> HIROTAKA ONO<sup>3,c)</sup>

**Abstract:** In this paper, we investigate the computational complexity of a generalized variant of Puyopuyo. The variant generalizes the size of the board and the number of colors but falling pairs of puyos are given in the offline manner. We focus on two problems of the generalized Puyopuyo; board clearing and maximizing chains. Both problems are already known to be NP-hard. More precisely, the former is NP-complete even for puyos of 2 colors with N-puyo setting, and the latter is NP-hard even for puyos of 4 colors with N-puyo setting. The latter result is mentioned to be improved to the setting of puyos of 3 colors with N-puyo and the setting of puyos of 5 colors without N-puyo, though the detail is not published. In this paper, we strengthen these results from several aspects. Our results are as follows: (1) The chain maximization is NP-hard even for the setting of puyos of 4 colors without N-puyo. (2) The chain maximization for puyos of 3 colors with N-puyo cannot be approximated within any polynomial factor in polynomial time, unless  $P=NP$ . (3) The board clearing is NP-complete even for the setting of puyos of 4 colors without N-puyo.

**Keywords:** Puyopuyo, puzzle complexity, NP-completeness, inapproximability

### 1. はじめに

ぷよぷよは30年以上遊ばれている人気の高い落ちもの

デジタルパズルゲームで、通常4色（赤、青、紫、黄など）の色ぷよとおじゃまぷよとよばれる無色ぷよを用いて縦12、横6の盤面上で行われる。このゲームは重力に従って落下していく単色または2色のペアのぷよを盤面上で左右に操作し、それらを「連鎖」とよばれるぷよの消去を行うことでゲームが進行する。

本研究では、このぷよぷよを一般化したオフライン型パズルとしてのぷよぷよに対する「全消し問題」と「最大連鎖数問題」の計算複雑度を考察する。これらに対しては、前者は2色以上かつおじゃまぷよありでNP完全であるこ

<sup>1</sup> 東北大学大学院情報科学研究科  
Graduate School of Information Science, Tohoku University

<sup>2</sup> 九州大学大学院経済学研究院  
Graduate School of Economics, Kyushu University

<sup>3</sup> 名古屋大学大学院情報学研究所  
Graduate School of Informatics, Nagoya University

a) hiroshi.eto.b4@tohoku.ac.jp

b) h-kiya@econ.kyushu-u.ac.jp

c) ono@nagoya-u.jp

と [3], 後者は 4 色以上でおじゃまぶよありで計算困難であることが示されている [2]. また, 後者に関しては 3 色以上でおじゃまぶよありや, 5 色以上, おじゃまぶよなしでも同様の困難性が成立することがと言及されている [4] が, その詳細は不明である. 本論文では, これらの結果をいくつかの側面から強化した結果を示す.

## 2. モデル

まず本研究で扱う一般化ぶよぶよのルールを紹介する.

- 盤面は上下左右の 4 方向から成る  $n \times m$  サイズの格子状のセルによって構成される. 通常遊ばれるぶよぶよでは  $n = 12, m = 6$  である.
- それぞれのセルは色 1 から  $c$  ( $c$  は適当な自然数) のうちのいずれかの色をもった色ぶよ, 色を持たないおじゃまぶよ, またはぶよがはいっていない空白セルのいずれかであり, ぶよは一つのセルにつき, 最大一つまで配置可能である. またあるぶよが入っているセルよりも下方向のセルに空白がある配置は認められず, 直ちに下方向へ詰められる. 通常,  $c$  は 3 から 5 の値をとる.
- それぞれのぶよは上下左右に隣接するセルのぶよに対し, 隣接関係を持ち, 同色で 4 つ以上の落下したぶよが隣接関係によりつながっているとき, それらのぶよは**クラスタ**を構成し消滅する.
- クラスタが消滅すると, 消滅したクラスタの上部にいたぶよは重力にしたがって盤面上に即座に落下する. 落下した後の盤面で新たなクラスタが生じると, 再度消滅がおこる. この現象を**連鎖**と呼ぶ. 連鎖の長さは消滅の回数として定義する.
- 色ぶよが消えるときにおじゃまぶよが上下左右のいずれかで消える色ぶよと隣接していれば, そのおじゃまぶよも同時に消える.
- ピース (組ぶよとも言う) は 2 個 1 組のぶよが繋がったもののことを言う. ピースは順に 1 組ずつ縦に 2 つ繋がった形で盤面の上部に現れる (盤面には常に高々 1 組のピースしか存在しない). ピースは重力に従って落下する. プレイヤーはピースを左右へ移動させること, 回転させてぶよの上下を入れ替えること, また水平にすることができる. すなわち, プレイヤーが行動は, 各ピースの配置決定である.
- 上述のようにピースは順に一組ずつ現れる. これを順に並べたものをピース列と呼ぶ. プレイヤーにはその時点で盤面に存在するピース以降の  $l$  個分のピースが情報として与えられる.

以上が, ぶよぶよの基本ルールである. 本研究ではオフラインパズルとしてのぶよぶよを扱うため,  $l$  は非有界とみなす. このときプレイのある時点の盤面  $G$  (各セルに上述のルールに沿った形でぶよが埋められたもの) とピース列

が与えられたときに, 如何に良いプレイができるかを問う問題を考える.

### 問題 1. 全消し判定問題

入力: 盤面  $G$ , ピース列  $s$ .

出力: ピース列  $s$  の配置で, 最後のピースの配置後, 盤面上の全てのぶよが消滅しているような配置が存在するなら Yes, 存在しないなら No.

### 問題 2. 連鎖数最大化問題

入力: 盤面  $G$ , ピース列  $s$ .

出力: ピース列  $s$  の配置で, 最後のピースの配置後までに起こった最も長い連鎖の長さを最大とするもの.

## 3. 主結果

本研究で得たぶよぶよの計算困難性に関する定理を紹介する.

先述のように松金らによりおじゃまぶよ有りの 4 色ぶよぶよの連鎖数最大化問題は NP 困難であることが示されており [2], また木場らによりおじゃまぶよ有り 3 色ぶよぶよ, おじゃまぶよ無し 5 色ぶよぶよの NP 困難性が (詳細な証明なしで) 示唆されている [4]. 本研究はこれらよりも強い, おじゃまぶよ無し 4 色ぶよぶよの連鎖数最大化問題の NP 困難を与える. またこの証明を元に, これまで知られていなかった, 精度保証付き多項式時間近似アルゴリズムの非存在性を示すことができる.

**定理 1.** おじゃまぶよ無しの 3 色ぶよぶよの連鎖数最大化問題は NP 困難である.

**定理 2.**  $P \neq NP$  の仮定の下で, おじゃまぶよ有りの 4 色ぶよぶよの連鎖数最大化問題に対する任意の多項式時間近似アルゴリズムの近似比は多項式上界を持たない.

全消し判定問題は, おじゃまぶよ有り 2 色の設定で NP 完全であることが示されている [3]. 同論文ではおじゃまぶよなしで同様の証明ができるかどうか未解決問題として挙げられていた. 本研究ではおじゃまぶよを取り除くかわりに, 新たに 2 色のぶよを加えた全消し判定問題の NP 完全性の証明を与える.

**定理 3.** 全消し判定問題は, おじゃまぶよのない 4 色のぶよぶよの設定でも NP 完全である.

本稿では紙面の都合上, 証明は定理 1, 2 のみに対して与える.

## 4. 定理 1 の証明

連鎖数最大化問題の NP 困難性を示すためには, その決定問題が NP 困難であることを示せば十分である. 以下では, 与えられた盤面  $G$  と  $s$  が与えられたとき,  $k$  以上の連鎖が起こりうるかを判定する問題が NP 困難であることを,

3-PARTITION からの帰着により示す. 3-PARTITION は代表的な NP 完全問題 [1] であり, 以下のような形で与えられる.

**問題 3. 3-PARTITION**

**入力:** 正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . ただし,  $n$  は 3 の倍数であり,  $n = 3m, \sum a_i = mT$ , 各  $a_i$  は  $T/4 < a_i < T/2$  を満たす.

**出力:**  $\{1, 2, \dots, n\}$  の 3 つ組  $S_1, S_2, \dots, S_m$  への分割で以下を満たすものが存在するか?: 任意の  $j$  に対して  $\sum_{i \in S_j} a_i = T$ .

以下では 3-PARTITION の問題例  $a_1, a_2, \dots, a_n$  から連鎖数最大化問題への帰着を与える. 帰着の枠組みは [2] の証明に基づいている.

**4.1 帰着**

まず  $G$  を図 1 のように定める. 初期盤面となる  $G$  は, 左端から 6 列, 2 列, 4 列, 2 列, 4 列, ..., 4 列, 2 列, 4 列, 2 列, 6 列の領域に分割された形をとっている. ここで 2 列, 4 列の領域をそれぞれバケット, ウォールと呼び, いずれも全く同じ配置をとる. 左端の 6 列, 右端の 6 列は互いに異なるが, 左端の 6 列は折り返しのための特別な配置の 2 列分にウォール (4 列分) が隣接した配置となっている. 右端も同様で, 最右端の 2 列は折り返しのための特別な配置をとっており, 残り 4 列はウォールと同じ配置となっている. バケットは計  $m$  個, 両端を除いたウォールは計  $m-1$  個ある. 以下では上述のように分割した領域を左から  $L, B_1, W_1, B_2, \dots, W_{m-1}, B_m, R$  で記す. よって, 盤面における幅は,  $2 \times m + 4(m-1) + 6 \times 2 = 6m + 8$  となる. 盤面の段数は  $8T + 57$  であるが,  $8T + 57$  段目はピース出現のためのマージンであり,  $8T + 57$  段目にぶよを配置することはできない. ぶよを配置できる 1 段目から  $8T + 56$  段目までを 4 段区切りにした領域をベルトと呼ぶ. ベルトは下から順にベルト  $1, 2, \dots, 2T + 14$  と番号付けされているものとする. ウォールは上限の  $8T + 56$  段分ぶよが積みあがった形をとっている.

入力となるピース列の構成および, 出現順序を示す. まず, 3-PARTITION おける  $a_i$  に対して, ピース列  $p_i$  を構成し, 入力となるピース列はこれらを順に並べた  $s = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  の形をとる. 各  $p_i$  は以下で示すヘッダ, ボディ及びフッタというピース列の繰り返しにより構成される

- ヘッダ:  $[\Delta, \Delta], [O, O], [\Delta, \Delta], [\Delta, \Delta], [O, O], [x, \Delta], [O, O], [O, O], [x, x], [O, O]$
- ボディ:  $[x, x], [x, x], [O, O], [x, x], [O, O], [O, O], [x, x], [O, O]$
- フッタ:  $[x, x], [x, x], [O, O], [x, x], [O, O], [O, O], [x, x], [O, O]$

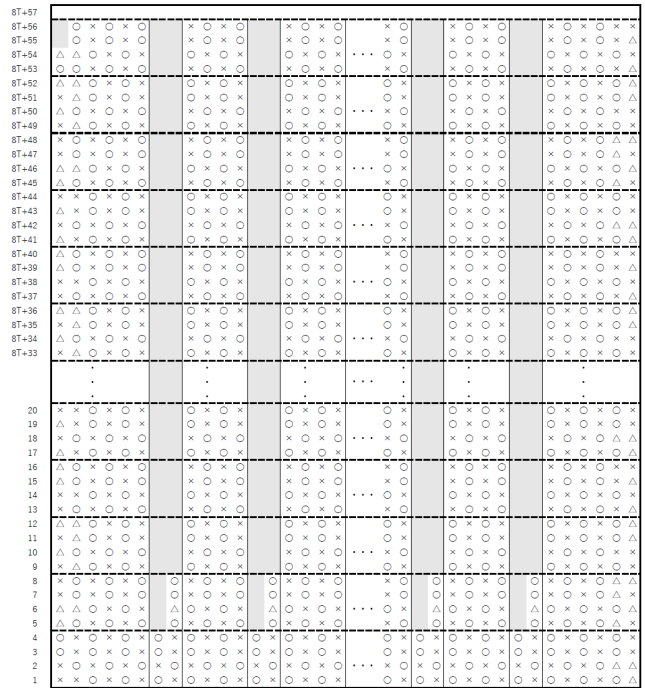


図 1 定理 1 の証明における  $G$

$[x, x], [x, x], [O, O], [x, \Delta], [O, O], [O, O]$   
 各  $p_i$  において, ヘッダ,  $a_i$  個のキャップ, フッタの順番で出現し, 各  $p_i$  がすべて出現したのち, キャップ, ツモの順番で出現する.

- キャップ:  $[O, \Delta] \times m, [\Delta, \Delta] \times m$
- ツモ:  $[\Delta, \Delta]$

初期盤面において, 各ウォールにおいて積まれているぶよの数は,  $(8T+56) \times (4(m-1)+6 \times 2) - 2$ , また各バケットに配置されているぶよの個数は,  $12 \times m$  となる. よって, 初期盤面  $|G| = (8T+56) \times (4m+8) + 12m - 2 = 32mT + 64T + 236m + 446$  となる.

また, 各  $p_i$  におけるぶよの数は,  $2 \times 10 + 2 \times 8a_i + 2 \times 6 = 16a_i + 32$  となる. 各  $p_i$  の総和は,  $\sum p_i = \sum 16a_i + 32 = 16 \times T \times m + 32 \times 3m = 16mT + 96m$  となる. キャップは  $4 \times m$  個, ツモは 2 個となるので, 入力ピースにおけるぶよの総和は,  $16mT + 96m + 4m + 2 = 16mT + 100m + 2$  となる.

よって, 全体のぶよの数は  $(32mT + 64T + 236m + 446) + (16mT + 100m + 2) = 48mT + 64T + 336m + 448$  となる.

使用されているぶよの色数は  $O, \Delta, x$  の 3 色である.

**4.2 証明**

前節の帰着によって与えられる  $G, s$  に対して連鎖数最大化問題を解くと, 元となる 3-PARTITION の Yes/No の判定ができることを示す. このため, 次の 2 つの補題を証明する.

**補題 1.** 3-PARTITION の問題例  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が Yes 解を持つならば, この問題例から構成された  $G, s$  の

$12mT + 16T + 84m + 111$  以上の長さの連鎖が存在する。

**補題 2.** 3-PARTITION の問題例  $a_1, a_2, \dots, a_n$  から構成された  $G, s$  の長さ  $12mT + 16T + 84m + 111$  の連鎖が存在するならば、元の 3-PARTITION は Yes 解をもつ。

これら 2つの補題により、直ちに定理 1 が成立する。まず補題 1 を証明する。

**証明.** (補題 1) 3-PARTITION のある Yes 解を  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  とする。すなわち、 $S$  は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の分割であり、各  $j$  において  $|S_j| = 3, \sum_{a_i \in S_j} a_i = T$  が成立している。このとき、ピース列  $s$  を  $S$  に基づき配置する。まずバケットを左から順に  $B_1, B_2, \dots, B_m$  と呼ぶこととし、バケット  $B_j$  と  $S_j$  を対応させる。

1つのバケット  $B_j$  に配置されるピースを  $p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}$  とするとき、その合計は、 $32 + 16a_{j1} + 32 + 16a_{j2} + 32 + 16a_{j3} = 96 + 16 \times (a_{j1} + a_{j2} + a_{j3}) = 96 + 16T$  となる。初期配置において1つのバケットには12個のぷよがすでに配置され、さらに、キャップのぷよが4個のちに配置されるので、バケット列に配置されるぷよの数の合計は、 $12 + 96 + 16T + 4 = 16T + 112 (= 2 \times (8T + 56))$  個のぷよがバケットに配置される。

よって、図 2 のように 3-PARTITION における Yes 解となる  $S$  に沿って割り当てることで、途中でぷよの消滅をすることなく配置される (ヘッダ・ボディ・フッタ全てのピースを水平方向にバケット内に落とす形で配置する)。ヘッダ、ボディ、フッタを図 2 のような配置の形で配置可能であることは、主張 3 (補題 2 の証明内にある) の証明により確認できる。

連鎖の開始は、最上段において、左端 1 列目にツモ： $[\Delta, \Delta]$  を置き、左端の 1 列目と 2 列目にある  $[\Delta, \Delta]$  とが 4 つでつながることで連鎖が起きる。その次は 1 列目の  $\circ$  と左から 2 列目の 3 つの  $\circ$  と 3 列目の 1 つの  $\circ$  が消える (計 5 個)。このように、 $i$  列目の 3 つと  $i+1$  列目の 1 つが繋がることで連鎖が図 3 のように左から右にかけて連鎖が続く。この際、消えるぷよの数は毎回 4 個である。ベルトにおいて図 4 の (2) のように右端まで連鎖が続いた時、 $6m+7$  列目の 3 つと  $6m+8$  列目の 1 つが消え、次に図 4 の (3) のように  $6m+8$  列目に  $\Delta$  が 4 つ繋がる。このように、1つのベルトで連鎖数は  $6m+8$  なる。次に図 4 の (4) にあるように、盤面の最上段の右上の  $\times$  が、1つ下のベルトの 3 つの  $\times$  と繋がることで、折り返す形でベルト間の連鎖が起こる。このように、右から 1 列目と 2 列目のぷよが繋がることで最上段のように連鎖が続き、左端まで来た時、同様に連鎖数は  $6m+8$  となる。連鎖は 2 段のベルトが往復する形で連鎖が続き、最終的に 1 段目のベルトにおいて、左端の 2 つの  $\circ$  が残る形で連鎖が終了する。

ベルトは  $(8T + 56)/4 = 2T + 14$  段存在し、各ベルトにおいて  $6m+8$  の連鎖が起きるので、この置き方によって

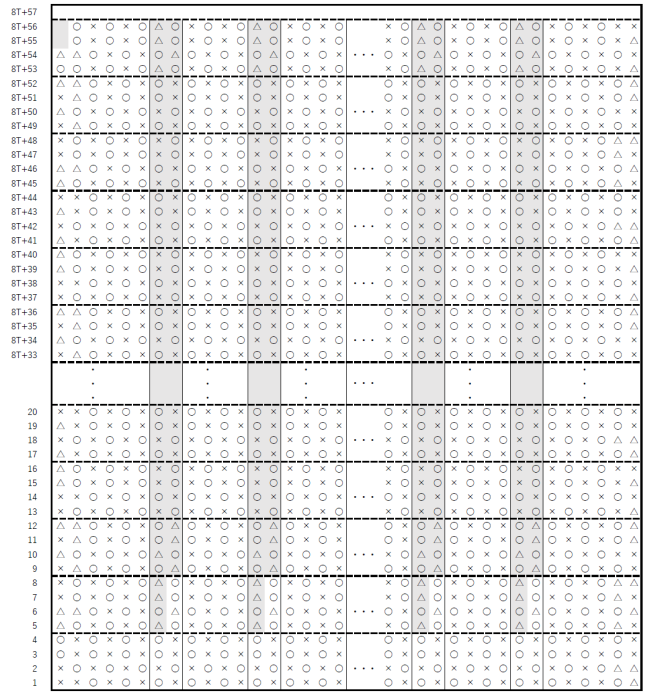


図 2  $G$  に対するピース列  $s$  の配置 (最後のツモ： $[\Delta, \Delta]$  以外が配置積み状態)

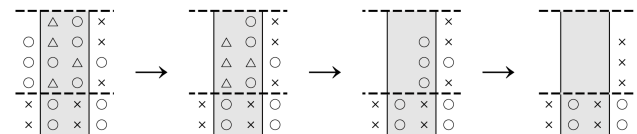


図 3 1つのベルトでの連鎖の流れ

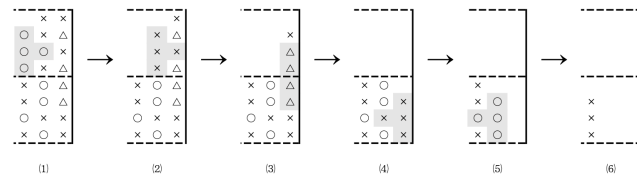


図 4 1つ下のベルトへの連鎖の流れ

$(2T + 14) \times (6m + 8) - 1 = 12mT + 16T + 84 + 111$  の連鎖が発生する。□

**証明.** (補題 2) ぷよの総数が  $48mT + 64T + 336m + 448 (= 16(T + 7)(3m + 4))$  であり、また盤面は段数が  $8T + 56$ 、列数が  $6m + 8$  であるため、配置できるぷよの数は  $(8T + 56)(6m + 8) = 16(T + 7)(3m + 4)$ 、すなわちぷよの総数と一致する。ここで連鎖数  $12mT + 16T + 84m + 111 = (48mT + 64T + 336m + 448)/4 - 1$  はぷよが毎回サイズ 4 のクラスタを構成するならば最後に 4 つのぷよを残す形となるが、 $\circ, \times, \Delta$  の総数をカウントすると、 $\Delta$  は 4 の倍数の個数が存在するが、 $\circ, \times$  が 4 の倍数ではないことがわかる ( $\circ$  が 2 個あまり、 $\times$  が 1 個余る)。つまり、 $\Delta$  は 4 つずつ消えるが、 $\circ, \times$  のうち 4 つずつの連鎖では消えないぷよが存在することから、連鎖数  $12mT + 16T + 84m + 111$  の配

置（以下、本証明ではこれを**最大連鎖の配置**と呼び、またその際の連鎖を単に**最大連鎖**と呼ぶ）においては、ぷよは途中一つも消滅することなく全てのバケットの  $8T+56$  段目が丁度埋まり、かつ左上端の2マスにもぷよが埋まった形で連鎖が開始する形をとる。ツモとなるピースは  $[\Delta, \Delta]$  であることから、連鎖は  $\Delta$  が消滅する形で始まる。

まず、最大連鎖の配置では、 $G$  の左上端の2マスにツモ： $[\Delta, \Delta]$  がおかれることにより連鎖が開始することに注意する。そうでないとすると  $G$  において左端2列に配置されている  $\Delta$  の数は、 $4x+2$  個 ( $T$  が奇数の  $6T+40$  個、 $T$  が偶数のとき  $6T+38$  個) であり、また左から3列目には全く  $\Delta$  が配置されないことから、これらがクラスタを形成して連鎖することになるが、 $[\Delta, \Delta]$  以外のピースが配置されたときは  $\Delta$  を4つずつ消すことができなくなるためである。

また  $G$  の左下3つの  $\times$  は隣接する2つの  $\times$  とクラスタをなす形になるため、この3つの  $\times$  含むクラスタ以外では毎回4つずつ消えることになる。よって、いくつかの例外を除いた上でサイズ5以上のクラスタが生じうるのは  $\bigcirc$  のみとなる。

よって  $p_1, p_2, \dots, p_n$  内の各ピースはすべていずれかのバケットに配置される。また2つの  $\Delta$  が消えた後は、 $\bigcirc$  (最初だけ5つ)、 $\times$  が順にクラスタを構成し、右へ連鎖が続き、バケットに達する。バケット内のぷよをいくつか消したのち、一つ目のウォールの左端のいずれかのぷよが消える形で連鎖が続く。この際、最初に消えるぷよは上から3番目のぷよのみである。この主張はより一般的に以下のようにまとめられる。

**主張 1.**  $k$  を任意の自然数とする。  $8k$  段 (または  $8k-4$  段) からなるウォールがあったとき、左から (または右から) 連鎖が到達したとする。このとき、以降の連鎖によってウォール内に生じる  $\Delta, \times$  のクラスタがいずれもサイズ4であるならば、最初に左上端 (または右上端) から3段目の  $\bigcirc$  のみが消えることによる連鎖が起こり、ウォールの右上端 (または左上端) 2段目から4段目のうちある段の右隣 (または左隣) に  $\bigcirc$  が配置されていれば  $8k-4$  段 (または  $8(k-1)$  段) のウォールが残る。

**証明.** 左から連鎖が到達するとき最初に消えるのは左上端にある2つの  $\times$  ではありえない (クラスタが生じないため)。よって、最初に消えるのは左上端3段目以下のぷよである。まず左上端3段目の  $\bigcirc$  のみが消える場合を考える。このとき連鎖が起こり、ウォールの右端に到達すると  $\bigcirc$  が3つ積みあがる形となる。よって、もしこの右隣に  $\bigcirc$  があるとウォールの上4段分が消えるため確かに  $8k-4$  段分のウォールが残される。

以下では、最初に消えるぷよが左上端4段目以下のぷよである場合を考える。このときいずれの場合も、サイズ5以上のクラスタが生じる。以下これを確認する。まず4段

目の  $\times$  が消える場合、これに上下右に隣接する  $\bigcirc$  を含む4つの  $\bigcirc$  が消える。すると、この時点では消えていないその上にある2つの  $\times$  を含む7つの  $\times$  からなるクラスタが生じる、同様に5段目以下のぷよが最初に消える場合は  $\times, \times$  のサイズ5以上のクラスタを生むことが確認できる。

以上より左から連鎖が到達する場合、あり得る連鎖の形は左上端の3段目の  $\bigcirc$  のみが消える形であることがわかる。右からの連鎖に関しても同様の議論が成立する。  $\square$

主張1により、最大連鎖の大きな流れは一意的に定まる。

**主張 2.** 最大連鎖は、 $G$  の左上端の2マスにツモ： $[\Delta, \Delta]$  がおかれることにより開始し、偶数番目のベルトに沿って右に連鎖したのち、折り返し奇数番目のベルトに沿って左に連鎖し、これをまた折りのを繰り返す形で進む。

**証明.** 最大連鎖が  $G$  の左上端の2マスにツモ： $[\Delta, \Delta]$  がおかれることにより開始することは上で既に示している。

ツモ後に起こる連鎖は  $L$  の上4段のぷよを消し、バケット  $B_1$  に達する。 $L$  の右4列がウォールと同一であることから主張1により、この後の連鎖は  $W_1$  の上3段目の  $\bigcirc$ 、あるいは (上4段が消えた)  $L$  上から3段目の  $\bigcirc$  を消す形で進む。しかし、後者が先に起きることはない。仮にそうだとすると、連鎖は左に進み、図4をほぼ反転した形で下のベルトに移り、再びバケット  $B_1$  に達する。ここでバケット2列分が生じるサイズ4のクラスタは高々3段分にしかならないことを考えると、以降  $B_1$  の左上端3段目の  $\bigcirc$  が消えることができなくなるためである。

以上の観察により、ツモ後に起こる連鎖は  $L$  の上4段のぷよを消し、バケット  $B_1$  に達したのち、 $W_1$  の上4段を消す形で伝わる。上の議論は  $W_i, B_{i+1}, W_{i+1}$  ( $i=2, \dots, m-1$ ) の関係においても成立するため ( $W_m$  は  $R$  とみなす)、連鎖は一番上 ( $2T+14$  番目) のベルトに沿って右に進み、 $R$  に到達する。 $R$  に到達した連鎖は図4の形で折り返し、連鎖は左に進むこととなる。 $G$  の対称的な配置により、折り返された連鎖は次のベルト ( $2T+13$  番目のベルト) に沿って右に進み、 $L$  に到達しまた折り返す。以上の議論により本主張は証明された。  $\square$

これにより各バケット内のベルトは図5のような配置をとることがわかる (これ以外の配置ではクラスタサイズ4の連鎖が起こらないか、連鎖が左右に進まないことが容易に確認できる)。ただし、図中の  $\alpha, \beta$  は  $\Delta$  または  $\times$  で同じ文字は同じ種類のぷよを表す。これにより、 $s$  の各ピースの配置が満たすべき条件が次のように得られる。

**主張 3.** 最大連鎖配置において、ピース列  $p_i$  内のぷよは、ある同一のバケット内に図2のように配置される。

**証明.** [2], 定理13で同様の命題が示されているが、完全



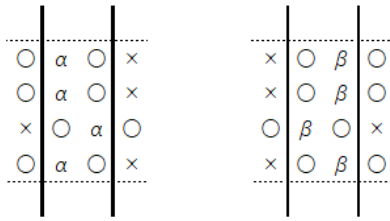


図 5 バケット内のぶよの配置 (左: 偶数番目のベルト, 右: 奇数番目のベルト)

性のため改めて証明を与える.

主張 2 により, 最大連鎖においては下から 2 番目のベルトに関しては左から右へ連鎖が起こる. このためためにはいずれのバケット内の一番下の空白 4 つ分には上から順に  $\Delta, \Delta, \circ, \Delta$  が埋まる形になっている必要がある (図 6, グレーの部分下 4 つ分).

これを踏まえた上で,  $s$  の先頭に位置する  $p_1$  のヘッダの配置について考える. 最初の 2 つのピースは  $[\Delta, \Delta], [\circ, \circ]$  であることから, この 2 つのピースは同じバケット内に横置きするしかない. これにより, 同バケットの一つ上 (奇数番目) のベルトにおける  $\beta$  は  $\Delta$  になることがわかる (図 6 の下から 3 つめのベルト部分). 続くピースは  $[\Delta, \Delta], [\Delta, \Delta], [\circ, \circ], [\times, \Delta]$  であり,  $\times$  を同じバケットのもう一つ上 (偶数番目) のベルトにおける  $\alpha$  にするか, あるいは別のバケットの  $\beta$  として配置する形しか許されない. 後者はあり得ないことが確認できるため, これらはすべて同じバケットに収められ, 上のベルトの  $\alpha$  は  $\times$  となる (図 6 の下から 4 つめのベルト部分). 残った  $[\circ, \circ], [\circ, \circ], [\times, \times], [\circ, \circ]$  に関しては,  $\circ, \times$  を他の (何も入っていない) バケットの先端に入れることができないため, いずれもこのバケットに入れることとなる. これにより, 更にもう一つ上のベルトの  $\beta$  も  $\times$  であることが決まり (図 6 の下から 4 つめのベルト部分), ヘッダ分のピース全ての配置が決まる. 図 7 は図 6 で定まった配置を実現するヘッダの各ピースの配置の仕方を示している (3, 4 番目のピース, 7, 8 番目のピースの置き方にはそれぞれもう一通り別の置き方が存在する).

ボディは  $[\times, \times], [\times, \times], [\circ, \circ], [\times, \times], [\circ, \circ], [\circ, \circ], [\times, \times], [\circ, \circ]$  と,  $\times, \circ$  の繰り返しであることから先の議論と同様, 他のバケットの底に入れることができず, 引き続きここまで埋めたバケットの上に配置することとなり ( $\alpha, \beta$  共に  $\times$  となる), 実際全てのピースを水平にして落とすことにより図 8 の配置が実現できることがわかる. ボディ 1 つ分が 16 ぶよ, つまりバケットにおけるベルト 2 つ分であることに注意すると, 最後のボディの配置は図 8 の下部分 (白い部分) のような形で配置するしかないことがわかる.

ボディを置き終えた後, フッタを処理する. フッタは  $[\times, \times], [\times, \times], [\circ, \circ], [\times, \Delta], [\circ, \circ], [\circ, \circ]$  と続けた

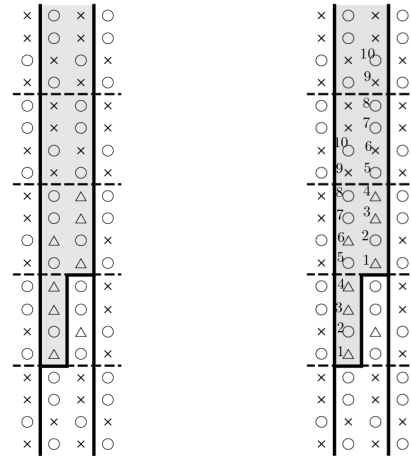


図 6 バケット最下部 (底) 図 7 対応するヘッダ配置の可能な配置

め, 最初の 3 つのピースはこれまでの議論と同様, 現在のバケットに積み重ねる必要がある. 4 つ目の  $[\times, \Delta]$  についても他のバケットの底に配置することができない ( $\Delta$  をバケットの底に配置すると  $\times$  を  $\circ$  があるべき場所に配置せざるを得ない) ため, さらにその上に配置することとなる. 残る  $[\circ, \circ], [\circ, \circ]$  も他のバケットの底におくことはできない. これにより, このベルトにおける  $\alpha$  は  $\times$  となり図 8 のグレー部分に表された配置の仕方 で置くことが決まる.

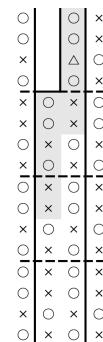


図 8 ボディとその上のフッタの配置

以上により,  $p_1$  の各ピースは一つのバケットに上で説明した形で配置され, かつ図 8 の上部のような空白が残る形が残される. この空白とその周りの配置が各バケットの底付近の配置と同一であることから,  $p_2, p_3, \dots, p_m$  に対して同様の議論が適用され, これらはいずれもそれぞれが同じバケットに配置されることとなる.  $\square$

主張 3 により, 最大連鎖配置では各  $p_i$  がいずれかのバケットに  $8T + 56$  段を超えることなく収まっており, 各バケットの空白は少なくとも図 8 のような 2 ピース分の形が残されている. この時点でまだ配置されていないのはキャップの  $2m$  ピースとツモのみであるため,  $m$  個のバケットの各空白にキャップが配置, またツモは  $G$  の左上端に収

まる形をとる。このことは、キャップが配置される前の各バケットの空白がちょうど2ピース分であったことを意味する。ここで各  $p_i$  を構成するピース数はヘッダ10, ボディ  $8a_i$ , フッタ6であることから計  $8a_i + 16$  である。さて  $G$  における各バケット内の空白は  $8T + 50$  ピースであり残る2ピース分を差し引くと  $8T + 48$  ピースが配置されることとなる。今、各  $a_i$  が  $T/4 < a_i < T/2$  を満たしているため、一つのバケットに入る  $p_i$  などとはちょうど3つ分であり、その和は  $8a_{i_1} + 16 + 8a_{i_2} + 16 + 8a_{i_3} + 16 = 8(a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3}) + 48$  となり、 $a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} = T$  が成立していることがわかる。よって各バケットに配置された  $p_i$  などが3-PARTITIONの解となる分割を与えることがわかる。 □

### 5. 定理2の証明

本節では連鎖数最大化問題に対する近似困難性の証明のスケッチを与える。基本的なアイデアは、定理1の証明の活用である。ただし、定理1は3色のぷよを使った証明であるが、連鎖の制御のため一部のぷよを新しい1色に変えたものに変える。定理1の証明では3-PARTITIONを帰着した盤面  $G$  と  $s$  を用いている。この  $G, s$  における連鎖数が  $12mT + 16T + 84 + 112 (= q)$  であるときには回数  $r$  の連鎖を追加する形で継続させることができるが、 $q$  未満のときには連鎖がそこで止まってしまうようなガジェットを  $G$  に追加した盤面  $G'$  を構成するのが中心的なアイデアである。そのようなガジェットが存在すると、3-PARTITIONのYes/Noの関係が連鎖数  $q+r$  と  $q$  未満の関係と等価になる。これにより、連鎖数最大化問題に対してある多項式  $f(\cdot)$  を用いた  $f(N)$ -近似多項式時間アルゴリズムが存在するならば ( $N$  を入力サイズとする)、3-PARTITIONのYesインスタンスに対しては  $(q+r)/f(N)$  以上の解を確実に返すことができるのに対し、Noインスタンスに対しては高々  $q-1$  の解しか求めることができない。これを利用し、 $r \geq (f(N) - 1)(q - 1)$  のように選んだ上で  $r$  に比例する数のぷよを  $G$  に追加して  $G'$  をインスタンスとして考えると、 $(q+r)/f(N) \geq ((q-1)f(N) + 1)/f(N) = q-1 + 1/f(N) > q-1$  であるため、この  $f(N)$ -近似アルゴリズムを適用することにより3-PARTITIONのYes/Noインスタンスへの多項式時間での分類が可能となる。これは  $P \neq NP$  の仮定に反するため、多項式時間の多項式精度近似アルゴリズムが存在しないことが言える。

これを踏まえ、以下では上述の条件を満たす  $G'$  の構成法を与える。まず、上で述べたように定理1のぷよのうち一部を4色目に変えた帰着をベースとして考える(図9)。この帰着は図2の左上端付近と左下付近にある  $\circ, \times$  を  $\star$  に変更した以外は全く同じ配置となっているため、補題1,2 とほぼ同様のことが言える(連鎖数のサイズが1増える)。この4つの  $\star$  はこれら以外全てのぷよが消えた最

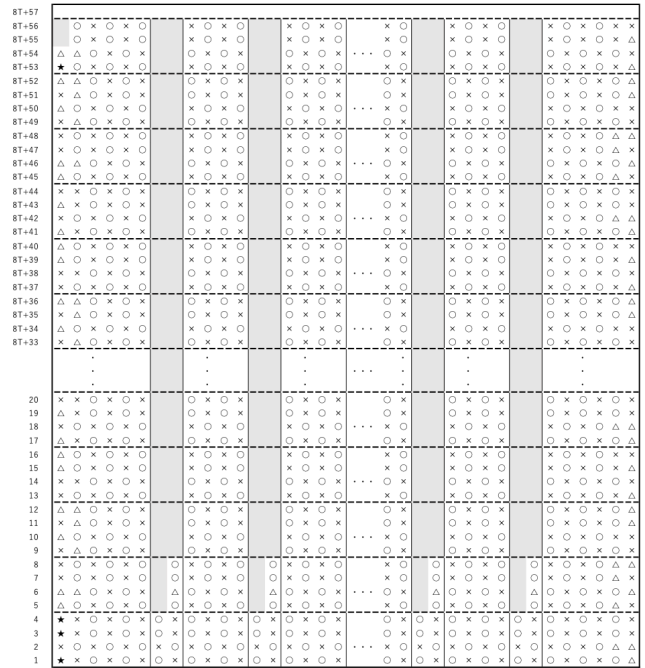


図9 連鎖数最大化の帰着(4色)

後に消えることに注意されたい。

図9の帰着が正当であることを前提として生成するのが次の帰着である(図10)。この図では4色目を  $\star$  の代わりに  $\diamond$  を用い、 $\bullet$  で  $N$  ぷよを表す。この帰着は上部に図9のガジェット(基本層と呼ぶ)を配置、さらに各ウォールの上に  $N$  ぷよの層を置き、さらにその上に  $\diamond$  を配置する。基本層の下には  $N$  ぷよと  $\diamond$  によるバッファ層、さらにその下には  $\circ$  と  $\diamond$  による、一旦連鎖が始まれば自動的に調節可能な長さの連鎖を起こす層(底層)を配置する。

この上部に置いた  $\diamond$  は、基本層すべてが消える連鎖が起こったときのみ、バッファ層の  $\diamond$  とクラスタを構成し、底層へと連鎖をつなげる。逆に、基本層すべてが消える連鎖が起きないときには最上部の  $N$  ぷよ層の  $\diamond$  とバッファ層の  $\diamond$  が隣接することがないため、底層に連鎖が伝わらない構造となっている。この基本層全てを消す連鎖の有無で最終的に起こる連鎖の数に大きな差により近似不可能性を示すことができる。

### 参考文献

- [1] Garey, M. R. and Johnson, D. S.: *Computers and intractability*, Vol. 174, freeman San Francisco (1979).
- [2] 松金輝久, 武永康彦: 組合せ最適化問題としてのぷよぷよの連鎖数判定問題, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. 89, No. 3, pp. 405-413 (2006).
- [3] 牟田秀俊: ぷよぷよは NP 完全, 電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピューテーション, Vol. 105, No. 72, pp. 39-44 (2005).
- [4] 木場裕矢, 宗重成央, 上嶋章宏: 色数とおじゃまぷよを制限した一般化ぷよぷよの連鎖数判定問題の NP 完全性, Vol. 2011, 公益社団法人日本オペレーションズ・リサーチ学会, pp. 370-371 (2011).

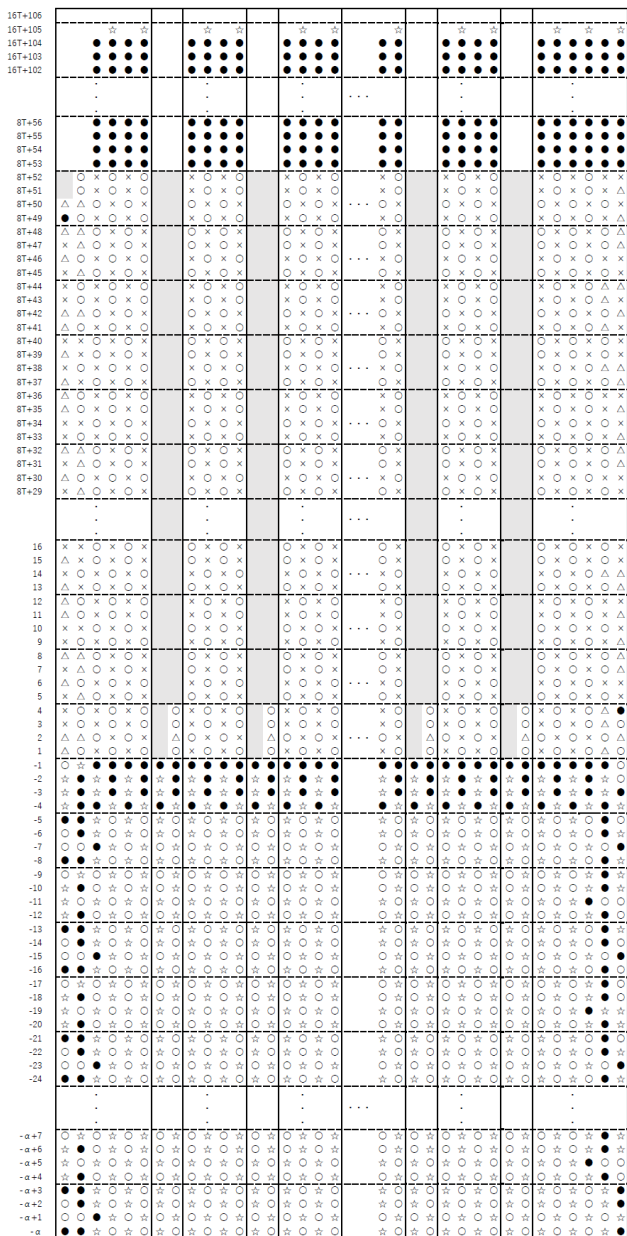


図 10 連鎖数最大化の帰着 (4 色+N ぶよ)