

# 量子アニーリング等イジングマシンの現状と展望

田中 宗<sup>1,a)</sup>

**概要:** 近年、組合せ最適化問題に対する専用計算技術として、量子アニーリングマシンをはじめとしたイジングマシンと呼ばれる次世代アクセラレータが注目を集めている。組合せ最適化問題は、組合せ的な構造を有する解集合の中から、制約条件を満足し、かつ目的関数を最小（あるいは最大）とする解を探索する問題である。イジングマシンは物理学に着想を得たメタヒューリスティクスをハードウェア実装したものであり、イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法では、目的関数と制約条件をイジングモデル、あるいは Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) を用いて表現する必要がある。イジングマシン分野においては、ハードウェア、ソフトウェア、アプリケーション探索の研究開発が協調的に進められている。本講演では、イジングマシン分野の研究開発と現存の課題、今後の展望について紹介する。

## Current Status and Future Perspective of Ising Machines including Quantum Annealing Machine

SHU TANAKA<sup>1,a)</sup>

**Abstract:** In recent years, next-generation accelerators called Ising machines, such as quantum annealing machines, have attracted attention as dedicated computational techniques for combinatorial optimization problems. Combinatorial optimization problems are to find a solution that minimizes (or maximizes) the objective function among a set of solutions with satisfying the given constraints. Here, solutions have a combinatorial structure. Ising machines are hardware implementations of physics-inspired meta-heuristics. In solving the combinatorial optimization problem using the Ising machine, the objective function and constraint conditions are expressed as an Ising model or Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO). In the field of Ising machines, research and development in hardware, software, and application exploration are being conducted in a coordinated manner. In this talk, I will explain the current status of research and development, existing issues, and prospects in the field of Ising machines.

### 1. 緒言

組合せ最適化問題は、決定変数、制約条件、目的関数から成る問題であり、組合せ最適化問題の解候補は、決定変数の組を用いて組合せ構造的に与えられる。組合せ最適化問題の解集合のうち、与えられた制約条件を満足し、目的関数を最小化（問題の定義の仕方によっては最大化）する解を求める問題である。組合せ最適化問題は様々な分野において内在する数理的な問題であり、これの高効率解法を構築することは重要な課題である。組合せ最適化問題は、決定変数の個数に対し、解候補の個数が指数関数的に増大

するため、全探索により現実的な時間で厳密解を得ることは一般には困難とされる。

そうした背景の中、イジングマシンと呼ばれる、物理学に着想を得たメタヒューリスティクスをハードウェア実装したものが開発されている。イジングマシンは、組合せ最適化問題における決定変数をスピン変数と呼ばれる2値の変数で表現し、そのうえで、制約条件と目的関数をイジングモデル、あるいは Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) を用いて表現することにより、組合せ最適化問題を処理するハードウェアのことである。商用イジングマシンの開発が盛んになったきっかけのひとつとして、2011年にD-Wave Systemsによって発表された世界初の商用量子アニーリングマシンが挙げられる [1]。こ

<sup>1</sup> 慶應義塾大学理工学部物理情報工学科  
Hiyoshi, Kohoku, Yokohama, Kanagawa 223-8522, Japan  
<sup>a)</sup> shu.tanaka@appi.keio.ac.jp

の量子アニーリングマシンは、門脇・西森によって提案された量子アニーリング [2] や Farhi らによって提案された断熱量子計算 [3] を元にして開発されている。量子アニーリングは、非常によく知られたメタヒューリスティクスの一つであるシミュレーテッドアニーリング（焼きなまし法）[4] における温度の代わりに量子効果を用いたものである。量子アニーリングマシン登場後、様々な内部アルゴリズムを用いたイジングマシンが開発されて現在に至る。様々なイジングマシンの内部アルゴリズムについては4章で述べる。

様々なイジングマシンが開発されつつあるいま、ソフトウェア開発やアプリケーション探索が盛んである。またイジングマシン実機を用いてその性能を見定める研究が進められ、既存のイジングマシンについての課題が明確化されつつある。本講演では、イジングマシンの基礎から現在の研究開発の現状、既存の課題と今後の展望について述べる。

本原稿の構成は以下の通りである。2章では、イジングモデルや QUBO を定義し、組合せ最適化問題をイジングモデルや QUBO で表現する方法について紹介する。3章では、イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法の流れを説明する。4章では、様々なイジングマシンの内部アルゴリズムについて述べる。5章では、イジングマシン向けソフトウェア開発環境の現状について述べる。6章では、イジングマシンのアプリケーションに関する研究開発の状況について述べる。7章では、既存の課題ならびに今後の展望について述べる。

## 2. 組合せ最適化問題とイジングモデル

先に述べたように、イジングマシンを用いた組合せ最適化問題の解法においては、組合せ最適化問題の目的関数や制約条件をイジングモデル、あるいは QUBO を用いて表現する必要がある。

ここでイジングモデルや QUBO を定義する。イジングモデルは物理学の一分野である統計力学における数理モデルであり、無向グラフ  $G = (V, E)$  上に定義される。ただしここで  $V, E$  はそれぞれ頂点集合、辺集合である。イジングモデルのエネルギー関数（ハミルトニアンと呼ぶ）は、

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = - \sum_{i \in V} h_i s_i - \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} s_i s_j, \quad s_i \in \{+1, -1\}. \quad (1)$$

で与えられる。ここで  $h_i, J_{i,j}$  は局所磁場、相互作用と呼ばれる実数定数である。また、 $s_i$  はスピンと呼ばれる変数である。このとき、式(1)を最小にする  $s_i$  の組合せを基底状態と呼ぶ。また、QUBO は、

$$\mathcal{H}_{\text{QUBO}} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} Q_{i,j} x_i x_j, \quad x_i \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $Q_{i,j}$  は QUBO 行列と呼ばれ、各要素は実数定数である。また、 $x_i$  はバイナリ変数である。こ

のとき、式(2)を最小にする  $x_i$  の組合せを基底状態と呼ぶ。適切な変換により、定数項を除いてイジングモデルと QUBO とが等価になることが知られている [5, 6]。

さて、イジングモデルと QUBO の定義をみてきたので、続いて、イジングモデルや QUBO を用いて組合せ最適化問題の目的関数や制約条件を表現する方法について見ていく。物理学において、エネルギーが低い状態が安定状態であるという性質がよく知られている。組合せ最適化問題をイジングマシンで処理する際には、組合せ最適化問題を、

- 制約条件がない組合せ最適化問題
- 制約条件が等式で表現される組合せ最適化問題（等式制約）
- 制約条件が不等式で表現される組合せ最適化問題（不等式制約）

として分類すると明確である。詳細については文献 [5-7] を参照されたい。

## 3. イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法の流れ

イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法の流れは以下の通りである。

**第一段階** 組合せ最適化問題をイジングモデルや QUBO で表現する。

**第二段階** 第一段階で表現したイジングモデルや QUBO をイジングマシンに入力する。

**第三段階** 第二段階で入力されたイジングモデルや QUBO の基底状態を探索するように、イジングマシンが動作する。

**第四段階** 最終状態の解を得た後、元の組合せ最適化問題の解に戻す。

以上の四段階によってイジングマシンによる組合せ最適化問題の解法がなされる。第一段階については、2章で述べたとおりである。類型化された、イジングモデルや QUBO で表現する方法群については、文献 [5-7] で説明されている。第二段階では大きく分けて二つの前処理が必要である。一つは、解きたい組合せ最適化問題の決定変数の個数に比べて、イジングマシンに搭載されているスピンの個数が少ないことによる前処理が挙げられる。もう一つは、第一段階で表現されたイジングモデルや QUBO の係数値のビット幅やグラフ構造と、イジングマシンの係数値のビット幅やグラフ構造の不整合を解消するための前処理である。これらについては5章で説明する。第三段階におけるイジングマシンの内部アルゴリズムは様々なものが存在する。典型的ないくつかの種類の内アルゴリズムについては4章で紹介する。イジングマシンは確率的な挙動を示すことから、第四段階の後処理が必要となる。これについては4章や5章で説明する。

## 4. イジングマシンの内部アルゴリズム

イジングマシンは、イジングモデルや QUBO で表現されたエネルギー関数を最小にする解を探索するメタヒューリスティクスをハードウェア実装したものである。現在、様々なイジングマシンの内部アルゴリズムが検討され、イジングマシンとしてハードウェア実装されている [1,8-14]。ここでは代表的な内部アルゴリズムとして、シミュレーテッドアニーリング（焼きなまし法）と量子アニーリングについて説明し、その後、その他のアルゴリズムについて簡単に紹介する。

### 4.1 シミュレーテッドアニーリング

シミュレーテッドアニーリングは、物理学に着想を得たメタヒューリスティクスの代表的なものの一つである [4]。統計力学によれば、温度  $T$  の熱平衡状態において、エネルギー  $E_s$  を取る状態  $s$  の実現確率は  $\exp(-E_s/T)$  に比例する。ただしここでボルツマン定数  $k_B$  を 1 とする単位系を用いている。すなわち、温度  $T$  が低くなると、低いエネルギーを取る状態の実現確率が高くなる。一方で、温度  $T$  が高いときには、様々な状態の実現確率がほぼ等しくなる。組合せ最適化問題の解法という観点では、目的関数を最小にする解を最適解とみなす問題設定\*1において、目的関数をエネルギー関数とみなせば、温度を徐々に下げるという操作を仮想的に導入することにより、徐々にエネルギーが小さい状態へと遷移することが想像できる。実際、これを実装したものがシミュレーテッドアニーリングである。

式 (1) で表現されるイジングモデルを対象としたシミュレーテッドアニーリングの実装例を以下に示す。

**第一段階** 温度  $T$  を、イジングモデルのエネルギースケールに比べて、十分高い温度に設定する。

**第二段階** ランダムな状態を用意する。

**第三段階** 頂点をランダムに選び（選ばれた頂点を  $i$  とする）、頂点  $i$  上のスピンを反転させた場合とさせない場合でのエネルギー差  $\Delta E_i$  を計算する。ここで  $\Delta E_i$  は、頂点  $i$  のスピンを反転させた場合のエネルギーから、反転させない場合のエネルギーを引いたものと定義する。

**第四段階**  $\Delta E_i$  が負の場合は、頂点  $i$  のスピンをフリップする。一方、 $\Delta E_i$  が正の場合は、頂点  $i$  のスピンを  $\exp(-\Delta E_i/T)$  の確率でフリップする。

**第五段階** 第三段階と第四段階について、すべての頂点を平均的に一度ずつ試行するまで繰り返す。

**第六段階** 温度  $T$  を下げる。

**第七段階** 温度  $T$  がゼロ近傍になるまで、第三段階から第六段階を繰り返す。温度  $T$  がゼロ近傍になったら、そのときのスピンの状態を出力とする。

以上によってシミュレーテッドアニーリングは実装される。第一段階におけるイジングモデルのエネルギースケールは式 (1) から算出可能である。典型的には、第三段階で行われる状態更新前後のエネルギーが典型的なエネルギースケールである。第二段階におけるランダムな状態とは、各頂点におけるスピンの  $\pm 1$  のどちらかをランダムに取る状態のことであり、温度  $T$  が十分に高い温度であれば、これが典型的な状態である。第三段階、第四段階の方法は、メトロポリス法と呼ばれる状態更新規則である。他にも熱浴法と呼ばれる状態更新規則もある [15]。また他の状態更新規則を採用したものとして、平均場理論に基づくアニーリング法など、様々な方法が知られている [16]。第四段階で確率を用いていることから、これは確率的な情報処理の一種である。

### 4.2 量子アニーリング

4.1 節で述べたシミュレーテッドアニーリングは、温度による熱擾乱効果を用いたメタヒューリスティクスであった。一方で、物理学において擾乱効果を引き起こす別の効果として、量子擾乱効果が挙げられる。量子擾乱効果を用いたメタヒューリスティクスが量子アニーリングである [2]。量子擾乱効果により、イジングモデルにおけるスピンの  $+1$  の状態と  $-1$  の状態の重ね合わせ状態になることを利用したアルゴリズムである。初期段階においては量子擾乱効果を強めに導入し、それを徐々に弱めることにより、徐々にイジングモデルのエネルギーが小さい状態へと遷移することが想像できる。

式 (1) で表現されるイジングモデルを対象とした量子アニーリングの実装例を以下に示す。

**第一段階** 量子擾乱効果を引き起こすハミルトニアン  $H_d$  を用意する。

**第二段階** 第一段階で用意したハミルトニアン  $H_d$  の基底状態を初期状態とする。

**第三段階**  $H_d$  を徐々に弱めつつ、イジングモデルのハミルトニアン  $H_{\text{Ising}}$  を徐々に強める。

**第四段階** 系全体のハミルトニアンがイジングモデルのハミルトニアン  $H_{\text{Ising}}$  になったら、そのときのスピンの状態を測定し、それを出力とする。

以上によって量子アニーリングは実装される。第一段階において、現存の量子アニーリングマシンでは、横磁場と呼ばれる量子擾乱効果が用いられている。第二段階において初期状態を  $H_d$  の基底状態とすることで、断熱条件を満たすほどにゆっくりと第三段階の過程を経ることができれば確実に基底状態に到達することが知られているが、実際には、量子コヒーレンス時間との兼ね合いから十分ゆっく

\*1 組合せ最適化問題の定義によっては、目的関数を最大にする解を最適解と見なす場合もあるが、その場合には目的関数の全体に負号を施すことによって、最大化問題が最小化問題に変換されるので、以下、最小化問題についての記述とする。

りな過程を経ることができないことに注意が必要である。この方法も確率的な情報処理の一種である。

### 4.3 その他のアルゴリズム

これまで、イジングマシンの代表的な内部アルゴリズムとしてシミュレーテッドアニーリングと量子アニーリングについて説明してきた。他にもイジングマシンの内部アルゴリズムとして知られたものはいくつかあるので、それを紹介する。シミュレーテッドアニーリングとは別の形で温度効果を用いる方法として、レプリカ交換法 [17] に基づく状態更新を行うイジングマシンが開発されている [12]。温度が高いときには自由エネルギー地形が平らであり、一方、温度が低いときには自由エネルギー地形が急峻であることから、温度を切り替えることにより、エネルギーが低い状態を発見するという方法がレプリカ交換法である。また近年、力学系分野における分岐現象を用いた、シミュレーテッド分岐マシンと呼ばれるイジングマシンが開発されている [13]。理論物理学的にも未解明な部分が多いアルゴリズムであり、今後の理論展開が必要となる。

## 5. イジングマシンのソフトウェアに関する研究開発

イジングマシンのソフトウェアに関する研究開発は大きく分けて二つの方向性がある。第一に、イジングマシンのハードウェア制限を解決するアルゴリズムや、イジングマシンのポテンシャルを可能な限り引き出すアルゴリズムの研究開発、第二に、ソフトウェア開発環境の構築に関する研究開発である。

### 5.1 イジングマシンを利用するためのアルゴリズム構築に関する研究開発

3章で説明したように、イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法においては、前処理や後処理を施す必要がある。この前処理や後処理においては様々なアルゴリズム構築の研究開発がなされている。これについて主なものを以下で見ていく。

まず、イジングマシンによる解法の前処理として代表的なものに、大規模問題の小規模化のためのアルゴリズムが挙げられる。解きたい組合せ最適化問題の規模が大きい場合、すなわち、既存のイジングマシンに搭載されているスピンの個数よりも、組合せ最適化問題を表現するイジングモデルのスピンの個数の方が多い場合、一度にイジングマシンに入力することは不可能である。これに対し、D-Wave は qbsolv と呼ばれるライブラリを開発した。これは問題の一部を subQUBO と呼ばれる小規模問題に分割し、それらをイジングマシンで解き、その結果をタブーサーチを用いて局所最適化を行うという仕組みである。解きたい組合せ最適化問題の構造に合わせて qbsolv を工夫した方法は、

論文 [18] で提案されている。

また、イジングマシンによる解法の前処理として代表的なもう一つのものとして、埋め込みアルゴリズムが挙げられる。解きたい組合せ最適化問題を表現するイジングモデルが定義される無向グラフを  $G_L = (V_L, E_L)$  とする（ここで、 $V_L, E_L$  はそれぞれ  $G_L$  における頂点集合、辺集合とする）。また、用いるイジングマシンで直接表現可能なイジングモデルが定義される無向グラフを  $G_P = (V_P, E_P)$  とする（ここで、 $V_P, E_P$  はそれぞれ  $G_P$  における頂点集合、辺集合とする）。埋め込みアルゴリズムについては、量子アニーリングマシンが開発された当初から研究が進められており、minor embedding や clique embedding などと呼ばれる方法が知られている [19–23]。また埋め込みアルゴリズムにおけるハイパーパラメータの調整方法に指針を与える基礎研究として、論文 [24] が挙げられる。

更に、最近提案されたイジングマシンによる解法の前処理として、イジングモデルの係数ビット幅削減アルゴリズムが挙げられる。イジングマシンで表現可能なイジングモデルの局所磁場係数や相互作用係数のビット幅が、解きたい組合せ最適化問題を表現するイジングモデルの局所磁場係数や相互作用係数のビット幅に比べて小さい場合に対応する新しい手法が提案された [25]。

一方、イジングマシンによる解法の後処理として、解釈処理と呼ばれる方法が近年提案されている。イジングマシンは確率的な挙動を示すことから、イジングマシンによって得られた解を直接、組合せ最適化問題の解に逆変換することができない場合がある。特に、制約条件を含む組合せ最適化問題を取り扱う際に、この困難は深刻である。論文 [26, 27] では、スロット配置問題と呼ばれる具体的な問題に対して、解釈処理を適用した例について示されている。

### 5.2 ソフトウェア開発環境の構築に関する研究開発

イジングマシンのユーザー層を広げることを目的とした、ソフトウェア開発環境の構築についての研究開発も盛んに行われている。機械学習分野、量子コンピュータ分野と同様、Open Source Software (OSS) の果たす役割はコミュニティ形成・コミュニティ拡大の観点で重要である。柵橋は PyQUBO と呼ばれる OSS を世界に先駆けて発表している。これはイジングモデルや QUBO を簡単に構築することが可能であるだけでなく、イジングマシンを用いる際のような工夫がしやすい形となっている [6, 28]。また、OpenJij という OSS についても公開されており、イジングマシンシミュレータが充実したものとなっている [29]。また、クラウドサービスとして、Fixstars Amplify と呼ばれるものも最近発表された [14]。イジングマシンによる組合せ最適化問題の解法を試みる場合には、これらを元に開発を進めることが可能になっている。

## 6. イジングマシンのアプリケーション探索に関する研究開発

続いて、イジングマシンを用いた各種アプリケーション探索に関する研究開発状況について見ていく。イジングマシンの応用探索は大きく分けて、組合せ最適化問題、機械学習、物質科学モデルシミュレーションの三つに分類される。以下、それぞれについて見ていく。

### 6.1 組合せ最適化問題

組合せ最適化問題に対するイジングマシンの適用を検討した研究開発は様々な領域にわたって行われている。よく知られた例としては、渋滞回避を念頭に置いた最適化計算 [30] や、その研究に着想を得て、工場内の無人搬送車の最適化計算 [31] 等が挙げられる。また、アドテク分野においては、ポートフォリオ最適化計算 [32] に着想を得た広告配信最適化計算 [6] や、二次割当問題を応用したウェブサイト上の商品配置最適化計算 [18] 等が挙げられる。更に、集積回路設計分野においては、二次割当問題を応用したスロット配置最適化問題等 [26, 27] が挙げられる。これらの例からわかるように、ある組合せ最適化問題やイジングマシンの応用探索のある例を参考に、別の組合せ最適化問題に対する応用探索が進んでいることが見て取れる。また企業内部の実データを用いた取り組みのうち、公開されている代表的なものとしては、物流倉庫内の人員配置最適化等が挙げられる [33]。

### 6.2 機械学習

機械学習におけるイジングマシンの適用は大きく分けて二通りある。第一に、機械学習における学習の加速を目指したもの、第二に、機械学習における推論の加速を目指したものが挙げられる。機械学習における学習の加速を目指す際には、機械学習における損失関数の最小化の部分をイジングマシンを用いて行うという考え方が挙げられる。代表的なものとして、QBoost が挙げられる [34]。QBoost は、機械学習における Boosting アルゴリズムをイジングマシン向けに再構築したものである。一方、機械学習における推論の加速を目指す際には、機械学習におけるモデルとしてイジングモデルや QUBO と同等あるいは類似の形式を導入するという方策が取られる。最近、マテリアルデザインを対象としてデモンストレーションを行われたブラックボックス最適化に対して量子アニーリングを用いる方法として、Factorization Machine by Quantum Annealing (FMQA) なる方法が提案された [35]。

### 6.3 物質科学モデルシミュレーション

イジングモデルはもともと、相転移を記述する最もシンプルな数理モデルの一つであり、物理学の一分野である統

計力学においては、雛形となるモデルの一つとしてよく用いられている [5]。そのため、イジングモデルや類似の数理モデルで表現される物質や現象を、イジングマシンを用いてシミュレーションすることになる。相転移シミュレーションの例として、スピングラスモデルの相転移シミュレーション [36] や、トポロジカル相転移のシミュレーション [37] 等が挙げられる。また、複雑な相互作用を持つ磁性体のシミュレーション [38] や、スピンアイスのシミュレーション結果 [39] についても近年報告がなされている。更に、量子化学計算に関する応用探索の検討も進められつつある [40]。

## 7. 結言

本原稿では、量子アニーリングマシンをはじめとしたイジングマシンの基礎ならびに、ハードウェア開発、ソフトウェア開発、アプリケーション探索に関する研究開発について紹介してきた。イジングマシン分野においてはまだまだ多くの課題が山積しており、物理学、応用数学、情報科学をはじめとした様々な学術分野の協調がイジングマシン分野の発展に必要不可欠である。

**謝辞** 本講演で取り上げる研究開発の一部は、内閣府総合科学技術・イノベーション会議の戦略的イノベーション創造プログラム (SIP)「光・量子を活用した Society5.0 実現化技術」(管理法人: QST) によって実施されました。

## 参考文献

- [1] Johnson, M. W., Amin, M. H., Gildert, S., Lanting, T., Hamze, F., Dickson, N., Harris, R., Berkley, A. J., Johansson, J., Bunyk, P. et al.: Quantum annealing with manufactured spins, *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 194–198 (2011).
- [2] Kadowaki, T. and Nishimori, H.: Quantum annealing in the transverse Ising model, *Physical Review E*, Vol. 58, No. 5, p. 5355 (1998).
- [3] Farhi, E., Goldstone, J., Gutmann, S. and Sipser, M.: Quantum computation by adiabatic evolution, *arXiv preprint quant-ph/0001106* (2000).
- [4] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P.: Optimization by simulated annealing, *science*, Vol. 220, No. 4598, pp. 671–680 (1983).
- [5] Tanaka, S., Tamura, R. and Chakrabarti, B. K.: *Quantum spin glasses, annealing and computation*, Cambridge University Press (2017).
- [6] Tanahashi, K., Takayanagi, S., Motohashi, T. and Tanaka, S.: Application of Ising machines and a software development for Ising machines, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 88, No. 6, p. 061010 (2019).
- [7] Lucas, A.: Ising formulations of many NP problems, *Frontiers in physics*, Vol. 2, p. 5 (2014).
- [8] Yamaoka, M., Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T., Aoki, H. and Mizuno, H.: A 20k-spin Ising chip to solve combinatorial optimization problems with CMOS annealing, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 51, No. 1, pp. 303–309 (2015).
- [9] McMahan, P. L., Marandi, A., Haribara, Y., Hamerly,

- R., Langrock, C., Tamate, S., Inagaki, T., Takesue, H., Utsunomiya, S., Aihara, K. et al.: A fully programmable 100-spin coherent Ising machine with all-to-all connections, *Science*, Vol. 354, No. 6312, pp. 614–617 (2016).
- [10] Inagaki, T., Haribara, Y., Igarashi, K., Sonobe, T., Tamate, S., Honjo, T., Marandi, A., McMahon, P. L., Umeki, T., Enbutsu, K. et al.: A coherent Ising machine for 2000-node optimization problems, *Science*, Vol. 354, No. 6312, pp. 603–606 (2016).
- [11] Okuyama, T., Hayashi, M. and Yamaoka, M.: An Ising computer based on simulated quantum annealing by path integral Monte Carlo method, *2017 IEEE international conference on rebooting computing (ICRC)*, IEEE, pp. 1–6 (2017).
- [12] Aramon, M., Rosenberg, G., Valiante, E., Miyazawa, T., Tamura, H. and Katzgraber, H. G.: Physics-inspired optimization for quadratic unconstrained problems using a digital annealer, *Frontiers in Physics*, Vol. 7, p. 48 (2019).
- [13] Goto, H., Tatsumura, K. and Dixon, A. R.: Combinatorial optimization by simulating adiabatic bifurcations in nonlinear Hamiltonian systems, *Science advances*, Vol. 5, No. 4, p. eaav2372 (2019).
- [14] Fixstars: Fixstars Amplify, Fixstars Corporation (online), available from (<https://amplify.fixstars.com/ja/>) (accessed 2021-07-25).
- [15] Landau, D. and Binder, K.: *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*, Cambridge university press (2021).
- [16] Bilbro, G., Mann, R., Miller, T. K., Snyder, W. E., Van den Bout, D. E. and White, M.: Optimization by mean field annealing, *Advances in neural information processing systems*, pp. 91–98 (1989).
- [17] Hukushima, K. and Nemoto, K.: Exchange Monte Carlo method and application to spin glass simulations, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 65, No. 6, pp. 1604–1608 (1996).
- [18] Nishimura, N., Tanahashi, K., Suganuma, K., Miyama, M. J. and Ohzeki, M.: Item listing optimization for e-commerce websites based on diversity, *frontiers in Computer Science*, Vol. 1, p. 2 (2019).
- [19] Choi, V.: Minor-embedding in adiabatic quantum computation: I. The parameter setting problem, *Quantum Information Processing*, Vol. 7, No. 5, pp. 193–209 (2008).
- [20] Choi, V.: Minor-embedding in adiabatic quantum computation: II. Minor-universal graph design, *Quantum Information Processing*, Vol. 10, No. 3, pp. 343–353 (2011).
- [21] Cai, J., Mcready, W. G. and Roy, A.: A practical heuristic for finding graph minors, *arXiv preprint arXiv:1406.2741* (2014).
- [22] Boothby, T., King, A. D. and Roy, A.: Fast clique minor generation in Chimera qubit connectivity graphs, *Quantum Information Processing*, Vol. 15, No. 1, pp. 495–508 (2016).
- [23] Oku, D., Terada, K., Hayashi, M., Yamaoka, M., Tanaka, S. and Togawa, N.: A fully-connected Ising model embedding method and its evaluation for CMOS annealing machines, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. 102, No. 9, pp. 1696–1706 (2019).
- [24] Shirai, T., Tanaka, S. and Togawa, N.: Guiding principle for minor-embedding in simulated-annealing-based Ising machines, *IEEE Access*, Vol. 8, pp. 210490–210502 (2020).
- [25] Oku, D., Tawada, M., Tanaka, S. and Togawa, N.: How to reduce the bit-width of an Ising model by adding auxiliary spins, *IEEE Transactions on Computers* (2020).
- [26] Kanamaru, S., Oku, D., Tawada, M., Tanaka, S., Hayashi, M., Yamaoka, M., Yanagisawa, M. and Togawa, N.: Efficient Ising model mapping to solving slot placement problem, *2019 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE)*, IEEE, pp. 1–6 (2019).
- [27] Kanamaru, S., Kawamura, K., Tanaka, S., Tomita, Y. and Togawa, N.: Solving constrained slot placement problems using an Ising machine and its evaluations, *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, Vol. 104, No. 2, pp. 226–236 (2021).
- [28] Zaman, M., Tanahashi, K. and Tanaka, S.: PyQUBO: Python Library for QUBO Creation, *IEEE Transactions on Computers* (2021).
- [29] Jij: OpenJij, Jij (online), available from (OpenJij) (accessed 2021-07-25).
- [30] Neukart, F., Compostella, G., Seidel, C., Von Dollen, D., Yarkoni, S. and Parney, B.: Traffic flow optimization using a quantum annealer, *Frontiers in ICT*, Vol. 4, p. 29 (2017).
- [31] Ohzeki, M., Miki, A., Miyama, M. J. and Terabe, M.: Control of automated guided vehicles without collision by quantum annealer and digital devices, *Frontiers in Computer Science*, Vol. 1, p. 9 (2019).
- [32] Rosenberg, G., Haghnegahdar, P., Goddard, P., Carr, P., Wu, K. and De Prado, M. L.: Solving the optimal trading trajectory problem using a quantum annealer, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 10, No. 6, pp. 1053–1060 (2016).
- [33] Fixstars: 次世代アクセラレータ基盤による実証実験, Fixstars Corporation (オンライン), 入手先 (<https://www.youtube.com/watch?v=52UopLRAokk>) (参照 2021-07-25).
- [34] Neven, H., Denchev, V. S., Rose, G. and Mcready, W. G.: Qboost: Large scale classifier training with adiabatic quantum optimization, *Asian Conference on Machine Learning*, PMLR, pp. 333–348 (2012).
- [35] Kitai, K., Guo, J., Ju, S., Tanaka, S., Tsuda, K., Shiomi, J. and Tamura, R.: Designing metamaterials with quantum annealing and factorization machines, *Physical Review Research*, Vol. 2, No. 1, p. 013319 (2020).
- [36] Harris, R., Sato, Y., Berkley, A., Reis, M., Altomare, F., Amin, M., Boothby, K., Bunyk, P., Deng, C., Enderud, C. et al.: Phase transitions in a programmable quantum spin glass simulator, *Science*, Vol. 361, No. 6398, pp. 162–165 (2018).
- [37] King, A. D., Carrasquilla, J., Raymond, J., Ozfidan, I., Andriyash, E., Berkley, A., Reis, M., Lanting, T., Harris, R., Altomare, F. et al.: Observation of topological phenomena in a programmable lattice of 1,800 qubits, *Nature*, Vol. 560, No. 7719, pp. 456–460 (2018).
- [38] Kairys, P., King, A. D., Ozfidan, I., Boothby, K., Raymond, J., Banerjee, A. and Humble, T. S.: Simulating the Shastry-Sutherland Ising Model Using Quantum Annealing, *PRX Quantum*, Vol. 1, No. 2, p. 020320 (2020).
- [39] King, A. D., Nisoli, C., Dahl, E. D., Poulin-Lamarre, G. and Lopez-Bezanilla, A.: Qubit spin ice, *Science* (2021).
- [40] Streif, M., Neukart, F. and Leib, M.: Solving quantum chemistry problems with a d-wave quantum annealer, *International Workshop on Quantum Technology and Optimization Problems*, Springer, pp. 111–122 (2019).