情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用　Vol.14　No.3　85–92 (Aug. 2021)

機械の種類を考慮した調理手順最適化の値範囲とbig-M法を用いた離接制約の比較

石野 ちあき[1,†1,a)]　森本 尚之[2,†2,b)]　山田 俊行[1,c)]

受付日 2020年11月19日，再受付日 2021年2月8日，
採録日 2021年3月21日

概要：給食や病院食など，日々変わる献立で大量の調理をする施設では，時間内に業務をすべて終えるために，効率的な作業計画を立てることが重要である．しかし，現実の調理では様々な要素を考慮しなければならず，最適な作業計画を立てることは困難である．本研究では，調理業務効率化の支援を目標とし，調理手順最適化問題をFJSSPを応用した混合整数線形計画問題として定式化する．開発した数理モデルを利用すれば，専用ソルバーを開発することなく汎用ソルバーで容易に問題を解ける．さらに，制約と決定変数を削減するために，決定変数の値範囲を用いて離接制約を再定式化し，big-M法と比較する．

キーワード：混合整数線形計画問題，フレキシブルジョブショップスケジューリング問題，離散最適化，食品産業

Comparison of Disjunctive Constraints Using Integer Range and big-M Method for Food Preparation Scheduling Considering Machine Type

Chiaki Ishino[1,†1,a)]　Naoyuki Morimoto[2,†2,b)]　Toshiyuki Yamada[1,c)]

Received: November 19, 2020, Revised: February 8, 2021,
Accepted: March 21, 2021

Abstract: In a large food preparing facility that cooks a large amount of food with daily menus, it is important to make an efficient work plan to complete much work in time. However, because there are many factors, it is difficult to optimize food preparation in real situations. In this paper, for supporting the efficiency of work, we formulate a food preparation scheduling problem as a mixed integer linear programming problem by extension of FJSSP. By using the mathematical model, the problem can be easily solved with a general solver. We propose a method to reformulate disjunctive constraints using integer range of decision variables to reduce constraints and decision variables, and compare it with the big-M method.

Keywords: mixed-integer linear programming problem, flexible Job-shop scheduling problem, discrete optimization, food industry

[1] 三重大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Mie University, Tsu, Mie 514–8507, Japan
[2] 三重大学地域人材教育開発機構
Organization for the Development of Higher Education and Regional Human Resources, Mie University, Tsu, Mie 514–8507, Japan
[†1] 現在，ブラザー工業株式会社
Presently with Brother Industries, Ltd.
[†2] 現在，三重大学大学院工学研究科
Presently with Graduate School of Engineering, Mie University
[a)] ishino@cs.info.mie-u.ac.jp
[b)] morimoto@cs.info.mie-u.ac.jp
[c)] toshi@cs.info.mie-u.ac.jp

1. はじめに

学校給食や介護食，病院食のような，日々変わる献立で大量の食事を作る施設では，時間内に調理を終えるために作業の順序や調理者の配置を毎日考える必要がある．特に病院食は，患者個々の身体状態や病状を考慮した食事を提供するため食事の種類が多く，調理業務は複雑になる．しかし，調理施設の設備条件，調理者の数や能力，作業配分による調理者への負担など，考慮すべき要素が多く，効率の良い調理手順を決定するのは困難である．

より効率的な調理業務を支援するために，調理手順最適化の研究がされている．調理手順最適化は，各料理の調理手順を「切る」などの工程に分解し，それらの処理順序を異なる料理間で適切に並べ替えることで，最適な調理手順を探索する問題である [1]．松島ら [6] は，手作り料理を対象とした調理ガイダンスシステムを開発している．Web 上のレシピを入力として，SA（Simulated Annealing）を用いたアルゴリズムで調理手順を最適化し，求めた調理手順を元に調理のガイダンスを行う．食材や調理方法に応じた作業時間の算出，調理者の習熟度に応じたガイダンスなど，実用化に向けた実装がされている．山吹ら [2] は，飲食店を対象とした同時同卓提供のための調理支援システム開発を目指したモデルを提案している．調理に固有の制約を考慮するにはモデル化能力に限界があるとし，単純な SA を用いた手法で実験的評価をしている．

調理のような現実問題の最適化をするには 2 つのアプローチがある．1 つ目は，汎用の数理計画ソルバーを利用する方法である．実問題を数理モデルで表現できれば，専用アルゴリズムを開発することなく汎用ソルバーで容易に問題を解ける．しかし，汎用アルゴリズムでは解ける問題の規模には限界があるうえ，現実の複雑な構造や特性を数学的構造に落とし込むのは難しい．2 つ目は，専用の最適化アルゴリズムを開発する方法である．問題の構造や特性に適したアルゴリズムを開発できれば，大規模で複雑な問題でも効率的に解ける．しかし，効率的なアルゴリズムを開発するには十分な知識と技術が必要なうえ，手間もかかる．

特に，調理手順最適化問題と類似しているジョブショップスケジューリング問題は，NP 困難な問題として知られている．効率的に解くことが困難な実問題を解く場合には，まずは汎用モデルを元に問題を扱い，汎用数理計画ソルバーを用いて検討した後に専用アルゴリズムの開発を検討することで，アルゴリズムの開発，修正に要する手間を削減できる．松島ら [6] は手作り料理を対象として，山吹ら [2] は飲食店を対象としてそれぞれ SA を用いたアルゴリズムを開発しているが，汎用ソルバーで解けるような調理手順最適化問題の数理モデルを開発すれば，専用アルゴリズムを開発する前に容易に問題の検討ができる．

本研究では，病院食のような大量の食事を提供する調理施設の効率的な業務を支援することを目標として，調理手順最適化問題を混合整数線形計画問題（Mixed Integer Linear Programming，MILP）として定式化する．提案モデルを汎用ソルバーで解くことで，総調理時間を最小化した調理スケジュールが求められる．特に，機械の種類を考慮するという特性を big-M 法を用いて数学的に表したモデルを開発する．さらに，制約と決定変数を削減するために，big-M 法を用いた制約を決定変数の値範囲として再定式化したモデルを開発する．

2. 関連問題

2.1 スケジューリング問題

類似した問題としてジョブショップスケジューリング問題（Job Shop Scheduling Problem，JSSP）[3] がある．JSSP は，複数の仕事を限られた機械で処理する場合に，最大完了時刻を最小にする処理スケジュールを決定する問題である．最大完了時刻とは，すべての仕事の処理が完了するスケジュールの長さのことであり，メイクスパンとも呼ぶ．各仕事は順序付けられた工程で構成されており，すべての工程に処理機械と処理時間が与えられている．JSSP には 2 つの制約がある [8]．1 つ目は，仕事の工程処理順序の遵守である．定められた順に機械を使い，途中で機械の使用順序を変更してはならない．2 つ目は，機械による仕事の同時処理の禁止である．機械は，同時に最大で 1 つしか仕事を処理できず，処理の一時的な中断と再開を認めない．JSSP の例を**図 1** に示す．

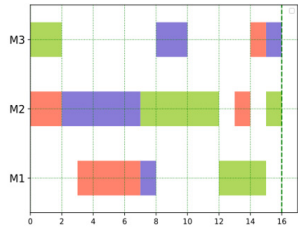
JSSP を拡張し機械の種類を考慮した問題が，FJSSP（Flexible JSSP）である．FJSSP では，「各工程は特定の集合のうちどの機械で処理しても良い」という制約を許す．たとえば，図 1 (a) では仕事 J1 の工程 1 の処理機械が M2 に指定されているが，FJSSP では処理機械を {M1, M2} のように集合で指定し，M1 または M2 のどちらの機械で処理してもよい，とすることができる．つまり，指定された機械の集合を機械の種類と見なせば，FJSSP では機械の種類が考慮されており，処理機械を種類で指定できるといえる．本研究では，仕事に料理の品目を，機械に調理機器や調理人を対応させ，FJSSP を応用して調理手順最適化問題を定式化する．

2.2 big-M 法

複数の制約のうち少なくとも一方の制約が満たされるとき，それらの制約を離接制約と呼ぶ [4]．JSSP の制約の 1 つである工程処理順序の順守や，本研究で扱う複数種類から処理機械を選択する制約は，離接制約で表現される．離接制約を線形制約として定式化するために，本研究では，Manne [5] が開発した big-M 法を用いる．Manne は，非常に大きな正の定数である big-M と，二値変数 y_{jk} を用いて

仕事	使用機械, 処理時間			
	工程 1	工程 2	工程 3	工程 4
J1	M2, 2	M1, 4	M2, 1	M3, 1
J2	M3, 2	M2, 5	M1, 3	M2, 1
J3	M2, 5	M1, 1	M3, 2	M3, 1

(a) 仕事



(b) ガントチャート

図 1　JSP の例
Fig. 1　An example of JSP.

同時処理禁止制約を表している．y_{jk} は，仕事 j が仕事 k より前に処理されるときに 1 を，それ以外の場合に 0 をとる．T はスケジュールを計画する期間，$x_j \in \{0, 1, \cdots T\}$ は仕事 j の開始日，a_j は仕事 j の処理に必要な日数を表す．仕事 j と k が同じ機械を使うとき，式 (1) と式 (2) のように，一方の処理を終えてからでないと他方の処理を開始できないという制約を課す．

$$\text{either} \quad x_j - x_k \geq a_k \tag{1}$$

$$\text{or else} \quad x_k - x_j \geq a_j \tag{2}$$

このとき，式 (1) と式 (2) の 2 つの順序制約が同時に成立することは有り得ない．つまり，いずれか一方の制約のみが成立する離接制約を表している．この制約は，二値変数 y_{jk} を用いて次のように表せる．

$$(T + a_k)y_{jk} + (x_j - x_k) \geq a_k \tag{3}$$

$$(T + a_k)(1 - y_{jk}) + (x_k - x_j) \geq a_j \tag{4}$$

$y_{jk} = 1$ のとき，式 (4) は仕事 j が仕事 k より前に処理される制約を満たし，式 (3) は左辺に非常に大きな値を加えることで，x_j，x_k の値によらず式を成り立たせている．$y_{jk} = 0$ の場合も同様に，二値変数と大きな正の定数 $(T + a_k)$ をかけ合わせることで，相反する順序制約を取り除いている．big-M 法は，離接制約を線形制約として実現するための手法である．

3. 提案手法

3.1 モデルの拡張

並行作業などの工夫を取り入れたより効率的な調理手順を得るために，本研究では，2 種類の並行作業と複数種類から機械を選ぶことを考慮した調理手順最適化を考える．

3.1.1 調理機器による複数工程の並行作業

JSSP では機械による仕事の同時処理禁止が定められているが，本研究では機械による複数工程の同時処理を可能にした調理モデルを提案する．調理の際，同じ機器を用いる工程をまとめて処理する場合がある．たとえば，オーブンやスチームコンベクションのような調理機器は，複数の段にそれぞれ別の食材を入れられるため，温度などの条件が同じ工程であればまとめて調理し，時間差で取り出すことも可能である．具体的には，次のような 2 つの工程はまとめて調理できる．

- ほうれん草を 3 分，かぶを 5 分 100 度でスチーム
- くるみを 10 分，カシューナッツを 7 分 160 度でロースト

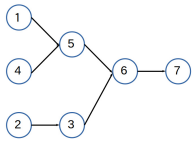
まとめて処理可能な複数の工程を同時処理可能にすることで，より効率的な調理手順が得られる場合がある．

3.1.2 同じ料理内の複数工程の並行作業

料理のレシピは一列に，すなわち全順序で書かれているが，工程処理順序とは関係ない，不要な順序が含まれている場合がある．たとえば，**図 2** (a) のレシピでは，工程 (1), (2) で扱う食材は異なっており，それぞれ別で処理が進められるにもかかわらず，2 つの工程間には順序制約が含まれている．このような不要な制約を除き，各料理の調理手順を有向非巡回グラフ（Directed Acyclic Graph，以下 DAG という）で表す．すると，図 2 (a) のレシピは (b) のように DAG で表せる．各頂点は工程を，各有向辺は順序関係を表す．隣接する頂点は，先行する工程が完了した後でなければもう一方の工程が開始できないことを示す．この DAG による表現は，PERT（Program Evaluation and Review Technique）などで用いられるアローダイアグラムによるプロジェクトのモデル化 [7] と本質的に同じものである．

	いか大根
1	いかを切る
2	大根を切る
3	大根を下茹でする
4	煮汁と生姜を煮立てる
5	いかをさっと煮て取り出す
6	大根を煮る
7	いかを戻して煮る

(a) レシピの例



(b) DAG の例

図 2　レシピと DAG の例
Fig. 2　An example of recipe and DAG.

半順序で表すことで，同じ料理内の調理工程であっても並行作業が可能になることがあるため，より効率的な調理手順が得られる場合がある．

3.1.3 複数種類から処理機械を選ぶ

機械の種類を考慮するとき，仕事によって機械の分類方法が異なる場合がある．たとえば，ある仕事を処理するときはコンロとオーブンを同じ種類の機械として扱っても問題ないが，別の仕事ではコンロとオーブンを区別したい，という場合がある．どの仕事を処理するときも，同じ種類に属する機械の区別はつかないような種類分けをするために，次の手順で機械の種類を考える．

(1) 作業を分類する．
(2) 各作業にとって区別のない機械の集合を考える．
(3) 全作業にとって区別のない最小単位で機械を分類する．
(4) 最小単位をそれぞれ「種類」とし，その和集合から処理機械を選ぶ．

つまり，「複数の種類の機械のうちどれで処理してもよい」という制約が実現できれば，仕事によって使える機械の種類が異なっていても，各仕事に合った処理機械を選べる．これにより，機械を別の仕事で使用中でも代替機械で処理できる可能性があるため，より効率的な調理手順が得られる場合がある．

3.1.4 制約の比較

その他の拡張点も含め，提案モデルの制約と，FJSSP の

表 1　制約の比較
Table 1　Comparison of constraints.

制約	FJSSP	提案モデル
仕事の工程処理順序の遵守	○	○
特定の種類から処理機械が選べる	○	○
特定の複数の種類から処理機械が選べる		○
機械による複数工程の同時処理を許す		○
同じ仕事内の複数工程の並行作業		○
1 つの工程による複数機械の使用		○
機械を使わない工程の存在を許す		○
前後の工程で同じ機械を使うことを許す		○

表 2　記号の説明
Table 2　Explanation of notation.

	J	仕事の集合
	V	工程の集合
$\forall j \in J$	$V_j \subseteq V$	仕事 j の工程の集合
		ただし，$\forall j \in J \quad j \neq j' \quad \Rightarrow$
		$V_j \cap V_{j'} = \emptyset \quad$ かつ $\quad \bigcup_{j \in J} V_j = V$
	$E_\mathrm{o} \subseteq V \times V$	工程間の順序関係
	$M = \{1, 2, \cdots, \lvert M \rvert\}$	機械の集合
	$K = \{1, 2, \cdots, \lvert K \rvert\}$	機械の種類の集合
$\forall k \in K$	$M_k \subseteq M$	種類 k の機械の集合
		ただし，$\forall k, k' \in K \quad k \neq k' \quad \Rightarrow$
		$M_k \cap M_{k'} = \emptyset \quad$ かつ $\quad \bigcup_{k \in K} M_k = M$
$\forall v \in V$	$K_v \subseteq K$	工程 v の処理機械の種類の集合
$\forall v \in V$	$t_v \in \mathbb{Z}_0^+$	工程 v の処理時間
	$E_\mathrm{p} \subseteq V \times V$	工程間の同時処理禁止関係
	$w \in \mathbb{Z}^+$	非常に大きな正の定数
	$T \in \mathbb{Z}^+$	計画期間

制約を比較し，**表 1** に示す．

3.2　定式化

3.2.1　数理モデル

調理手順最適化問題を次の混合整数線形計画問題として定式化する．

記号の説明：

表 2 に記号の説明を示す．$\mathbb{Z}_0^+$ は 0 か正の整数集合，$\mathbb{Z}^+$ は 0 を含まない正の整数集合を表す．

本研究における機械の種類は，3.1.3 項で述べたように機械を最小単位で分類するため，すべての種類は互いに素であり，機械全体の集合の直和分割で表される．さらに，混合整数線形計画法として定式化するために，機械の種類分けを式 (5) のように整数範囲の直和分割で表現する．

$$
\begin{aligned}
&\forall k \in K \\
&M_1 = \{1, 2, \cdots, |M_1|\} \\
&M_2 = \{|M_1| + 1, \cdots, |M_1| + |M_2|\} \\
&\cdots \\
&M_{|K|} = \left\{ \sum_{k=1}^{|K|-1} |M_k| + 1, \cdots, |M| \right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

決定変数：

決定変数を次に示す．C_max はメイクスパン，s_v は工程 v の開始時刻，m_v は工程 v の処理機械を表す．$x_{v,k}$ は複数種類から処理機械を選ぶ制約を big-M 法で表すために用いる二値変数であり，$a_{v,v'}$，$b_{v,v'}$，$c_{v,v'}$，$d_{v,v'}$ は同時処理禁止制約を big-M 法で表すために用いる二値変数である．

$$
\begin{aligned}
&C_\mathrm{max} \in \{0, 1, \cdots, T\} \\
&\forall v \in V \qquad s_v \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\forall v \in V \qquad m_v \in M \\
&\forall v \in V \quad \forall k \in K_v \qquad x_{v,k} \in \{0, 1\} \\
&\forall v \in V \quad \forall v' \in V \\
&a_{v,v'}, \quad b_{v,v'}, \quad c_{v,v'}, \quad d_{v,v'} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

目的関数：

$$
\min \quad C_\mathrm{max} \tag{6}
$$

制約：

$$
\forall v \in V_j \quad C_\mathrm{max} \geq s_v + t_v \tag{7}
$$

$$
\forall (v, v') \in E_\mathrm{o} \quad s_{v'} \geq s_v + t_v \tag{8}
$$

$$
\forall v \in V \quad \sum_{k \in K_v} x_{v,k} = 1 \tag{9}
$$

$$
\forall v \in V \quad \forall k \in K_v
$$

$$
\begin{cases}
m_v \geq \min M_k - w(1 - x_{v,k}) & (10) \\
\max M_k \geq m_v - w(1 - x_{v,k}) & (11)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall j, j' \in J \quad \forall v \in V_j \quad \forall v' \in V_{j'} \\
&K_v \cap K_{v'} = \emptyset \quad \wedge \quad (v, v') \in E_\mathrm{p} \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
a_{v,v'} + b_{v,v'} + c_{v,v'} + d_{v,v'} = 1 & (12) \\
m_v > m_{v'} - w(1 - a_{v,v'}) & (13) \\
m_{v'} > m_v - w(1 - b_{v,v'}) & (14) \\
s_v \geq s_{v'} + t_{v'} - w(1 - c_{v,v'}) & (15) \\
s_{v'} \geq s_v + t_v - w(1 - d_{v,v'}) & (16)
\end{cases}
$$

目的関数と各制約の意味について説明する．式 (6) は，メイクスパンの最小化が目的であることを表す．式 (7) は，メイクスパンがすべての料理の完成時刻のうち最も遅い時刻を表すことを示す．式 (8) は，工程処理順序の遵守を表す．2 つの工程に順序制約があるとき，一方の処理を終えてからでないと，他方の処理を始められないという制約を課す．工程処理順序を DAG で表すことで，同じ料理内の複数工程の並行作業を可能にしている．式 (9) から式 (11) は，複数種類から処理機械を選ぶ制約を表している．式 (12) から式 (16) は，機械による工程の同時処理の禁止を表す．すべての工程のペアのうち，処理機械の種類が互いに素でなく，かつ同時処理禁止関係を持つペアにのみ制約を与える．同時処理禁止関係を表す E_p を前提条件として

制約を追加することで，調理機器による複数工程の並行作業を可能にしている．

3.3　同時処理禁止制約の線形化

式 (12) から式 (16) の同時処理禁止制約について説明する．機械の種類を考慮するとき，処理機械 m_v，$m_{v'}$ を決定変数とすれば，同時処理禁止制約は式 (17) のように書ける．

$$(v,v') \in E_p \quad \wedge \quad m_v = m_{v'} \quad \Rightarrow \\ s_v \geq s_{v'} + t_{v'} \quad \vee \quad s_{v'} \geq s_v + t_v \tag{17}$$

同じ機械を使う 2 つの工程が同時処理不可能であるとき，一方の処理を終えてからでないと他方の処理を始められないという制約を課す．

しかし，式 (17) の同時処理禁止制約は論理和を用いた制約になっているため，混合整数線形計画問題として定式化するために線形制約に変形することを考える．式 (17) の 2 つの不等式の論理和を R と置き，同値変形すると

$$(v,v') \in E_p \quad \wedge \quad m_v = m_{v'} \Rightarrow R \tag{18}$$

$$(v,v') \in E_p \quad \Rightarrow \quad m_v \neq m_{v'} \vee R \tag{19}$$

$$(v,v') \in E_p \quad \Rightarrow \\ m_v > m_{v'} \quad \vee \quad m_{v'} > m_v \quad \vee \\ s_v \geq s_{v'} + t_{v'} \quad \vee \quad s_{v'} \geq s_v + t_v \tag{20}$$

となる．すなわち，式 (20) の 4 つの不等式のうち少なくとも 1 つが成立するということである．これは big-M 法を用いて式 (12) から式 (16) のように表せる．$a_{v,v'}$ または $b_{v,v'}$ のいずれかが 1 であるとき，2 つの工程が異なる機械を使用することを表す．$c_{v,v'} = 1$ のとき，工程 v' が工程 v よりも先に処理されることを表す．$d_{v,v'} = 1$ のとき，工程 v が工程 v' よりも先に処理されることを表す．これらの二値変数に十分大きな正の実数値 w をかけ合わせ，右辺から非常に大きな値を差し引くことにより，成り立たないはずの 3 つの制約式を決定変数の値によらず成り立たせている．

3.4　複数種類から機械を選ぶ制約の big-M 法による表現

本研究で提案するモデルでは, 3.1.3 項で述べたように, 複数種類から処理機械を選べるようにモデルを拡張している．たとえば，工程 v の処理機械の種類の集合が $K_v = \{k_1, k_2\}$ であるとすると，工程 v は種類 k_1 または k_2 の機械で処理できることを表し，$m_v \in M_{k_1} \cup M_{k_2}$ を満たす．複数種類から処理機械を選ぶ制約は式 (21) のように書ける．

$$\forall v \in V \quad \bigvee_{k \in K_v} m_v \in M_k \tag{21}$$

式 (21) は，big-M 法を用いて式 (9) から式 (11) のように表せる．$x_{v,k} = 1$ のとき，工程 v が種類 k の機械で処理されることを表す．

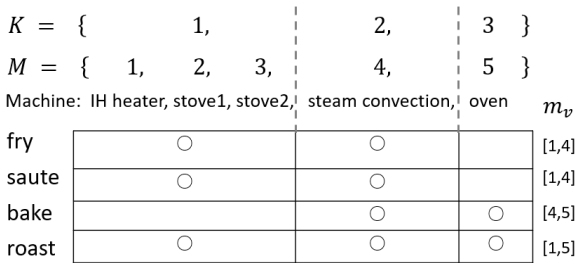


図 3　値範囲の例

Fig. 3　An example of integer range.

表 3　調理方法別の給食センターの調理機器の分類例

Table 3　An example of classification of machines in the school meal facility by food preparation method.

		蒸し器	オーブン	スチコン	コンロ	回転窯	フライヤー
温式加熱	茹でる			○	○	○	
	煮る			○	○	○	
	蒸す	○	○	○	○	○	
乾式加熱	直火焼き				○		
	間接焼き			○	○		
	熱風焼き		○	○			
	炒める			○	○	○	
	揚げる			○	○	○	○

3.5　複数種類から機械を選ぶ制約の値範囲による表現

3.4 節の離接制約を，決定変数の値範囲を用いて表すことで，決定変数と制約を削減する手法を提案する．決定変数 m_v のとり得る値は，式 (21) より，式 (22) のように表せる．

$$\forall v \in V \quad m_v \in \bigcup_{k \in K_v} M_k \tag{22}$$

つまり，K_v のすべての要素が連続した整数になるように機械に整数値を割り当てられる場合，決定変数 m_v の値範囲は連続した整数範囲に変換できる．たとえば，**図 3** で工程「fry」の処理機械の種類の集合は $K_{\text{fry}} = \{1, 2\}$ であるので，処理機械の値範囲は $m_{\text{fry}} = \{1, 2, 3, 4\}$ となる．

特に大規模な調理施設の場合，複数の機能を持つ万能調理機器を導入することが多く，値範囲に変換できる場合が多い．例として，加熱調理を 8 つの作業に分類し，十河ら [10] が示す加熱調理方法別ガス調理機器の分類表を用いて業務用調理機器を分類したものを**表 3** に示す．スチームコンベクションオーブンや回転窯のように複数の調理方法が可能な機械が多い場合，整数値の割当てを柔軟に変更できるため，値範囲に変換できる場合が多い．

3.4 節での離接制約は，式 (9) から式 (11) で表されるように，1 つの決定変数 m_v に対して $2|K_v| + 1$ 個の制約と $2|K_v|$ 個の決定変数が必要であった．一方，値範囲で表現した場合は，これらの制約と決定変数は不要となる．このように，二値変数を用いた制約ではなく決定変数の値範囲として離接制約を表す方法は，制約プログラミング（Constraint Programming，CP）におけるドメイン変数の機能と同様である．ドメイン変数はある集合の要素をとりうる変数 [11] であり，いい換えれば $x \in [a, b] \cup \cdots \cup [c, d]$

のように複数範囲の和集合の要素をとりうる変数である．本手法は複数範囲が隣接するように整数値を割り当てることでドメイン変数の機能を実現している．

4. 実験

本研究で提案した制約によって得られるスケジュールの妥当性を評価するために計算機実験を行う．モデラー PuLP [12] を用いてモデルを作成し，汎用ソルバー SCIP [13] に与え問題を解く．Web 上のレシピ [14] から 36 種類の料理のデータを準備し，その中からランダムにいくつかの料理を選択することで献立，すなわち問題を作成する．評価するモデルは，複数種類から機械を選ぶ制約を big-M 法で定式化したモデルと，値範囲で定式化したモデルの 2 種類である．仕事数（料理数）が 4，6，8，10，12 の 5 段階の規模の問題を用意し，各問題規模ごとに 20 種類の問題を制限時間 3,600 秒で解く．機械は，レシピ内で用いている機械の合計 5 種 8 台とする．評価指標は，制限時間内に解けた問題数，big-M 法モデルと比べた値範囲モデルの計算時間の増加割合，制約数，決定変数の数，二値変数の数，整数変数の数である．

4.1 big-M の値の設定

big-M 法は，大きな値を用いることで線形緩和が悪くなり，計算時間が増加するといわれている [9]．そのため，実験ではできる限り小さく，かつ十分な大きさの big-M を用いる必要がある．big-M の値の設定について説明する．

4.1.1 同時処理禁止制約の場合

たとえば，式 (13) では，$m_v < m_{v'}$ であるときに式 (13) を満たすように w の値を設定しなければならない．すなわち，式 (13) において大きな正の整数 w が満たすべき条件は，

$$\begin{aligned} m_v &> m_{v'} - w \\ w &> m_{v'} - m_v \end{aligned} \tag{23}$$

である．$m_{v'}, m_v \in M$ と $M = \{1, 2, \cdots, |M|\}$ より，$|M| > |m_{v'} - m_v|$ であるので，$|M|$ は w として用いるのに十分大きな値である．式 (14) も同様である．

式 (15) では，$s_v \leq s_{v'} + t_{v'}$ であるときに，式 (15) を満たすように w の値を設定しなければならない．すなわち，式 (15) において w が満たすべき条件は，

$$\begin{aligned} s_v &\geq s_{v'} + t_{v'} - w \\ w &\geq s_{v'} - s_v + t_{v'} \end{aligned} \tag{24}$$

である．ここで，変数 s_v の上限を定めるために，計画期間 T を考える．計画期間は，スケジュールを計画する期間を表す．本研究では，目的関数がメイクスパンの最小化であることと，機械を使わない工程を許していることから，最大計画期間は単純に全工程の処理時間の総和で考えられる．

$$T = \sum_{v \in V} t_v \tag{25}$$

計画期間 T を式 (25) のように定めると，s_v の範囲は

$$\forall v \in V \qquad s_v \in \{1, 2, \cdots, T\} \tag{26}$$

と制限できる．よって，$T \geq |s_{v'} - s_v|$ であるので，$T + t_{v'}$ が w として用いるのに十分大きな値だと分かる．式 (16) も同様である．

4.1.2 複数種類から機械を選ぶ制約の場合

式 (10) では，$m_v \leq \min M_k$ であるときに，式 (10) を満たすように w の値を設定しなければならない．すなわち，w が満たすべき条件は

$$\begin{aligned} m_v &\geq \min M_k - w \\ w &\geq \min M_k - m_v \end{aligned} \tag{27}$$

である．$m_v \in M$, $M_k \subseteq M$ と $M = \{1, 2, \cdots, |M|\}$ より，$|M| > |\min M_k - m_v|$ であるので，$|M|$ は w として用いるのに十分大きな値だと分かる．式 (11) も同様である．

4.2 実験結果

表 4 に時間内に解けた問題数を示す．**表 5** に決定変数と制約の数を示す．**図 4** に仕事数 4 の場合に big-M モデルと比較した値範囲モデルの計算時間の増加割合を示す．同様に，**図 5** 仕事数 6 の場合，**図 6** に仕事数 8 の場合，**図 7** に仕事数 10 の場合，**図 8** に仕事数 12 の場合を示す．表 7 に制限時間内に解けなかった問題の 2 つのモデルから得られた暫定解のギャップの比較を示す．表中の $gap_{\text{int-range}}$ は値範囲のモデルから得られた暫定解のギャップを表し，$gap_{\text{big-M}}$ は big-M 法のモデルから得られた暫定解のギャップを表す．ソルバー SCIP における相対ギャップの定義は，双対問題の最適値を *dual*，主問題の実行可能解の目的関数

表 4　時間内に解けた問題数
Table 4　The number of problems solved in time.

仕事数	big-M	値範囲
4	20	20
6	17	17
8	11	12
10	7	7
12	3	2

表 5　決定変数と制約の平均数
Table 5　Average number of decision variables and constraints.

仕事数	決定変数		二値変数		整数変数		制約	
	big-M	値範囲	big-M	値範囲	big-M	値範囲	big-M	値範囲
4	704	655	643	594	61	61	1,716	1,621
6	1,536	1,464	1,448	1,376	88	88	3,787	3,643
8	2,775	2,676	2,653	2,554	122	122	6,819	6,620
10	4,289	4,166	4,138	4,016	150	150	10,513	10,268
12	5,784	5,640	5,605	5,461	179	179	14,067	13,780

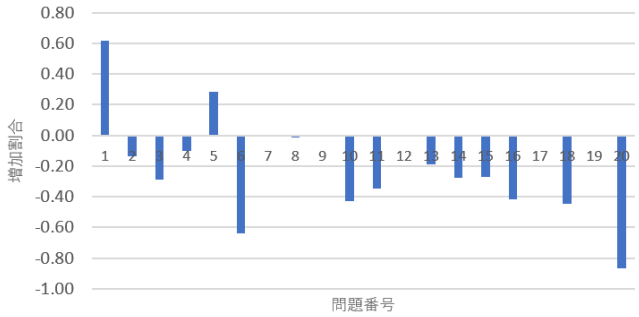


図 4　計算時間の増加割合（仕事数 4 の場合）
Fig. 4　Increase rate of calculation time (for 4 jobs).

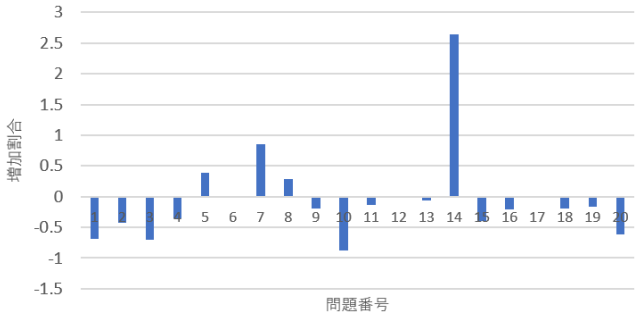


図 5　計算時間の増加割合（仕事数 6 の場合）
Fig. 5　Increase rate of calculation time (for 6 jobs).

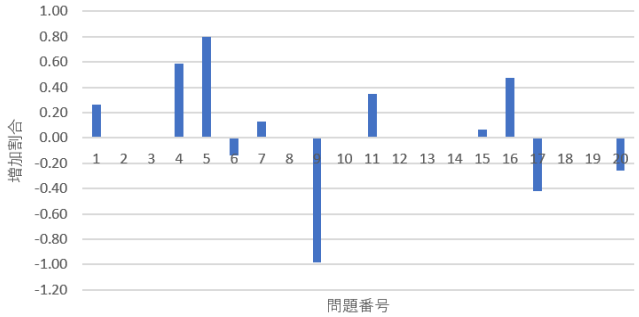


図 6　計算時間の増加割合（仕事数 8 の場合）
Fig. 6　Increase rate of calculation time (for 8 jobs).

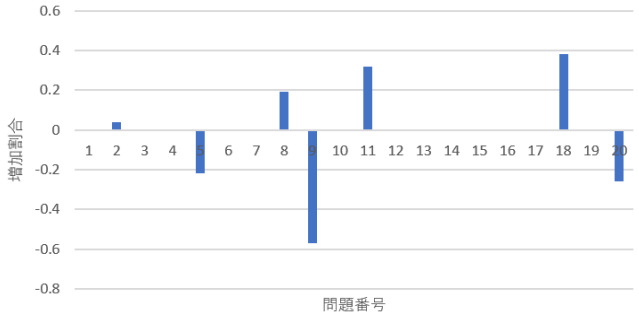


図 7　計算時間の増加割合（仕事数 10 の場合）
Fig. 7　Increase rate of calculation time (for 10 jobs).

値を *primal* とすると，式 (28) のように表される [13].

$$relative\ gap = \frac{|primal - dual|}{\min(|dual|, |primal|)} \tag{28}$$

したがって相対ギャップとは，暫定解の目的関数値と最適値のギャップの上界を示している．

big-M 法のモデルに比べ，値範囲のモデルは制約数と決定変数の数がたしかに削減できていることが分かる．仕事数 4，6 の規模の小さい問題では，値範囲のモデルのほうが計算時間を削減できているが，仕事数 8 以上になると，値範囲のモデルのほうが計算時間が増加した問題が多かった．これは，問題の規模が大きくなるにつれ，値範囲により削減できる二値変数の割合が減少したためではないかと考える．**表 6** に制約ごとの二値変数の割合を示す．問題の規模の拡大に対して，式 (10) から式 (11) の複数種類から処理機械を選ぶ制約よりも，式 (13) から式 (16) の同時処理禁止制約に含まれる二値変数のほうが，二値変数の増加率が大きい．仕事数が 8 以上になると，削減できた二値変数の割合は二値変数全体の 5%を下回っており，計算時間削減の効果は小さくなったと考えられる．一方，時間内に解けた問題数は問題の規模によらず大差はなく，仕事数 12 の規模では全体の 1 割程度の問題が解けた．**表 7** より時間内に解けなかった問題の暫定解の精度を 2 つのモデル間で比較すると，ほとんどの問題で差は現れなかったが，仕事数 8 以下の問題では値範囲のモデルで得られた解のほうがギャップの上界が小さく，仕事数 12 になると big-M 法

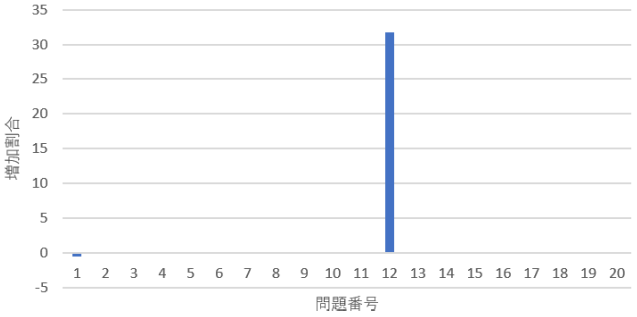


図 8　計算時間の増加割合（仕事数 12 の場合）
Fig. 8　Increase rate of calculation time (for 12 jobs).

表 6　制約ごとの二値変数の割合
Table 6　Rate of binary variables per constraint.

仕事数	二値変数の平均数	式 (13)–(16)	割合	式 (10)–(11)	割合
4	643	594	92.4%	49	7.6%
6	1,448	1,376	95.0%	72	5.0%
8	2,653	2,554	96.3%	99	3.7%
10	4,138	4,016	97.1%	122	2.9%
12	5,605	5,461	97.4%	144	2.6%

表 7　2 つのモデルから得られた暫定解のギャップの比較
Table 7　Comparison in feasible solution gaps obtained from the two models.

	仕事数				
	4	6	8	10	12
時間内に解けなかった問題数	0	3	9	13	18
$gap_{\text{int-range}} = gap_{\text{big-M}}$ の問題数	-	2	6	9	15
$gap_{\text{int-range}} < gap_{\text{big-M}}$ の問題数	-	1	3	2	1
$gap_{\text{int-range}} > gap_{\text{big-M}}$ の問題数	-	0	0	2	2
$gap_{\text{int-range}} - gap_{\text{big-M}}$ の最大値 [%]	-	0.00	0.00	7.58	3.56
$gap_{\text{int-range}} - gap_{\text{big-M}}$ の最小値 [%]	-	−3.02	−11.11	−6.70	−2.41
$gap_{\text{int-range}} - gap_{\text{big-M}}$ の平均値 [%]	-	−1.00	−2.13	−0.14	1.30

のモデルで得られた解のほうがギャップの上界が小さい傾向が見られた．

5. 結論

機械の種類を考慮した調理手順最適化問題を，FJSSP を応用することで混合整数線形計画問題として定式化した．さらに，決定変数の値範囲を用いて離接制約を再定式化することにより，制約と決定変数を削減したモデルを提案した．開発した数理モデルは汎用ソルバーで容易に解くことができる．小さな規模の問題に対しては値範囲を用いて再定式化したモデルのほうが高速に解ける場合が多く，仕事数が 8 以上の問題では big-M 法を用いたモデルのほうが高速に解ける場合が多いことを示した．

しかし，big-M 法は大きな値を用いるため，多用すると計算時間が増加することが知られている [9]．より大規模な問題を解く場合には，Günlük ら [15] が提案する Perspective Reformulation など，big-M 法の代替手法が必要となる可能性がある [16]．

今後，提案手法により現実の調理手順最適化問題に対して有用な解を得られるのか，実データを用いて検証する必要がある．提案したモデルには，調理者の負担度合の評価など追加で考慮すべき要素があり，モデルを改善の余地がある．モデルを拡張することで，より現実に適した有用な解が得られる可能性がある．また，3.5 節の複数種類から機械を選ぶ制約を決定変数の値範囲として表現できない場合，変換できない制約のみ 3.4 節の big-M 法で表すことで定式化できるが，できるだけ多くの制約を決定変数の値範囲へ変換できるように機械へ整数を割り当てることが求められる．本研究では設備が固定された調理場における調理手順最適化を考えているが，特に調理設備が頻繁に変更されるような場合は，機械へ整数を割り当てる方法に考察の余地がある．割当て方法の改善は今後の課題である．

参考文献

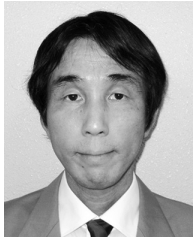
[1] 松島由紀子，舩曳信生，中西　透：多種料理の調理順最適化アルゴリズムの提案，情報処理学会研究報告，Vol.2009-MPS-76, No.13, pp.1–6 (2009).
[2] 山吹卓矢，小野典彦，永田裕一：同卓スケジューリング問題のモデル化と動的スケジューリング，計測自動制御学会論文集，Vol.54, No.3, pp.346–356 (2018).
[3] Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (1990).
[4] 梅谷俊治：組合せ最適化入門：線形計画から整数計画まで，自然言語処理，Vol.21, No.5, pp.1059–1090 (2014).
[5] Manne, S.A.: On the Job Shop Scheduling Problem, Operations Research, Vol.8, No.2, pp.219–223 (1960).
[6] 松島由紀子：手作り料理の調理手順の最適化に関する研究，岡山大学博士論文 (2015).
[7] Malcolm, D.G., Roseboom, J.H., Clark, C.E. and Fazar, W.: Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, *Operations Research*, Vol.7, No.5, pp.646–669 (1959).
[8] 樋野　励：ジョブショップスケジューリング問題の数理表現，システム/制御/情報，Vol.61, No.1, pp.14–19 (2017).
[9] 宮代隆平，松井知己：ここまで解ける整数計画，システム/制御/情報，Vol.50, No.9, pp.363–368 (2006).
[10] 十河桜子，相墨　智，伊藤あすか，西川向一：ガス調理機器の燃焼およびその周辺技術，日本燃焼学会誌，Vol.52, No.162, pp.267–274 (2010).
[11] Apt, K.R.: *Principles of Constraint Programming*, Cambridge University Press (2003).
[12] COIN-OR, PuLP, available from ⟨https://pypi.org/project/PuLP/⟩ (accessed 2020-11-10).
[13] Zuse Institute Berlin (ZIB): SCIP (Solving Constraint Integer Programs), available from ⟨https://www.scipopt.org/⟩ (accessed 2020-11-10).
[14] キッコーマン株式会社：ホームクッキング，入手先 ⟨https://www.kikkoman.co.jp/homecook/⟩（参照 2019-02-08）．
[15] Günlük, O. and Linderoth, J.: Perspective Reformulations of Mixed Integer Nonlinear Programs with Indicator Variables, Mathematical Programming, Series B, Vol.124, pp.183–205 (2010).
[16] 宮代隆平：整数計画法メモ，入手先 ⟨http://web.tuat.ac.jp/~miya/ipmemo.html⟩（参照 2020-11-19）．

石野 ちあき　（学生会員）

1996 年生．2021 年三重大学大学院工学研究科博士前期課程修了．2021 年よりブラザー工業株式会社社員．

森本 尚之　（正会員）

1982 年生．2011 年京都大学大学院情報学研究科博士後期課程研究指導認定退学．博士（情報学）．三重大学総合情報処理センター助教等を経て，2021 年 4 月より同大学大学院工学研究科准教授．組合せ最適化アルゴリズムや情報リテラシー教育に関する研究に従事．電子情報通信学会，日本教育工学会各会員．



山田 俊行　（正会員）

1972 年生．1999 年筑波大学大学院博士課程工学研究科電子・情報工学専攻修了．博士（工学）．1999 年筑波大学電子・情報工学系助手等を経て，2005 年より三重大学大学院工学研究科講師．計算論理，組合せ最適化，ソフトウェアの解析と検証の研究に従事．情報処理学会，日本ソフトウェア科学会各会員．