Bell不等式プロジェクト

今井 浩[1,a)] 張 亨碩[1]

概要：ノイズ・操作エラー有で数十量子ビットまでの量子コンピュータがクラウドを介して色々と利用できるようになってきた。このような状況で、量子コンピュータのベンチマーキングを研究する意義が高まっており、将来も有効な評価法を構築できるとよい。著者らのグループでは、Bell 不等式の破れを浅層回路の量子コンピュータ実機で計算し、誤差緩和する研究を開始している。その 1 つの動機に、この問題が量子コンピュータのベンチマークで有用であろうと予想していることがある。本稿では、Bell 不等式の破れの研究で様々な異なる性質をもつ Bell 不等式が見いだされたことをまとめ、また GHZ 状態についての計算結果も示して、Bell 不等式計算のベンチマークとしての有用性を議論する。

1. 量子コンピュータのベンチマーキング

異なるタイプ・企業からの量子コンピュータクラウド利用サービスも開始されており、若干年数前から注目されている量子コンピュータのベンチマーキングの重要さが認識されていると理解している。単に qubit 数だけで評価するとか、あるいは量子ボリューム (Quantum Volume; QV) の数値だけで評価するだけでは、量子コンピュータのベンチマーキングをすることにはならない。現代のスパコンでも多様な機能に着目したベンチマーキングが実施されている以上に、量子コンピュータの開発レベルが現在研究開発からユーザのクラウド利用が始まった段階であり、種々のタイプ・種々のデバイスがあることから、より多面的な観点からの取り組みが必要である。

ベンチマーキングとは異なるが、国際標準化の活動の中で、すでに ISO/IEC JTC1/WG14 Quantum Computingga 2020 年に設置され、new work item proposal NP 4879, Quantum computing —- Terminology and vocabulary を作成中である。情報処理学会情報規格調査会でもこの活動に取り組んでいると聞いている。情報処理学会量子ソフトウェア研究会では、量子ソフトウェアの研究推進を行っているところで、その中でベンチマーキングもこれからのテーマになっていくと思われる。IEEE は標準化活動も盛んであり、ベンチマーキングでも 2019 年の Google からの量子超越性に関する論文発表があった後に、IEEE Workshop on Benchmarking Quantum Compuational Devices and Systems を開催している ([21] 参照)。

最近では Cornelissen, Bausch, Gilyén [14] によるスケーラブルなベンチマーキングに関する論文が出ている。そこでは 1 テーマとして、Bell のオリジナルの不等式の破れについて、3 つのベンダーの量子コンピュータで実験した結果が報告されている。Bell 不等式の計算においては CHSH 不等式が用いられることが多いが、量子コンピュータがあればかつては実験困難として埋もれてしまった感がある Bell の大本の不等式の計算も容易に実現できるようになっている。このことは、量子コンピュータでパルス制御言語を用いた計算等で物理実験ができるという主張に対して、物理の研究者から若干疑問を呈されたりすることとは逆で、汎用の量子コンピュータの力を認識できる事例である。

現在の量子コンピュータがノイズあり・操作エラー等ありの段階 (よく使われる略語では NISQ) であるため、理論としては誤り度合いに応じた Bell 不等式の各項への影響がしっかり解析されるべきともいえ、実際にこの Bell のオリジナルな不等式ではそのような解析結果 [26] も与えられており、量子コンピュータを用いて量子力学・量子情報処理の理解をさらに進められる方向であり、またそれが量子コンピュータのベンチマーキングにつながると思われる。

以上の観点から、種々の Bell 不等式について、著者らがこれまで進めてきた Bell 不等式の量子コンピュータでの計算・実験も含めて、ベンチマーク問題として精度やスケーラビリティの観点から、議論していきたい。

2. Bell の思考実験と一連の Bell 不等式

量子力学のみならず量子情報処理の分野で、Bell 不等式は様々な場面で現れる。Bell の思考実験のモデルをベースとして展開の幅広さには驚かされるものがある。1935 年の Einstein, Podolsky, Rosen の論文と、それに対する Bohr

[1] 東京大学情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻
[a)] imai@is.s.u-tokyo.ac.jp

の論文で議論された量子力学の完備性が議論され、それに対して 1964 年に Bell [8] が古典確率では必ず成立する不等式で、量子力学のとある設定で成立しないものを提示した。なお、Bell が示した不等式は確率論理で知られていた Boole-Fréchet 不等式であり、とあるアフィン変換をすると距離の 3 角不等式に対応するもの ([15] 参照) である。Bell の研究の素晴らしさは、量子力学設定で不等式の破れが生じることを量子力学の観点からの思考実験を行って明らかにしたことである。

Bell 不等式が Bell により 1964 年に発表されて以来、物理の観点から、実験により不等式の破れが実証できるかという研究取り組みが行われた。Clauser, Horne, Shimony, Holt [10] は、当時の実験技術で Bell による不等式の実現が難しいことに着目して、実現が容易になるようモデルでその不等式を拡張した CHSH 不等式を発表した。CHSH 不等式は、Bell の不等式がもたない 2 部システム (bipartite system) をベースとしており、これにより後述の 2 証明者対話証明と Bell 不等式の関係が成立するようになる。実験試行での貢献のみならず、計算量理論での計算モデルとも整合性がよくなっている。

現在、広く Bell 不等式と呼ばれているものは、CHSH 不等式のことを言っている場合がある。CHSH 不等式の一部著者ら [11] も、Bell の不等式から発展した不等式全体を Bell 不等式と呼んでいる。この CHSH 不等式を軸に実験研究が進められ、CHSH 不等式では量子システムについて

- 2 つの部分システムが各々 2 個の測定をもっているところを、それぞれが m_A, m_B 個の測定を持っている場合への拡張、
- CHSH 不等式では測定結果が 2 値であったところ場合を、k_A, k_B 値の測定結果をもっている場合への拡張

さらに、

- 量子システムが 2 つの部分システムからなる部分を、n 個の部分システムへ拡張
- 元々の量子システムを qubit と限らず、qudit の d-level state さらには無限次元に拡張 ($d = 2$ が qubit, $d = 3$ が qutrit に対応)

がある。

CHSH 不等式の次に簡明なものは Froissart により 1981 年に提案され、Pitowsky, Svozil [31]、さらに Collins, Gisin [13] により系統的に一般化される中で再発見された I_{3322} と現在呼ばれている不等式である。これらの不等式だけでも量子情報の面でかなり異なる振る舞いをする。上記の 4 点の内、最初の 2 点に関しては I_{3322} で $m_A = m_B = 3$ の場合が調べられており、さらなる拡張も凸多面体を考えることで展開されている。著者らの研究グループでは、Avis, Ito, Imai, Sasaki らの成果 [4], [5], [6], [23] もある。

さらにその方向で、計算量理論の研究の中で 1980 年代中頃から展開されてきた対話証明での 2 証明者対話証明系で、2 証明者が量子エンタングル状態をもち、各証明者が k 種の測定をもっている問題が Bell 不等式と直結していることが示された (Cleve, Hoyer, Toner, Watrous [12])。そのさらなる一般化で、量子システムの次元に制約を置かない場合で、2020 年に計算量理論における大きな成果で MIP*＝RE が Ji, Natarajan, Vidick, Wright, Yuen [25] により示されている。

スケーラビリティの観点からは、部分システム数 n を増やす方向は、Mermin [27] ([18] も参照) により、$n \geq 3$ の最大エンタングル状態に対する Bell 不等式が議論されている。そこでは測定が n に関して指数回数必要になる。最大エンタングル状態に対してではなく、測定型量子計算等で重要な量子グラフ状態に対する Bell 不等式も提案されている。初期のものは測定が指数回数になっていたが、近年では n の線形回数の測定となるスケーラブルな Bell 不等式も提案されている。これらは、量子状態を固定して考えているもので、その点で特殊な Bell 不等式である。

Bell 不等式は、量子情報システムにおいて、量子暗号における device-independent 性の確立 [2] や、self-testing [32] などに用いられている.

3. 2 部分システムの Bell 不等式に関する考察

以降、測定についてはオブザーバブルで考え、2 部分システムでの 2 値測定の場合、測定の値は ± 1 の場合に着目する。

3.1 Bell の不等式

Bell の大本の不等式では、2 部分システムでの 2qubit の最大エンタングル状態を基本考える。ただ、以降の CHSH 不等式とは違い、オブザーバブルは 3 つで A, B, C があり、それらはどちらの部分システムにも適用できる。そのとき、最大エンタングル状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ に対して、

Bell の不等式: $\langle AB\rangle - \langle AC\rangle - \langle BC\rangle \leq 1$

量子での上限: $3/2$

で与えられる (A, B, C に関する対称性を勘案)。この不当式は、3 点の完全グラフのカット多面体の非自明なファセット定義式である (ただし、カット多面体を特性ベクトルで $0, 1$ の場合から $+1, -1$ に変換した場合)。既に書いたように、基本的にこれは Boole-Fréche 不等式に対応する (この周辺のことは [15] が詳しい)。

3.2 CHSH 不等式

CHSH 不等式では 2qubit をそれぞれ Alice, Bob と呼ぶとして、Alice の 1qubit に A_1, A_2 というオブザーバブル、Bob の 1qubit に B_1, B_2 というオブザーバブルで測定値が ± 1 が測定値をとり、を行うものとなっており、

CHSH 不等式: $\langle A_1B_1\rangle + \langle A_1B_2\rangle + \langle A_2B_1\rangle - \langle A_2B_2\rangle \leq 2$

量子での右辺上限: $2\sqrt{2}$

で与えられる。これは、完全２部グラフ $K_{2,2}$ のカット多面体の非自明なファセット定義不等式である。$2\sqrt{2}$ の上限は Tirelson の上限から得られ、それは量子システムが 2qubit の最も簡単な場合で達成される。

CHSH 不等式の破れを量子コンピュータで計算することは、量子コンピュータを使い始める際の入門問題としてよく使われる。今後も基本としてよく用いられていくと思われるが、一方でベンチマーキングという点では Bell の大本の不等式とともに、エラー解析を不等式に反映するといったことも必要と思われる。

CHSH 不等式は Alice, Bob とよく呼称される 2 部分システムから構成される２部システムで、それぞれに独自のオブザーバブルが設定されて、そのことで２証明者１ラウンド対話証明系と対応をする。この対応は Cleve, Hoyer, Toner, Watrous [12] によって量子非局所性ゲームの議論を通して示されている。対話証明系は、1985 年にモデルが提示されて以来、計算量理論の中心テーマの１つとなっている。そこから、対話証明系とそれ以前の計算量クラスとの対応が解明され、初期の有名な結果は１証明者で多項式ラウンド数の対話証明で解けるクラス IP が、多項式領域計算量クラス PSPACE と等価である, IP=PSPACE, ことが 1990 年に示されている。そのすぐあとに、多証明者の場合のクラス MIP が、非決定性指数時間計算量クラスの NEXP と等価である、MIP=NEXP, が示され、その後の研究で MIP で１ラウンド質問に限った場合も NEXP に等しいことが示されているいる。古典計算量理論を量子計算の場合に展開して、量子２証明者１ラウンド対話証明が考えられる中、CHSH 不等式は最も簡単な具体例となっている。また、Unique Games Conjecture でいうところの Unique Game にもなっている。計算量理論に関しては [3] 参照。

そのような中、量子 2 証明者 1 ラウンド対話証明系でエンタングルメントに制約をおかない計算量クラス MIP* が、決定不能な問題を含む計算量クラス RE に等価である、MIP*=RE, の成果が得られている [25]。この結果に至るまでの量子計算量理論での研究は、Bell 不等式、特に CHSH 不等式以降の研究と関係しており、Bell 不等式の量子計算分野での重要な役割を理解できる。

以下、CHSH 不等式からその次に一見簡単な不等式を説明する。

3.3 I_{3322} 不等式

Bell 不等式は、古典の確率相関に関する相関多面体 (Correlation Polytope; 別名 Biquadratic Polytope で QUBO と関連) のファセット定義式であるということが認識され、凸多面体計算ソフトウェアの充実を受けて、コンピュータを使って CHSH 不等式の次の Bell 不等式を求める研究が展開される中、CHSH 不等式のまさしく次に簡明な Bell 不等式の I_{3322} 不等式が見つかった (Pitowsky, Svozil [31], Collins, Gisin [13])。実は、そのような凸多面体解析より前に、Froissart [17] が見出していたことは興味深い (当時は Bell 不等式の実験が種々試みられてたかからもしれない)。

凸多面体アプローチにより、Collins, Gisin はこの不等式を系統的に調べ、一般化もしている。

I_{3322} **不等式**:
$$-\langle A_1\rangle-\langle A_2\rangle+\langle B_1\rangle+\langle B_2\rangle+\langle A_1B_1\rangle+\langle A_1B_2\rangle+\langle A_1B_3\rangle+\langle A_2B_1\rangle+\langle A_2B_2\rangle-\langle A_2B_3\rangle+\langle A_3B_1\rangle-\langle A_3B_2\rangle\leq 4$$
量子の場合のこの I_{3322} 不等式の振る舞いは、これまでの Bell の大本の不等式、CHSH 不等式とは違った様相をみせる。まず、Ito [22] の博士論文では、2qubit 量子状態の場合、量子の上限は 5 となることを、多項式計画 (Polynomial Optimization) の第 2 レベルの問題を数値的に解いて示している。また、2qubit でなく、2qutrit の最大エンタングル状態
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle)$$
を用いた場合に I_{3322} のさらに先の Bell 不等式が CHSH 不等式より始めてより強力な性質を見せることから、2qubit を越えて一般の d 次元状態 2 つからなる量子システムでの上界が課題となっていた。そうしたところ、Vidick, Wehner [36] は Ito の結果を拡張して、任意の $2d$-level state での I_{3322} 不等式の上限が上記 5 を超えないことを示している。Pál, Vértesi [30] は、量子の最大破れが無限次元で達成されるであろうことを議論し、またその場合に最大エンタングル状態でない量子状態で破れが生じることを示している。

この 5 を超える破れに関するこれまでの研究では、すべて correlation polytope のファセット定義式の右辺で調べられている。その場合で書くと、I_{3322} 不等式は、古典では右辺は 0 のところを、2qubit の最大エンタングル状態で 0.25 の最大値をとる (一般の次元の最大エンタングル状態でも同様)。一方で、[28]) の方法で得られる上界値 0.250875389 に対して、最大エンタングル状態でない量子状態でその次元を上げていくと、その上界に近い破れが得られることを [30] は示している。さらにその論文では、以下のより複雑な Bell 不等式の中にも同様の挙動をするものがあることを示している。

以上のことから、CHSH 不等式の次に簡単な I_{3322} 不等式は、最大破れが最大エンタングル状態でない状態で達成され、その際に最大エンタングル状態での破れとの差が小さいが明確にある場合として、非常に特徴的なものとなっている。この 1 ステップ複雑になるだけで、量子状態特有の無限次元まで対象とするところに踏み込むことが必然であるということは、Bell 不等式が量子力学特有の難しさを本質的にもっており、またこの方向で $MIP^*=RE$ のような結果に至ることの一端をうかがい知ることになっているのかもしれない。

本稿の量子コンピュータのベンチマーキングの観点に戻

ると、実は I_{3322} 不等式は Bell の大本の不等式、CHSH 不等式の次の 3 番目に簡単な不等式であるが、現時点の量子コンピュータで計算対象とするには、

- 2 つの d 次元量子状態を部分システムとする系で、$d \geq 3$ の場合を扱うことが必要になる
  – 参考までに、現在の量子コンピュータで qutrit 状態を扱った論文として [29] がある。一般の d-level state の扱いを調べる方法の確立も必要かもしれない。
- それを扱えたとしても現時点のノイズ・エラー等ありの量子コンピュータで扱うのは難しい

となり、複雑な Bell 不等式を用いて、その複雑さからより情報が得られることを期待するのは、不等式によっては難しさが極端に異なることに注意が必要である。

3.4 より複雑な Bell 不等式

上述したように、2 部分システムの量子系で、Alice, Bob の測定法の数、測定値の数を大きくする方向で、より複雑な Bell 不等式を、凸多面体計算ソフトウェアを援用して Bell 不等式を求めることができる。Collins, Gisin [13] は、I_{3322} の次のいくつかの不等式を求め、さらに 1 つの系統的な不等式系 I_{mm22} を生成することも行っている。著者らの研究グループの当時のメンバは、[6], [22] などで理論も用いて解析し、I_{mm22} がファセット定義式であることを示し、2 値の測定値で測定法数が 5 つまでの場合で、89 個の Bell 不等式を得て、それらの間の包含関係・必要関係を解析し、また公開している [24]。この公開データは、Bell 不等式の一連の研究の中で利用され、Bell 不等式の研究に資している。

ここでは、その中の 1 つで A8 というラベルが付いている A8-Bell 不等式に着目する。これは、Alice が 5 つの測定法、Bob が 4 つの測定法をもち、各測定法の出力は 2 値の場合の 1 つの Bell 不等式である。

A8-Bell 不等式: $\langle A_1B_1\rangle + \langle A_1B_2\rangle + \langle A_2B_1\rangle + \langle A_2B_2\rangle + \langle A_3B_1\rangle + \langle A_3B_2\rangle - \langle A_1B_3\rangle + \langle A_2B_3\rangle - \langle A_1B_4\rangle + \langle A_3B_4\rangle - \langle A_2B_5\rangle + \langle A_3B_5\rangle - \langle A_4B_1\rangle + \langle A_4B_2\rangle \leq 6$

量子の右辺上限: 8.366

I_{3322} の不等式では、A_i, B_j それぞれ単独で $\langle A_i\rangle$, $\langle B_j\rangle$ という項が出ているのに対し、この A8-Bell 不等式は CHSH 不等式同様でそのような項をもたない。このような Bell 不等式は Bell 相関不等式 (Bell correlation inequality) として Werner, Wolf [37] によって調べられている。この場合、量子の最大破れはすべての相関を表現したカット多面体を判定値緩和した問題を 1 つ解くことで多項式時間で計算することができる (Tsirelson's bound [34], [35]; なお [25] によって否定的に解決された Tsirelson's conjecture はこの無限次元版的なもの)。今の場合、それが 8.366 になっている。また、任意の Bell correlation inequality に対して、必ず量子破れが存在することが示された [16]; 任意の Bell 不等式の場合はまだ未解決である。

この A8-Bell 不等式は、[4], [5], [6], [23] の研究の中で、完全グラフのカット多面体の hypermetric ファセット定義式から変換して得られた Bell 相関不等式であり、また上記述べたで isotropic 量子状態で CHSH 不等式、I_{3322} 不等式より強いものの 1 つである。その際の最適測定のパラメタは [23] にある。

ベンチマーキングの観点からは、このような Bell 不等式で精度よい計算ができるかは、測定に関する試験になっていると思われる。また、d 次元状態で調べる点が計算できるかなどが課題となる。

4. 多数部分システムでの Bell 不等式

前節では基本的に 2 つの部分システムからなる量子系を考えていた。n 個の部分システムからなる量子系を考えると、ベンチマーキングの観点で n が大きくなった際のスケーラビリティのテストになる。この際、考えるべき点としては、どのような n 部分システムの量子系を対象とするかである。以下では、最大エンタングル状態に対する GHZ 状態、グラフに対する量子グラフ状態についての場合をまとめる。

4.1 GHZ 状態に対する Bell 不等式

n 次元 GHZ 状態で第 2 項のフェーズに i がかかったものを考える:

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00...0\rangle + \mathrm{i}|11...1\rangle)$$

X, Y, Z を Pauli のスピン行列として、

$$M_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\prod_{j=1}^{n}(X_j + \mathrm{i}Y_j) + \prod_{j=1}^{n}(X_j - \mathrm{i}Y_j)\right]$$

としたとき,

Mermin 不等式: $\langle M_n\rangle \leq 2^{\lceil n/2\rceil}$

量子の上限: 2^{n-1}

と書ける (Mermin [27]; cf. [18]). M_3, M_4 は

$$\begin{aligned} M_3 &= Y_1X_2X_3 + X_1Y_2X_3 + X_1X_2Y_3 - Y_1Y_2Y_3 \\ M_4 &= Y_1X_2X_3X_4 + X_1Y_2X_3X_4 + \cdots + X_1X_2X_3Y_4 \\ &\quad - Y_1Y_2Y_3X_4 - Y_1Y_2X_3Y_4 - \cdots - X_1Y_2Y_3Y_4 \end{aligned}$$

のようになる。これからも見て取れるように、M_n では 2^{n-1} の項が出てくるため、項に対する測定を逐一計算すると指数時間がかかって、スケーラブルではない。

本稿では、予備的実験として、上記アイデアを用い、また具体的な回路については論文 [19] を用いた結果を表 1 に示す。なお、その論文では量子回路設計でのゲート数減少、入力のフェーズに関する自由度活用、測定回数について考慮しており、その成果を用い、種々の設定を同論文の表記で示すこととする。

表 1: $3, 4, 5$-qubit GHZ 状態に対する Mermin 不等式等の量子破れ値の実験: Gonzalez ら [19] がゲート数削減をした量子回路を IBM Quantum 量子コンピュータ上で実行。表で状態で ^{A}, $^{A'}$ と付いているものは、[1] で Mermin 不等式を漸化式で定義した場合の状態と不等式を表す (詳細は [19] 参照)。また [1] での対称性を利用して、高々 n 個の測定を行う方法を用いている (ベンチマーキング用には指数オーダ測定するべき)。左上の (C, Q) は不等式の古典・量子上限値で、$8\sqrt{2} \approx 11.3$。表の第 2-5 行はデバイスとして dev1: Manhattan (65qubit), dev2: Sydney, dev3: Toronto, dev4: Montreal (27qubit), dev5: Guadalupe (16qubit) を利用。実装では量子ビットをエラーが小さい箇所に固定配置、測定エラーに関する誤差緩和を適用した。

状態	(C, Q)	dev1	dev2	dev3	dev4	dev5
ϕ_3	$(2, 4)$	3.77	3.00	3.86	3.90	3.94
ϕ_4^A	$(4, 8\sqrt{2})$	9.63	10.75	9.62	10.79	9.64
$\phi_4^{A'}$	$(4, 8\sqrt{2})$	10.10	10.22	9.68	10.98	10.18
ϕ_4	$(4, 8)$	6.87	7.03	6.55	6.89	6.94
ϕ_5^A	$(4, 16)$	10.71	9.44	14.28	14.00	11.61
$\phi_5^{A'}$	$(4, 16)$	11.36	9.42	13.20	14.07	11.24
ϕ_5	$(4, 16)$	12.01	9.02	13.94	13.99	12.68

4.2 グラフ状態に対する Bell 不等式

点数 n の無向グラフ $G = (V, E)$ $(n = |V|)$ が与えられたとき、それに対する量子グラフ状態 $|\phi_G\rangle$ がユニークに定まる。1 つの構成法は、$|00\cdots0\rangle$ から初めて、各点に Hadamard 行列 H を掛け、各枝の両端点に制御 Z を掛けるというものである。実際に K_3 の場合で示すと、

$$|\phi_{K_3}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle \\ -|011\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle)$$

となる。もう 1 つの定義は stabilizer によるもので、この K_3 の場合で点 $v = 1, 2, 3$ に対して、

$$g_1 = X_1Z_2Z_3, \quad g_2 = Z_1X_2Z_3, \quad g_3 = Z_1Z_2X_3$$

を stabilizer とすると、$g_i|\phi_G\rangle = |\phi_G\rangle$ が決まる。

4.2.1 Gühne ら [20] の Bell 不等式

Stabilizers に対し $g_1^{j_1}g_2^{j_2}g_3^{j_3}(j_1, j_2, j_3 = 0, 1)$ は

$$III,\ g_1 = X_1Z_2Z_3,\ g_2 = Z_1X_2Z_3,\ g_3 = Z_1Z_2X_3, \\ g_1g_2 = Y_1Y_2I,\ g_1g_3 = Y_1IY_3,\ g_2g_3 = IY_2Y_3, \\ g_1g_2g_3 = -X_1X_2X_3$$

となり、これらの和を $\tilde{G}$ とする。このとき、量子グラフ状態 $|\phi_G\rangle$ に対して次の Bell 不等式が得られる。

Gühne らの Bell 不等式: $\langle\tilde{G}\rangle \leq 6$

量子上限: $2^3 = 8$

この量子グラフ状態に対する Bell 不等式は、一般の n 点グラフで 2^n 個の項をもち、スケーラブルでない。一方で、この計算を通してそのときの量子状態の量子グラフ状態に対する Fidelity を計算することができる。

4.2.2 Baccari ら [7] の Bell 不等式

この Bell 不等式では、各点に対して 1 つだけ項を考えるので、線形項数のスケーラブルなものになっている。上記と同様に各点 v での stabilizer g_v を考え、最大次数の点 u を 1 つ選び、その点 u に隣接する点の集合を $N(u)$ で表したとき、

$$I_G := \sqrt{2}\left(|N(u)|\langle g_u\rangle + \sum_{v\in N(u)} g_v\right) + \sum_{w\notin N(u)\cup u} g_w$$

として

Baccari らの Bell 不等式: $\langle I_G\rangle \leq |N(u)| + n - 1$

量子上限: $(2\sqrt{2} - 1)|N(u)| + n - 1$

となる。

再び K_3 を例にすると、この場合は最大次数は 2 でどの点も同じであるので、点 2 を選んで

$$I_g := \sqrt{2}\Big(2\langle g_2\rangle + \langle g_1\rangle + \langle g_3\rangle\Big)$$

となる。この不等式の破れと、たとえば fidelity 等との関係はわかっていない。実験の詳細は [38] 参照。そこでは IBM 量子コンピュータの 65qubit 全体の接続グラフそのものを用いた量子グラフ状態がこの Baccari らの Bell 不等式を破れることが示されている。また、閉路グラフの場合で、浅層回路の量子優位性でのポイントとなるグラフ状態での Bell 不等式的な不等式の破れについて調べた結果もある [33]。

ベンチマーキングの観点からは、この Bell 不等式は

スケーラビリティ かなり大きなグラフでも計算・検証ができる利点がある。

グラフの自由度 量子コンピュータの qubits が全点間操作可能なのか、接続グラフで枝で結ばれた 2 点間のみ操作可能なのかに応じて、それぞれの量子コンピュータで利点を持つグラフでの実験が可能である。

という面白さをもつ。

謝辞

共同研究者の Rudy Raymond 博士、楊博氏、寺本幸生氏、平石秀史博士に感謝する。本研究では、東京大学での IBM Quantum のハブ上で、IBM Quantum 量子コンピュータを利用した。本研究は、JSPS 科研費 JP20H00579, JP20K11682, JP18K19776, JP15H01677 の助成を受けたものである。

参考文献

[1] D. Alsina and J. I. Latorre: Experimental test of Mermin inequalities on a five-qubit quantum computer. Physical Review A, 94:12314, 2016.

[2] R. Arnon-Friedman, F. Dupuis, O. Fawzi, R. Renner and T. Vidick: Practical device-independent quantum cryptography via entropy accumulation. Nature Communications, 9:459, 2018.

[3] S. Arora and B. Barak: Computational Complexity — A Modern Approach. Cambridge University Press, 2009.
[4] D. Avis, H. Imai, and T. Ito, On the relationship between convex bodies related to correlation experiments with dichotomic observables. Journal of Physics A: Mathematical and General, 39(36):11283–11299, 2006.
[5] D. Avis, H. Imai and T. Ito. Generating facets for the cut polytope of a graph by triangular elimination. Mathematical Programming, 112:303—325, 2008.
[6] D. Avis, H. Imai, T. Ito, and Y. Sasaki: Two-party Bell inequalities derived from combinatorics via triangular elimination. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38(50):10971–10987, 2005.
[7] F. Baccari, R. Augusiak, I. Šupić, J. Tura, and A. Acín: Scalable Bell inequalities for qubit graph states and robust self-testing. Physical Review Letters, 124:020402, 2020.
[8] J. S. Bell: On the Einstein Podolsky Rosen paradox. Physics, 1(3):195–200, 1964.
[9] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner: Bell nonlocality. Reviews of Modern Physics, 86:419–478, 2014.
[10] J. Clauser, M. Horne, A. Shimony, and R. Holt: Proposed experiment to test local hidden-variable theories. Physical Review Letters, 23(15):880-–884, 1969.
[11] J. Clauser and A. Shimony: Bell's theorem: Experimental tests and implications. Reports on Progress in Physics, 41:1881–1927, 1978.
[12] R. Cleve, P. Høyer, B. Toner and J. Watrous: Consequences and limits of nonlocal strategies. Proceedings of the 19th IEEE Annual Conference on Computational Complexity, 236–249, 2004.
[13] D. Collins and N. Gisin: A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality. Journal of Physics A: Mathematical and General, 37(5):1775–1787, 2004.
[14] A. Cornelissen, J. Bauschm and A. Gilyén: Scalable benchmarks for gate-based quantum computers. arXiv:2104.10698, 2021.
[15] M. Deza and M. Laurent: Geometry of Cuts and Metrics. Springer, 1997.
[16] L. Escolà, J. Calsamiglia, and A. Winter: All tight correlation Bell inequalities have quantum violations. Physical Review Research, 2:012044, 2020.
[17] M. Froissart: Constructive generalization of Bell's inequalities. Il nuovo cimento, 64B(2):241–251, 1981.
[18] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger: Bell's theorem without inequalities, American Journal of Physics, 58:1131-1143, 1990.
[19] D. González, D. Fernández de la Pradilla, and G. González: Revisiting the experimental test of Mermin's inequalities at IBMQ. International Journal of Theoretical Physics, 59:3756–3768, 2020.
[20] O. Gühne, G. Tóth, P. Hyllus, and H. J. Briegel: Bell inequalities for graph states. Physical Review Letters, 95:120405, 2005.
[21] T. Humble, K. Young, and C. McGeoch (organizers): Summary of the IEEE Workshop on Benchmarking Quantum Computational Devices and Systems. IEEE International Conference on Rebooting Computing (ICRC 2019), November 2019. https://quantum.ieee.org/education/quantum-supremacy-and-quantum-computer-performance (downloaded: 2021-06-06)
[22] T. Ito: Bell inequalities and the cut polytope: bridging quantum information science and combinatorial optimization. Ph. D. Thesis, Department of Computer Science, the University of Tokyo, 2006.
[23] T. Ito, H. Imai, and D. Avis: Bell inequalities stronger than the Clauser-Horne-Shimony-Holt inequality for three-level isotropic states. Physical Review A, 73:042109, 2006.
[24] T. Ito, H. Imai, and D. Avis: List of Bell inequalities for at most 5 measurements per party via triangular elimination, January 2006. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/t̃suyoshi/bell/bell5.txt
[25] Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright, and H. Yuen: $\mathrm{MIP}^* = \mathrm{RE}$. arXiv:2001.04383, 2020.
[26] A. Khrennikov and I. Basieva: Towards experiments to test violation of the original Bell inequality. arXiv:1801.09663, 2018.
[27] N. D. Mermin: Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states, Physical Review Letters, 65:15 (1990), 1838–1840.
[28] M. Navascués, S. Pironio, and A. Acín: A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations. New Journal of Physics, 10:073013, 2008.
[29] A. I. Pakhomchik, I. Feshchenko, A. Glatz, V. M. Vinokur, A. V. Lebedev, K. V. Kuzhamuratova, S. N. Filippov, and G. B. Lesovik: Realization of the Werner-Holevo and Landau-Streater quantum channels for qutrits on quantum computers. arXiv:1905.05277, 2019.
[30] K. Pál and T. Vértesi: Maximal violation of a bipartite three-setting, two-outcome Bell inequality using infinite-dimensional quantum systems. Physical Review A, 82;2, 022116, 2010.
[31] I. Pitowsky and K. Svozil: Optimal tests of quantum nonlocality. Physical Review A, 64:014102, 2001.
[32] I. Šupić and J. Bowles: Self-testing of quantum systems: a review. Quantum, 4:337 (2020).
[33] K. Teramoto, B. Yang, R. Raymond, A. Hasegawa, H. Imai, and H. Hiraishi: Experimental realization of quantum non-locality on IBM quantum devices. IEICE Technical Group on Quantum Information Technologu (QIT44), 2021-05.
[34] B. S. Cirel'son (Tsirelson): Quantum generalizations of Bell's inequality. Letters in Mathematical Physics, 4(2):93–100, 1980.
[35] B. S. Tsirelson: Some results and problems on quantum Bell-type inequalities. Hadronic Journal Supplement, 8(4):329–345, 1993.
[36] T. Vidick and S. Wehner: More nonlocality with less entanglement. Physical Review A, 83:052310, 2011.
[37] R. F. Werner and M. M. Wolf: All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. Physical Review A, 64:032112, 2001.
[38] B. Yang, R. Raymond, H. Imai, H. Chang, and H. Hiraishi: Testing scalable Bell inequalities for quantum graph states on IBM quantum devices. arXiv:2101.10307, 2021; 情報処理学会第 2 回量子ソフトウェア研究発表会, 2021-03.