

王将グラフ上での順次交換による 色付きドロップ整列の計算量

岡田 優斗^{1,a)} 木谷 裕紀^{2,b)} 大舘 陽太^{3,c)} 小野 廣隆^{3,d)}

概要: 王将グラフとは王将の動きをもとに定義されたグラフであり、いわゆるグリッドに斜辺を足した形をとる。本研究では王将グラフの各頂点に置かれた色付きドロップを初期配置から最終配置に整列させる問題を考える。ただし、ドロップの移動はグラフの適当な歩 (walk) 上でドロップを順次交換する形をとる。2×2 以上の王将グラフ上では十分長い歩に沿って順次交換を行えば、任意の初期配置からドロップ各色の色数が等しい任意の最終配置へ整列させることができることが知られている。本研究では、そのような歩長のオーダー的にタイトな上界を与える。またドロップが2色の場合、入力 k に対して歩長 k 以下の順次交換で目的を達成可能かの判定が NP 完全であることなどを示す。なおこの問題は、モバイル端末ゲーム、パズル&ドラゴンズでのドロップ移動をモデル化したものである。

Sequentially Swapping Colored Tokens on King's Graphs

Abstract: A king's graph is a graph that represents all legal moves of the king piece on a chessboard, and it forms a grid added with diagonal edges. In this paper, we consider to relocate colored drops on the vertices of a king's graph to a given goal configuration, where drops are moved along a walk in a sequentially swapped manner. Such relocation is always possible from an arbitrary drop configuration to another arbitrary legal drop configuration for king's graphs of size at least 2×2 if we use a sufficiently long walk. We give an upper bound on the length of such a walk, which is tight in terms of order. Furthermore, we show that it is NP-complete to decide for given positive integer k whether there exists a walk with length at most k so as to relocate 2-colored drops from an initial configuration to a goal configuration. In passing, sequentially swapping drops models a rule of drop moves of a mobile device game called "Puzzle & Dragons".

1. はじめに

頂点集合 V 、辺集合 E からなる無向重みなしグラフ $G = (V, E)$ を考える。各頂点にドロップが一つずつ置かれており、各ドロップは色集合 $C = \{1, 2, \dots, |C|\}$ のうちの適当な1色で塗られている。これをドロップ配置と呼ぶ。あるドロップ配置が与えられたとき、適当な頂点に置かれたドロップを歩 (walk) に沿って滑らせる形で動かすことにより、配置されたドロップを入れ替える形で別のドロップ

配置に変えることができる。このような操作をドロップの順次交換と呼ぶ。王将グラフはいわゆるグリッドに斜辺を足した形をとるグラフのことを言う。パズル&ドラゴンズ (通称パズドラ) というモバイル端末ゲーム [1] では、 5×6 の王将グラフ上で与えられたドロップ配置から高スコアが得られるドロップ配置へと制限時間内にドロップ順次交換により変化させることが目的の一つとなっている。

本研究では、このゲームにおけるドロップの順次交換整列に関する計算量を考察する。これを扱う問題 (PD と呼ぶ) では、入力として与えられた整数 k と初期ドロップ配置 f と最終ドロップ配置 f' に対し、長さ k の歩に沿った順次交換で f から f' へ整列させられるかを判定 (Yes/No) することが目的となる。問題 PD 自体の定式化、ならびにいくつかのグラフクラスにおける計算量解析を行なった研究が [9] である。しかし、この論文で得られた結果は、PD が一般には NP 困難であること、グラフクラスを木、完全

¹ 名古屋大学情報学部
Furocho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601, Japan
² 名古屋大学未来社会創造機構
Furocho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601, Japan
³ 名古屋大学大学院情報学研究科
Furocho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601, Japan
a) okada.yuto@k.mbox.nagoya-u.ac.jp
b) hironori.kiya@mirai.nagoya-u.ac.jp
c) otachi@nagoya-u.jp
d) ono@nagoya-u.jp

グラフ、サイクルに限定した場合に多項式時間で判定可能であることに限定されており、パズドラの設定で現れる王将グラフにおける計算量等は不明であった。

本研究では王将グラフ上での PD について考える。PD は 15 パズルとの類似性により、2 行 (列) 以上の任意の問題例に対して十分大きな k を取れば答えは常に Yes である。このため 3 節では、まず k がどの程度の大きさであれば PD の答えが常に Yes となるかについて考察し、その見積もりがオーダー的にタイトであることを示す。4 節では計算困難性を示す。PD は王将グラフ上、 $|C|$ が 2 以上の任意の定数である場合、NP 完全であることを示す。また、矩形格子グラフ (グリッド) 上で、 $|C| = n$ 、すなわち全ドロップの色が異なるような場合であっても NP 完全であることを示す。

1.1 関連研究

上で述べたように、PD は Yamanaka et al. [9] においてトークン順次交換問題 (Sequential Token Swapping Problem) という名前で提案され、いくつかのグラフクラスにおける計算量が解析されている。

PD と強く関連するのが $(n^2 - 1)$ パズルである ($n = 4$ の 15 パズルがよく遊ばれている)。 $(n^2 - 1)$ パズルはいわゆる $n \times n$ グリッド ($n \times n$ 矩形格子グラフ) に 1 番から $n^2 - 1$ 番までのタイルが適当に配置されており、残された一つの空白を利用したスライドにより、1 から $(n^2 - 1)$ を左上から順に正しく配置できるかを問うパズルである。このパズルを PD の設定で説明するならば、「各頂点に配置された $n \times n$ 色のドロップを空白に相当するドロップを順次交換する形で目標となる配置に整列させる」となる。PD と $(n^2 - 1)$ パズルの大きな違いは PD においては同色のドロップが存在しうること、また移動させるドロップに任意のドロップを選べることがある。 $(n^2 - 1)$ パズルやそれをさらに一般化した $(h \times w - 1)$ パズル ($h \times w$ の矩形格子グラフ上での空白を動かすパズル) では、パリティを計算することにより任意の初期配置を遷移可能な 2 種類に分類できる [6] ことが知られている。例えば、15 パズルでは 1 番と 2 番以外のタイルが所望の場所に、1 番が 2 番の場所に、2 番が 1 番の場所にある配置からは正しいタイル配置に遷移させることができず (解けない)、任意の配置は正しい配置に遷移できる配置と、1 番と 2 番を入れ替えた配置に遷移できる配置のいずれかに分類される。これに対し、 $h \times w$ の王将グラフ ($h, w \geq 2$) が矩形格子グラフに斜辺を加えた形をとることに注意すると、王将グラフでは 2 つの隣接するドロップを入れ替えることができることから、全てのドロップ配置は互いに遷移可能になることがわかる。すなわち、王将グラフ上の $(h \times w - 1)$ パズルは常に遷移可能であるため、移動ドロップを自由に選べ、かつ同色が存在しうる PD も常に遷移可能である。

このように $(n^2 - 1)$ パズルと PD は強く関連するが、PD と同様、最短遷移に関する研究も多くなされている。到達可能性に関しては最短あるいは差の意味で最短に近い遷移の発見が NP 完全であること、また一方で定数近似アルゴリズムが存在することが示されている [7], [8]。

パズドラの数理に関しては、川越 [10] が得点獲得可能な配置への順次交換による遷移可能性を問う問題を研究している。本研究が遷移の目標とするドロップ配置を指定するのに対し、川越 [10] ではある長さの順次交換により到達可能な得点獲得可能配置の有無を問う問題を扱っている。

2. 準備

グラフに関する基本的な知識を仮定する。また本研究で扱うグラフは特に断りのない限り、無向、重みなし、連結グラフである。頂点集合 V 、辺集合 E からなるグラフ G を $G = (V, E)$ で表す。

グラフ $G = (V, E)$ が格子グラフであるとは、点集合 V を $\{1, \dots, |V|\}^2$ の部分集合としたとき、辺集合が $E = \{(x, y), (x', y')\} \mid (x, y), (x', y') \in V, |x - x'| + |y - y'| = 1\}$ の形をとるときのことを言う。格子グラフ G に対し、その頂点集合 $V \subseteq \{1, \dots, |V|\}^2$ を G の格子表現と呼ぶ。各 $(x, y) \in V$ は $x + y$ が偶数ならば偶頂点、奇数ならば奇頂点とよばれる。格子グラフ $G = (V, E)$ が矩形格子グラフであるとは、ある $h, w \in \mathbb{Z}^+$ に対して $V = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\}$ であることである。ある格子グラフ G の格子表現が与えられたとき、 G を誘導部分グラフとして含む最小の矩形格子グラフの格子表現は容易に構成可能である。

グラフ $G = (V, E)$ が王将グラフであるとは、 $V = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\}$ としたとき、 $E = \{(x, y), (x', y')\} \mid (x, y), (x', y') \in V, \max\{|x - x'|, |y - y'|\} = 1\}$ を満たすときのことを言う。王将グラフにおける隣接頂点は将棋における王将の可能な動きを表す。王将グラフにおいても、偶頂点・奇頂点を格子グラフと同様に定義する。

グラフ $G = (V, E)$ の各頂点に、色集合 $C = \{1, 2, \dots, |C|\}$ のうち適当な 1 色で塗られたドロップが置いてあるとする。頂点に対してそこに置かれているドロップの色を返す関数 $f: V \rightarrow C$ を、 G 上のドロップ配置と呼ぶ。

ドロップ配置 f と f' が、 $G = (V, E)$ 上のドロップ配置であるとする。このとき、ドロップ配置の列 $S = (f_1, f_2, \dots, f_h)$ が f と f' 間の順次交換列であるとは、ある G の歩 $W = (w_1, w_2, \dots, w_h)$ が存在して、下述の条件を満たすことである：

- $f_1 = f$ かつ $f_h = f'$ 。
- $k = 1, 2, \dots, h$ に対して、 f_k は G 上のドロップ配置である。
- $k = 2, 3, \dots, h$ に対して、 f_k は f_{k-1} から頂点 w_{k-1} と w_k に置かれたドロップのみを交換したものである。すなわち、

$$f_k(v) = \begin{cases} f_{k-1}(w_{k-1}) (= f_1(w_1)) & v = w_k, \\ f_{k-1}(w_k) & v = w_{k-1}, \\ f_{k-1}(v) & \text{それら以外,} \end{cases}$$

を満たす.

順次交換列 S の長さ $len(S)$ は, ドロップの交換回数 $|S| - 1$ で定義する. 順次交換列の中ではじめ w_1 に置かれていたドロップは毎回交換されて隣接する別の頂点へ移動する. これを**移動ドロップ**と呼ぶ.

本研究では以下のような問題を考える.

問題: PD

入力: グラフ G , 整数 k , G のドロップ配置 f, f'

出力: 長さ k 以下の f と f' 間の順次交換列が存在するならば Yes, しないなら No.

ただし, f と f' で各色のドロップの数が異なる場合明らかに順次交換列は存在せず, またこれは容易に確認できる. したがって以下では f と f' は各色のドロップ数が同数であると仮定する.

3. 移動長の上限界

本節では, 王将グラフ上でのドロップ配置間の最短の順次交換列の長さ上に上界 $O(hw(h+w))$ を与え, また最短順次交換列長がその上界に一致するインスタンスが存在することを示す.

定理 1. 任意の $h, w \geq 2$ に対して, $h \times w$ の王将グラフ上の任意のドロップ配置 f, f' に対して, 長さが $O(hw(h+w))$ の f, f' 間の順次交換列 S が存在する.

証明 全て異なる色のとき定理 1 が成立すれば, 同じ色のドロップのときも適当な一対一の対応を付ければ成立することがわかる. したがって, 全て色が異なると仮定する.

順次交換列 S の移動ドロップは, 頂点 (h, w) に f' で置かれているドロップと同じ色のものとする.

図 1 は色 4 のドロップを右へ移動させている. そして一つ右へずれた位置で同じ順次交換を行うと, 再度色 4 のドロップが右へ移動する. このような動きを繰り返すことで, 進行方向に対して幅が 2 あれば, 好きなドロップを任意の方向へ移動させることができる. これを用いて, $O(hw(h+w))$ 回の順次交換で f から f' へ変えられることを示す.

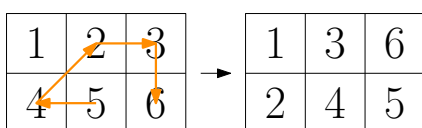


図 1 色 4 のドロップを右へ移動させる順次交換 (移動ドロップは色 5)

順次交換列 S はまず, 頂点 $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, w), (2, 1), (2, 2), \dots, (h-2, w)$ の順に, 置かれているドロップを f' に一致させていく.

色 $f'((1, 1))$ のドロップが, 頂点 (x, y) に置かれているとする. $x \neq 1$ の場合, (x, y) を通らずに頂点 $(x-1, y)$ へ移動し, 前述の順次交換を用いて色 $f'((1, 1))$ のドロップを $(1, y)$ へ移動させる. 次に, $y \neq 1$ の場合, (x, y) を通らずに頂点 $(1, y-1)$ へ移動し, 同様に $f'((1, 1))$ を $(1, 1)$ へ移動させる. 同様に $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, w-1)$ についても, 既に一致させた頂点を通らずに一致させる.

色 $f'((1, w))$ のドロップのみ, 頂点 $(1, w-1)$ を通らないようにするため異なる. まず同様の順次交換で色 $f'((1, w))$ のドロップが $(2, w)$ へ置かれたドロップ配置へ変化させる. そして, 移動ドロップを $(2, w-1)$ へ移動させ, 図 2 のような順次交換で $f(1, w)$ へ色 $f'((1, w))$ のドロップが置かれたドロップ配置へ変化させる.

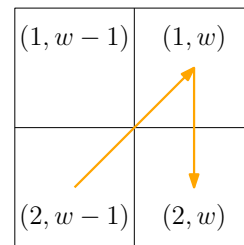


図 2 $(1, w)$ のドロップを一致させる順次交換

同様に, 頂点 $(2, 1), (2, 2), \dots, (h-2, w)$ のドロップの色を一致させていく. また, 90° 回転しているとみなすと, 同様の操作で $(h-1, w-1), (h, w-1), (h-1, w), (h, w)$ を除いて一致させることが出来る. 頂点の色を一つ一致させるのに, $O(h+w)$ 回の順次交換を行っている. したがって, ここまでの交換回数は $O(hw(h+w))$ である.

最後に $(h-1, w-1), (h, w-1), (h-1, w), (h, w)$ を揃える. 王将グラフなので, これらの頂点は全て互いに隣接している. そして, 移動ドロップは色 $f'(h, w)$ である. したがって, 次の順次交換でこれらの頂点のドロップも f' へ一致させることが出来る. まず移動ドロップを $(h-1, w-1)$ へ移動させる. そして, 現在移動ドロップが置かれている頂点を x とし, $f'(x)$ のドロップと順次交換することを 3 回繰り返す.

以上より, 全体で $O(hw(h+w))$ 回の交換回数の, f から f' への順次交換列が存在する. \square

定理 2. 任意の $h, w \geq 2$ に対して, $h \times w$ の王将グラフ $G = (V, E)$ 上のドロップ配置 f, f' が存在し, f, f' 間の最短順次交換列長が $\Omega(hw(h+w))$ である.

証明 具体的に f と f' を構築して示す.

まず $h' = \lfloor h/2 \rfloor, w' = \lfloor w/2 \rfloor$ とし, f を $V = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\}$ のそれぞれの頂点 (x, y) に対し, $x(w-1) + y$

を返す関数とする。

これに対し f' を, f の任意の $x \leq h', y \leq w'$ に対して (x, y) と $(x + h', y + w')$ の値を交換したものとす。すなわち,

$$f'((x, y)) = \begin{cases} f((x + h', y + w')) & x \leq h', y \leq w', \\ f((x - h', y - w')) & h' < x \leq 2h', w' < y \leq 2w', \\ f((x, y)) & \text{それら以外,} \end{cases}$$

とする。

たとえば, 4×5 の王将グラフの場合図3のようになる。

f					f'				
1	2	3	4	5	13	14	3	4	5
6	7	8	9	10	18	19	8	9	10
11	12	13	14	15	11	12	1	2	15
16	17	18	19	20	16	17	6	7	20

図3 ドロップ配置 f と f'

このとき f と f' の最短順次交換列長が $\Omega(hw(h+w))$ であることを示す。定理1より, f, f' 間に順次交換列が存在する。したがって最短順次交換列も存在するので, これを S とする。

任意の $x \leq h', y \leq w'$ に対して, (x, y) 上にあるドロップは $(x + h', y + w')$ に移動する必要があるため, 少なくとも S の中で $\max\{h', w'\}$ 回交換されている。一度の交換は2つのドロップしか交換しないため, 以下のように S の長さを下から評価できる:

$$\begin{aligned} \text{len}(S) &\geq h'w' \frac{\max\{h', w'\}}{2} \\ &\geq \frac{1}{4} h'w'(h' + w') \\ &= \Omega(hw(h+w)). \quad \square \end{aligned}$$

4. 計算困難性

本節では, 王将グラフ上でのPDが各種設定の下でNP完全であることを示す。NP完全性の証明にはグラフのハミルトン路問題からの帰着を利用する。

グラフ G のハミルトン路とは G の各頂点を丁度一度ずつ訪れる路のことであり, G のハミルトン閉路とは G の各頂点を丁度一度ずつ訪れる閉路のことであり。グラフが与えられたときにハミルトン路(閉路)の存在を判定する問題を, ハミルトン路問題(ハミルトン閉路問題)と呼ぶ。

以下の補題は, 格子グラフにおけるハミルトン閉路問題の困難性[5]から容易に導かれるものであるが, 後の証明でもその性質を利用するため, ある程度詳細な証明を与える。

補題 3. 偶頂点と奇頂点の数が等しい格子グラフが格子表現で入力されるとき, ハミルトン路問題はNP完全である。

証明 問題は明らかにNPに属するので, 以下ではNP困難性を示す。

格子グラフが格子表現で入力される場合のハミルトン閉路問題はNP完全であることが知られている[5]。グラフ $G = (V, E)$ をその問題の入力とする。偶頂点と奇頂点の数が異なる格子グラフはハミルトン閉路を持たないので, G が同数の偶頂点と奇頂点を持つ場合のみを考えればよい。また, G が次数1の頂点をもつ場合もハミルトン閉路を持たないので, G の最小次数は2以上とする。

頂点 $v = (m_x, m_y) \in V$ を以下のとおり定義する:

- $m_x = \max\{x \mid (x, y) \in V\}$;
- $m_y = \max\{y \mid (m_x, y) \in V\}$ 。

頂点 v は, グリッド表現 V を \mathbb{Z}^2 平面に描画したとき, それより右の列には頂点がなく, その列でそれより上には頂点がないという性質を満たす唯一のものである。最小次数に関する仮定より, 頂点 v の次数は丁度2である。隣接点のうち v の下にある頂点 $v + (0, -1)$ を w とする(図4)。

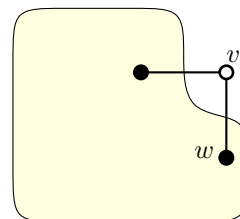


図4 頂点 $v = (m_x, m_y)$ と隣接点 u, w 。

格子表現 V に新たな4点 $s = v + (1, 1), s' = v + (1, 0), t = v + (2, -1), t' = v + (1, -1)$ を加えたものを V' とし, 格子表現 V' で表される格子グラフを H とする。頂点 v の選び方より, H は G に対して頂点 s, s', t, t' を加え, 図5に示される辺を加えたグラフである。また, s, s', t, t' のうち2頂点が偶頂点で, 2頂点が奇頂点であるので, H は同数の偶頂点と奇頂点をもつ。よって, G がハミルトン閉路をもつとき, かつそのときに限り, H がハミルトン路をもつことを示せばよい。

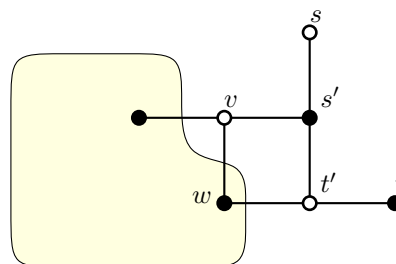


図5 グラフ H の構成。

まず, G がハミルトン閉路 C をもつ場合を考える。頂

点 v の次数は 2 なので, C は辺 $\{v, w\}$ を含む. 閉路 C から辺 $\{v, w\}$ を取り除いて得られる路を P とすると, P は v と w を端点としてもつハミルトン路である. グラフ H はグラフ G を (誘導) 部分グラフとして含むので, P も含む. そこで, P に 4 辺 $\{s, s'\}, \{s', v\}, \{w, t'\}, \{t, t'\}$ を加えると, H のハミルトン路となる.

次に, H がハミルトン路 P をもつ場合を考える. 頂点 s と t は次数 1 なので, P は s と t を端点としてもつハミルトン路である. よって, P は辺 $\{s, s'\}$ と $\{t', t\}$ を含む. もし, P が辺 $\{s', t'\}$ を含むとすると, P が s から t へのパス (s, s', t', t) を含むことになるが, これは P が s と t を端点としてもつハミルトン路であることに矛盾する. したがって, P は辺 $\{s', t'\}$ を含まない. このことから, P が辺 $\{s', v\}$ と $\{w, t'\}$ を含むことがわかる. ここで, 上と同様の議論から P が辺 $\{v, w\}$ を含まないことがいえる. 路 P' を, P から辺 $\{s, s'\}, \{s', v\}, \{w, t'\}, \{t', t\}$ を削除してできるものとする. この路 P' は H において, s, s', t, t' 以外の頂点を丁度 1 度ずつ通る路であり, その端点として v と w をもつものである. グラフ G は H の誘導部分グラフであり, $V' \setminus V = \{s, s', t, t'\}$ なので, P は G において端点 v と w をもつハミルトン路である. このハミルトン路に辺 $\{v, w\}$ を加えたものは, G のハミルトン閉路である. □

定理 4. 王将グラフ上での PD はドロップに使われる色数が 2 以上の任意の定数であっても NP 完全である.

証明 PD は明らかに NP に属するので, 以下では NP 困難であることを示す. NP 困難性は, 補題 3 で示した偶頂点と奇頂点の数が等しい格子グラフ上でのハミルトン路問題からの帰着により証明する.

以下ではまず $|C| = 2$ の場合の NP 困難性を示す. 偶頂点と奇頂点を同数もつ格子グラフ上でのハミルトン路問題のインスタンスとして, $G = (V, E)$ が格子表現で与えられたとする. グラフ G に対して, PD のインスタンス G', k, f, f' を構成する. まず, k を, $|V| - 1$ とする. 次に G' を, グラフ G を誘導部分グラフとしてもつ最小の矩形格子グラフに斜辺を足した王将グラフとする. ドロップ配置 f を, 色集合 $\{1, 2\}$ のうち奇頂点には 1 を, 偶頂点には 2 を配置したものとする. ドロップ配置 f' を, f に対して G の頂点に置かれたドロップのみ色を反転させたもの, すなわち

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) & v \notin V \\ 1 & v \in V, f(v) = 2, \\ 2 & v \in V, f(v) = 1, \end{cases}$$

とする. ここで, 構成した PD のインスタンスの入力のサイズは, 元の入力のある多項式以下になっている.

グラフ G にハミルトン路 $P = (v_1, v_2, \dots, v_{|V|})$ が存在するとき, 先程構成した PD のインスタンスに対して $f,$

f' 間の長さ k 以下の順次交換列 S が存在することを示す. ドロップ配置の列 $S = (f_1, f_2, \dots, f_{k+1})$ とし, $f_1 = f, f_i$ ($i \geq 2$) を f_{i-1} に対して v_i と v_{i-1} に置かれたドロップのみを交換したものとする. このとき各 $i \geq 1$ と各 $j \leq i-1$ に対して, $f_i(v_j) = f'(v_j)$ であることを i に関する帰納法により示す. $i = 1$ のときは明らかである. ある $i \geq 1$ で満たして, $i+1$ のとき, P はハミルトン路であるから, S の定義より, 順次交換列 (f_1, f_2, \dots, f_i) の中で v_{i+1} の上に置かれたドロップは一度も交換されていない. したがって, $f_i(v_{i+1}) = f'(v_i)$ が成り立つ. ドロップ配置 f_{i+1} は, 定義より v_i, v_{i+1} 以外の頂点 v に対して $f_{i+1}(v) = f_i(v)$ を満たし, さらに, $f_{i+1}(v_i) = f_i(v_{i+1}) = f'(v_i)$ を満たしている. したがって, f_{k+1} は $i \leq k$ に対して, $f_{k+1}(v_i) = f'(v_i)$ を満たしている.

また, G は偶頂点と奇頂点の個数が等しいため, 頂点数は偶数である. したがって, $f_{k+1}(v_{k+1}) = f'(v_{k+1})$ も満たしている. グラフ G の頂点以外の頂点 v についても, 定義より S の中で一度も交換されず, $f_{k+1}(v) = f_1(v) = f(v) = f'(v)$ である. 以上より, S は f, f' 間の長さ k 以下の順次交換列となっている.

先程構成した PD のインスタンスに対し長さ k 以下の f, f' 間の順次交換列 $S = (f_1, f_2, \dots, f_{\text{len}(S)+1})$ が存在するとき, 元のインスタンス G に対しハミルトン路が存在することを示す. 順次交換列 S の各ドロップ配置で移動ドロップが置かれていた頂点の列を $W = (v_1, v_2, \dots, v_{\text{len}(S)+1})$ とし, これが G のハミルトン路になっていることを示す. グラフ G の任意の頂点 v に対して $f(v) \neq f'(v)$ より, 移動ドロップは G の任意の頂点の上に少なくとも一度置かれている. また, $|W| = \text{len}(S) + 1 \leq k + 1 \leq |V|$ より, W は G の各頂点を丁度一度ずつ訪れている. したがって, 各 $i \leq \text{len}(S)$ に対し, v_i と v_{i+1} が G で隣接している, すなわち $v_i = (x_i, y_i), v_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ として $|x_i - x_{i+1}| + |y_i - y_{i+1}| = 1$ を示せば十分である. 矛盾を導くために $|x_i - x_{i+1}| + |y_i - y_{i+1}| \neq 1$ と仮定する. 移動ドロップは一度の交換で隣接する頂点へ移動するため, 王将グラフで v_i と v_{i+1} が隣接する条件 $\max\{|x_i - x_{i+1}|, |y_i - y_{i+1}|\} = 1$ を満たす. したがって, $|x_i - x_{i+1}| = |y_i - y_{i+1}| = 1$ である. このとき, G を誘導部分グラフとしてもつ最小の矩形格子グラフにおいて, v_i と v_{i+1} の偶奇は一致するので, $f(v_i) = f(v_{i+1})$ である. しかし, 移動ドロップが G の各頂点を丁度一度ずつ訪れることから, $f'(v_i) = f_{\text{len}(S)+1}(v_i) = f_1(v_{i+1}) = f(v_{i+1})$ であり, $f(v_i) \neq f'(v_i)$ と矛盾する. したがって各 $i \leq \text{len}(S)$ に対し, v_i と v_{i+1} が G で隣接しており, W は G のハミルトン路である.

以上より $|C| = 2$ であったとしても, 王将グラフ上の PD は NP 困難である.

色数 $|C|$ が任意の 3 以上の定数の場合は、上述の証明の G' を $|C| - 2$ 列分を増やした王将グラフに変更する。増やした列における初期ドロップ配置 f 、最終ドロップ配置 f' は共に、順に各列、色 3、色 4、 \dots 、色 $|C|$ のドロップを配置したものとする。このように変更しても上述の証明と同様に必要十分性を示すことができるため、色数が任意の 3 以上の定数であっても NP 困難であることが示された。□

定理 5. 矩形格子グラフ上での PD は各ドロップに使われる色が全て異なっても NP 完全である。

証明 与えられた長さ k のパスが PD の解の条件を満たすかどうかは線形時間で判定できる。すなわち、NP に属するので、以下では NP 困難であることを示す。

NP 困難である証明の基本的なアイデアは Demaine と Rudoy [3] によるものと同じである。Demaine と Rudoy [3] は、NP 完全であることが知られている水平・垂直線分シュタイナー木問題 [4] から $(n^2 - 1)$ パズルへ帰着することで、 $(n^2 - 1)$ パズルが NP 完全であることを示している。本証明においても同様に水平・垂直線分シュタイナー木問題から帰着することで NP 困難性を示す。

水平・垂直線分シュタイナー木問題とは整数 l と平面上の正の整数座標の点の集合が与えられたときに、それらの点を全て通り、辺が全て x 軸か y 軸に平行な木 (水平・垂直線分シュタイナー木) のうち、合計の辺の長さが l 以下のものが存在するか? という判定問題である。

水平・垂直線分シュタイナー木問題のインスタンス、整数 l と点集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$ を考える。このインスタンスから、矩形格子グラフ上の色がすべて異なる PD のインスタンス、グラフ G 、整数 k 、ドロップ配置 f, f' を構成する。 $c = 18|P|$ とし、 m を P の x 座標、 y 座標のうち最大のものとする。PD のインスタンスのグラフ G を、 $n = (m+1)c$ として、 $n \times n$ の矩形格子グラフとする。 P の各点 (x, y) に対して、 G の頂点 (cx, cy) を対応付ける。 m の定義より、 $cx, cy \leq mc$ であるから、これは G の頂点である。 f を任意の色がすべて異なるドロップ配置とし、 f' を f に対して、任意の P の点 (x, y) に対応する頂点 (cx, cy) と、 $(cx+1, cy)$ 、 $(cx, cy+1)$ の 3 頂点の上にあるドロップを図 6 のように回転させたものとする。最後に、PD のインスタンスの整数 k を $(2l+1)c$ とする。

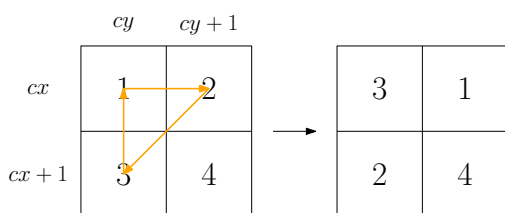


図 6 ドロップ配置の回転

ここで、 G のサイズは座標の最大値 m と点の数 $|P|$ の多

項式である。水平・垂直線分シュタイナー木問題は強 NP 困難であるため、 m は $|P|$ に関するある多項式以下であると仮定できる。したがって、 G のサイズも多項式である。上述の f, f', k も多項式時間で計算できるため、全体が多項式時間で計算可能である。

水平・垂直線分シュタイナー木問題のインスタンス l, P に対して長さ l 以下の P の点を全て通る水平・垂直線分シュタイナー木が存在するとき、先程構成した PD のインスタンス G, k, f, f' に対しても長さ k 以下の f, f' 間の順次交換列が存在することを示す。 p_1 の座標を (x_1, y_1) とする。 Demaine と Rudoy [3] は、水平・垂直線分シュタイナー木問題のインスタンス l, P に対して長さ l 以下の P の点を全て通る水平・垂直線分シュタイナー木が存在するとき、先程構成した PD のインスタンスに対して、下述の条件を満たす長さが高々 $2cl + 18(|P| - 1)$ の順次交換列 S が存在することを示した:

- 移動ドロップが頂点 (cx_1, cy_1) に置かれている、
- 最後のドロップ配置で各 $i \geq 2$ に対して (cx_i, cy_i) 、 $(cx_i + 1, cy_i)$ 、 $(cx_i, cy_i + 1)$ に置かれているドロップの色が f' に一致、
- 最後のドロップ配置で各 $i \geq 2$ に対して (cx_i, cy_i) 、 $(cx_i + 1, cy_i)$ 、 $(cx_i, cy_i + 1)$ 以外の頂点のドロップの色は最初のドロップ配置に一致、
- 最後のドロップ配置で移動ドロップは頂点 (cx_1, cy_1) に置かれている。

これを利用し、次のように f と f' 間の順次交換列 S' を構成できる。 S' の移動ドロップを、頂点 $(cx_1 + 1, cy_1 + 1)$ に置かれているドロップとする。まず図 7 のように、移動ドロップと $(cx_1 + 1, cy_1)$ 、 $(cx_1, cy_1 + 1)$ に置かれているドロップを順に交換し、 (cx_1, cy_1) へ移動ドロップを移動させる。

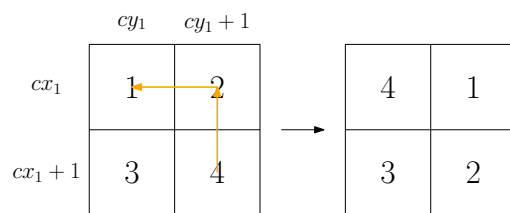


図 7 移動ドロップの移動

次に、移動ドロップを、 S の移動ドロップと同じ移動をさせる。 S の移動ドロップは、 S の中で (cx_1, cy_1) から (cx_1, cy_1) へ移動する。そして、図 8 のように、移動ドロップと $(cx_1 + 1, cy_1)$ 、 $(cx_1 + 1, cy_1 + 1)$ に置かれているドロップを順に交換し、 $(cx_1 + 1, cy_1 + 1)$ へ移動ドロップを移動させる。

順次交換列 S の移動ドロップと同じ移動をさせることで、順次交換列の最後のドロップ配置は、各 $i \geq 2$ に対して (cx_i, cy_i) 、 $(cx_i + 1, cy_i)$ 、 $(cx_i, cy_i + 1)$ に置かれているド

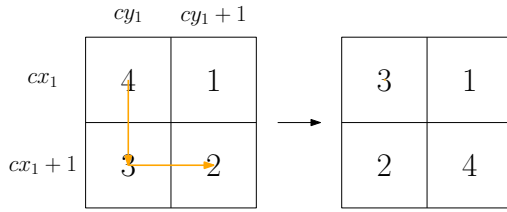


図 8 移動ドロップの移動

ロップの色が f' に一致している。また、前後に追加した移動により、図 7, 図 8 より、頂点 (cx_i, cy_i) , (cx_i+1, cy_i) , (cx_i, cy_i+1) , (cx_i+1, cy_i+1) に乗っているドロップの色も f' に一致している。順次交換列 S は前後で各 $i \geq 2$ に対して (cx_i, cy_i) , (cx_i+1, cy_i) , (cx_i, cy_i+1) 以外の頂点のドロップ配置を変えないので、 S' は f, f' 間の順次交換列である。

順次交換列 S' は、元の順次交換列から 4 回交換回数が増えている。したがって、 $len(S) \leq 2cl + 18(|P| - 1) + 4 \leq 2cl + 18|P| = (2l + 1)c = k$ となる。以上より、 S' は長さ k 以下の f, f' 間の順次交換列である。

上述の PD のインスタンス G, k, f, f' に、 k 以下の f, f' 間の順次交換列 S が存在したとする。ただし、 S は、そのような順次交換列のうち最も短いものとする。このとき、 S の移動ドロップが S の中で訪れた頂点の集合を R とし、 R によって誘導される G の部分グラフの全域木 T を $1/c$ 倍に縮小すると元の水平・垂直線分シュタイナー木問題のインスタンスの解になっている。以下ではこれを示す。

順次交換列 S の移動ドロップは、 P の各点 (x, y) に対して (cx, cy) のドロップの色を変える必要があるため、 (cx, cy) を少なくとも一度は通っている。したがって、 T の辺は全て x 軸か y 軸に平行であるから、 T を $1/c$ 倍に縮小し適切な位置へ移動させると、明らかに元のインスタンスの P の点をすべて通る水平・垂直線分シュタイナー木になる。ここで、縮小した T の長さは $(|R| - 1)/c$ である。Blass と Gurevich [2] によれば、最小の水平・垂直線分シュタイナー木の辺の長さの和は整数であるから、 l 以下の水平・垂直線分シュタイナー木が存在することを示すには、 $(|R| - 1)/c \leq |R|/c \leq l + 1$ を示せば十分である。

頂点集合 R のうち、 f と f' で同じ色のドロップが置かれている頂点の集合を R' とし、 $|R|/c \leq l + 1$ を示すために、 $|R'|$ と $|R \setminus R'|$ を評価する。

まず、 $|R \setminus R'|$ 、すなわち R のうち、 f と f' で違う色のドロップが置かれている頂点の数を数える。 S の移動ドロップは、ドロップの色を変えるため、 R にかかわらず f と f' で違う色のドロップが置かれている頂点を必ず通る。したがってこれは、 G の頂点のうち、 f と f' で違う色のドロップが置かれている頂点の数に等しい。先程の構成では、 P の各点に対し、 G の 3 点を移動させていた。したがって、 $|R \setminus R'| = 3|P|$ である。

次に $|R'|$ に対して上界を与える。頂点集合 R' に含まれる頂点 a が、 S の移動ドロップによってただ一度しか訪れられないと仮定する。すると、 S の中で移動ドロップは、 $a_{before} \rightarrow a \rightarrow a_{after}$ と移動している。このとき、 $a_{before} = a_{after}$ ならば、この移動の中でドロップ配置が変わっていないことから、 S の最短性に矛盾する。したがって、 $a_{before} \neq a_{after}$ である。 $a_{before} \neq a_{after}$ のとき、 $a \rightarrow a_{after}$ の移動により、 a の上に色 $f(a_{after})$ のドロップが置かれる。しかし、ドロップの色がすべて異なり、 a は R' に含まれる、すなわち $f(a) = f'(a)$ であるから、 $f(a_{after})$ は $f'(a)$ とは異なる。頂点 a は S の移動ドロップによって一度しか訪れられないので、これにより矛盾が生じる。以上より R' に含まれる頂点は、それぞれ S の移動ドロップによって少なくとも 2 回以上訪れられている。順次交換列 S の長さは高々 k であるから、 S の移動ドロップが頂点を訪れる回数は高々 $k + 1$ であり、 $|R'| \leq (k + 1)/2$ が得られる。

以上の評価より、

$$\begin{aligned} |R| &= |R'| + |R \setminus R'| \\ &\leq \frac{(k + 1)}{2} + 3|P| \\ &= \frac{(2l + 1)c}{2} + 3|P| + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{(2l + 1)c}{2} + 9|P| \\ &= \frac{(2l + 1)c}{2} + \frac{c}{2} \\ &= (l + 1)c \end{aligned}$$

である。したがって、 $|R|/c \leq l + 1$ が得られる。□

5. おわりに

本研究ではグラフ上の色付きドロップ整列問題 PD について、特に王将グラフを中心にその計算量を考察した。この問題はドロップの色数が 1 色であるならば意味のない問題であるが、任意の 2 以上の定数色の場合、NP 完全になる。王将グラフに類似する矩形格子グラフでは色数とドロップ数が等しいという特殊な場合でも NP 完全となる。

このように PD は比較的制限された場合でも NP 完全になるため、精度の良い多項式時間近似アルゴリズムや底の小さい指数時間アルゴリズムの有無が次の興味の対象となる。単純なアルゴリズムとしては、移動ドロップのパスを全通り確認する $O^*((\Delta - 1)^k)$ 時間アルゴリズムがある（ただし、 Δ はグラフの次数の最大値、 $O^*(\cdot)$ は多項式項を無視したオーダー記法）。王将グラフ、矩形格子グラフの場合、最大次数はそれぞれ 8, 4 であるため、その計算量は $O^*(7^k)$, $O^*(3^k)$ となる。その他の単純なアルゴリズムとしては、ドロップ配置の全てを列挙し、その遷移可能性を表す辺を張ることにより作った $O(n|C|^n)$ 頂点からなる構成グラフに

対して幅優先探索を適用する, $O(\Delta n|C|^n) = O^*(|C|^n)$ 時間アルゴリズムが考えられる. これらを改善するアルゴリズム設計は今後の課題の一つである.

参考文献

- [1] : パズル&ドラゴンズ, Gungho online Entertainment inc (オンライン), 入手先 (<https://pad.gungho.jp/>) (参照 2021-05-19).
- [2] Blass, A. and Gurevich, Y.: Algorithms vs. Machines, *Bulletin of the EATCS*, Vol. 77, pp. 96–119 (2002).
- [3] Demaine, E. D. and Rudoy, M.: A simple proof that the $(n^2 - 1)$ -puzzle is hard, *Theoretical Computer Science*, Vol. 732, pp. 80–84 (online), DOI: 10.1016/j.tcs.2018.04.031 (2018).
- [4] Garey, M. R. and Johnson, D. S.: The Rectilinear Steiner Tree Problem is NP-Complete, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 4, pp. 826–834 (1977).
- [5] Itai, A., Papadimitriou, C. H. and Szwarcfiter, J. L.: Hamilton Paths in Grid Graphs, *SIAM J. Comput.*, Vol. 11, No. 4, pp. 676–686 (online), DOI: 10.1137/0211056 (1982).
- [6] Johnson, W. W. and Story, W. E.: Notes on the “15” puzzle, *American Journal of Mathematics*, Vol. 2, No. 4, pp. 397–404 (1879).
- [7] Ratner, D. and Warmuth, M.: Finding a Shortest Solution for the $N \times N$ Extension of the 15-Puzzle is Intractable, AAAI’86, AAAI Press, pp. 168–172 (1986).
- [8] Ratner, D. and Warmuth, M.: The $(n^2 - 1)$ -puzzle and related relocation problems, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 10, No. 2, pp. 111–137 (1990).
- [9] Yamanaka, K., Demaine, E. D., Horiyama, T., Kawamura, A., Nakano, S., Okamoto, Y., Saitoh, T., Suzuki, A., Uehara, R. and Uno, T.: Sequentially Swapping Colored Tokens on Graphs, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 23, No. 1, pp. 3–27 (online), DOI: 10.7155/jgaa.00482 (2019).
- [10] 川越啓太郎: 連続移動可能なマッチ 3 ゲームの計算複雑さ, 修士論文, 電気通信大学情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 (2021).