

連続フック引き抜きゲーム

安福 智明^{1,a)} 多田 将人^{2,b)}

概要: 連続フック引き抜きゲームは山状に番号付けられた長方形型ヤング図形を用いて行う二人ゲームである。このゲームは通常のフック引き抜きゲームの変種である。本稿では、山状に番号付けられた長方形型ヤング図形におけるフックの性質を調べ、それを局面を持つ連続フック引き抜きゲームの Grundy 数について調べた。特に、開始局面がそれぞれ $1 \times n$, $2 \times n$, $n \times n$, $n \times (n+1)$ である長方形型ヤング図形の場合の Grundy 数について解析を行った。

キーワード: 組合せゲーム理論, 組合せ論, 表現論, ヤング図形, フック引き抜きゲーム

1. はじめに

二人のプレイヤーが交互に手を打ち、伏せられた情報が無く、偶然に左右されないゲームを組合せゲームと呼ぶ。フック引き抜きゲームは組合せゲームであり、1970年頃に、ヤング図形を局面とするゲームが佐藤幹夫氏によって考案され、Grundy 数の閉じた式も発見された [5],[6]。また、その Grundy 数の閉じた式に、ヤング図形のフック長と呼ばれる重要な特徴量が現れたことから、数学分野における対称群の表現論との関連が示唆されていた。

そして、2018年頃に入江佑樹氏によって、ヤング図形におけるフック引き抜きゲームと対称群の表現論の関連した事象がいくつか示された [1]。これまでの組合せゲーム理論の研究は、ゲームの必勝法や構造についての研究に重きが置かれていたが、これらの研究成果により数学分野とのつながりが見出され、ゲーム研究に一つの意義が生まれた。

また、ヤング図形は対称群との対応があるが、もっと一般にヤング図形の仲間の図形がいくつか存在し、そのうち Weyl 群^{*1}が対応する d-complete poset と呼ばれる図形がある。その図形を用いたフックを引き抜くゲーム（平明ゲームと呼ばれる）は、2001年頃に川中宣明氏によって研究され、平明ゲームは Grundy 数の閉じた式で書けることが示された [3]。

本稿では、筆者の一人である多田が Weyl 群に対して特殊な色付けを与えた d-complete poset による表示方法を考

案した研究に基づき、その図形におけるフックを引き抜くゲームについて考察し、その Grundy 数の性質について調べた。なお、不偏ゲーム、ニム和、Grundy 数などの組合せゲーム理論の基本的な用語については断りなく使用するが、適宜 [2],[7],[8] などの文献を参照されたい。

2. フック引き抜きゲーム

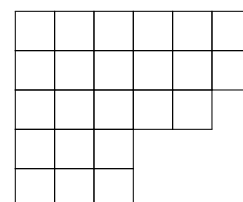
2.1 ヤング図形におけるフック引き抜きゲーム

はじめに、佐藤幹夫氏によって考案されたヤング図形におけるフック引き抜きゲームについて述べる。

ゲームのルールは以下である。

- (1) 開始局面としてヤング図形が一つ与えられる。
- (2) 二人のプレイヤーが交互に手を打つ。
- (3) プレイヤーはヤング図形の箱の一つを選び、それに対応するフックを抜く。
- (4) 最後のフックを抜き、すべての箱を無くしたプレイヤーの勝ち。

ヤング図形とは、次の図のようないくつかの箱からなる図形であり、箱の数が右に広義単調増加、下に広義単調増加するように配置され、箱の位置は、左上の箱の座標を $(1, 1)$ として、 i 行 j 列の位置にある箱を (i, j) と書く。また、ヤング図形は各 i 行にある箱の数を用いて表示される。例えば、次の図は $(6, 6, 5, 3, 3)$ に対応するヤング図形である。



¹ 国立情報学研究所

² 筑波大学

a) buku3416@gmail.com

b) t-d-masato@math.tsukuba.ac.jp

*1 対称群は A 型の Weyl 群として分類され、他にも B 型 C 型など色々な“型”の Weyl 群が存在する。

また、ヤング図形におけるフックは次のように定義される。

定義 2.1. ヤング図形 Y の箱 (i, j) に対し、

$$h_Y(i, j) := \{(i, j)\} \sqcup \{(i', j) \in Y \mid i' > i\} \\ \sqcup \{(i, j') \in Y \mid j' > j\}$$

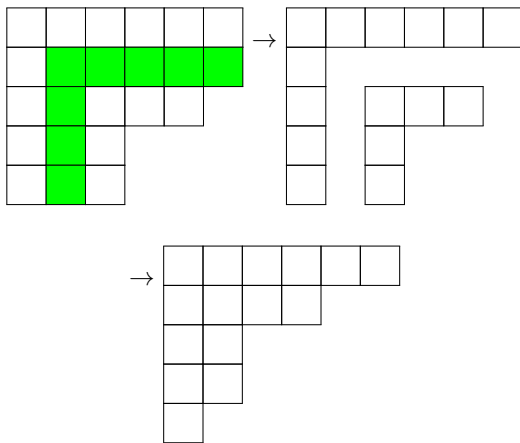
を、箱 (i, j) に対応するフックと呼ぶ。

以下、必要に応じて $h_Y(i, j)$ を $h(i, j)$ や h のように省略する。

定義 2.2. ヤング図形 Y の箱 (i, j) に対し、箱 (i, j) に対応するフックを抜く操作を以下のように定める。

- (1) 箱 (i, j) に対応するフック h に含まれる箱を全て取り除く。
- (2) $i' > i, j' > j$ を満たす全ての箱 (i', j') を $(i' - 1, j' - 1)$ に移動させる。

例 2.3. ヤング図形 $Y = (6, 6, 5, 3, 3)$ に対し、箱 $(2, 2)$ に対応するフックを抜いた場合、 $Y' = (6, 4, 2, 2, 1)$ が得られる。



ヤング図形におけるフック引き抜きゲーム^{*2}の Grundy 数は以下で与えられる。

\oplus をニム和とする^{*3}。

定理 2.4 ([5],[6]). Y を与えられたヤング図形とし、 x を各箱におけるフック長とする^{*4}。このとき、

$$G(Y) = \bigoplus_x N(x)$$

となる。ただし、 $N(a) = a \oplus (a - 1)$ とする。

2.2 シフトッド・ヤング図形におけるフック引き抜きゲーム

次に、ヤング図形の仲間の一つであるシフトッド・ヤング図形におけるフック引き抜きゲームを紹介する。

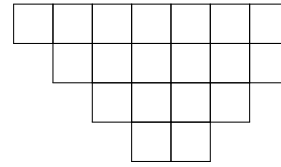
シフトッド・ヤング図形とは以下のような図形であり、箱の数が下に狭義単調増加するように配置され、一番左の

^{*2} このゲームと同型なゲームとしてウェルターゲームと呼ばれるゲームが知られている。

^{*3} 排他的論理和とも呼ばれる、繰り上がりなしの2進和。

^{*4} ここではフック長についての説明は割愛する。

箱が一つずらしに斜めに並ぶように左詰めにしたものを指す。座標はヤング図形と同じように表す。特に、シフトッド・ヤング図形上の箱 (i, j) について、 $i \leq j$ が成り立つ。シフトッド・ヤング図形は各 i 行にある箱の数を用いて表示される。例えば、次の図は $(7, 6, 4, 2)$ に対応するヤング図形である。



また、フックは次のように定義される。

定義 2.5. シフトッド・ヤング図形 S の箱 (i, j) に対し、 S の部分集合 $H_S(i, j)$ を次で定義する。

$$\text{Arms}_S(i, j) := \{(i', j') \in S \mid i = i', j < j'\}.$$

$$\text{Leg}_S(i, j) := \{(i', j') \in S \mid i < i', j = j'\}.$$

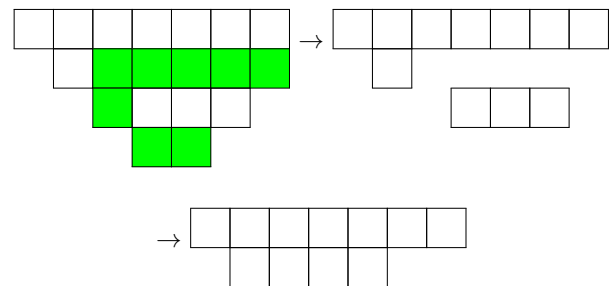
$$\text{Tails}_S(i, j) := \{(i', j') \in S \mid j + 1 = i', j < j'\}.$$

$$H_S(i, j) := \{(i, j)\} \sqcup \text{Arms}_S(i, j) \sqcup \text{Leg}_S(i, j) \sqcup \text{Tails}_S(i, j).$$

$H_S(i, j)$ を箱 (i, j) に対応するフックと呼ぶ。

シフトッド・ヤング図形におけるフックを抜く操作は次のようになる。

例 2.6. シフトッド・ヤング図形 $S = (7, 6, 4, 2)$ に対し、箱 $(2, 3)$ に対応するフックを抜いた場合、 $S' = (7, 4)$ が得られる。



シフトッド・ヤング図形におけるフック引き抜きゲーム^{*5}の Grundy 数は以下で与えられる。

定理 2.7. $S = (b_1, \dots, b_n)$ を与えられたシフトッド・ヤング図形とする。このとき、

$$G(S) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} b_i$$

となる。

次章より、我々が考案した連続フック引き抜きゲームについて議論する。

^{*5} このゲームと同型なゲームとしてターニング・タートルズと呼ばれるゲームが知られている。

3. ヤング図形と山状番号付け

$Y_{m,n}$ を m 行 n 列の長方形型ヤング図形とする。長方形型ヤング図形 $Y_{m,n}$ に対して, "山状番号付け" を以下のように定める; $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対して, 箱 (i, j) の番号は $j - i + m, i - j + n$ のうち小さい方とする。

3	4	3	2	1
2	3	4	3	2
1	2	3	4	3

4	5	5	4	3	2	1
3	4	5	5	4	3	2
2	3	4	5	5	4	3
1	2	3	4	5	5	4

図 1 長方形型ヤング図形 $Y_{3,5}, Y_{4,7}$ への番号付け

山状番号付けの定義から, 次のことがわかる。

- (1) 左下の箱 $(m, 1)$ と右上の箱 $(1, n)$ の番号は 1 である。
- (2) 箱 $(i, j), (i + 1, j + 1)$ は (存在するならば) 同じ番号である。
- (3) 最大の番号は $\lfloor (n + m)/2 \rfloor$ である。ただし, $\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数である。

以下, この山状番号付けが与えられた長方形型ヤング図形について考える。 $(i, j) \in Y$ に対して, $c(i, j)$ で箱 (i, j) がもつ番号を表す。また, 最大の番号を $c_{\max} := \lfloor (n + m)/2 \rfloor$ とする。

4. ヤング図形の対角線表示

$\mathcal{F}(Y)$ をヤング図形 Y に含まれるヤング図形全体からなる集合とする。 $\mathcal{F}(Y_{m,n})$ の各ヤング図形に対して, その対角線表示を定義する。

定義 4.1. $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, 集合 $\mathbb{D}_{m,n} \subset \mathbb{N}^{m+n+1}$ を以下で定める;

$$\mathbb{D}_{m,n} := \{(a_{-m} = 0, a_{-m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n = 0) \in \mathbb{N}^{m+n+1} \mid$$

$$0 \leq a_k - a_{k-1} \leq 1 \ (-m < k \leq 0),$$

$$0 \leq a_{k-1} - a_k \leq 1 \ (0 < k \leq n)\}.$$

例 4.2. 例えば以下のようになる。

$$(0, 1, \dot{2}, 1, 1, 1, 0) \in \mathbb{D}_{2,4}, \quad (0, 0, \dot{2}, 2, 1, 1, 0) \notin \mathbb{D}_{2,4}.$$

ただし, 添え字が 0 の成分にアクセントをつけている。

$Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ とする。 $-m < k < n$ に対して, $d_k := \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = k\}$ と定める。このとき, $i, j \geq 2$ に対して, 箱 (i, j) が Y に含まれるなら, $(i - 1, j - 1)$ も Y に含まれることから, $d_k = \max(\min(i, j) \mid j - i = k, (i, j) \in Y)$ が成り立つ。このことから, 次の補題が成り立つ。

補題 4.3.

- (1) $k > 0$ のとき, $(d_k, d_k + k) \in Y, (d_k + 1, d_k + k + 1) \notin Y$ が成り立つ。
- (2) $k = 0$ のとき, $(d_k, d_k) \in Y, (d_k + 1, d_k + 1) \notin Y$ が成

り立つ。

- (3) $k < 0$ のとき, $(d_k - k, d_k) \in Y, (d_k - k + 1, d_k + 1) \notin Y$ が成り立つ。

補題 4.4.

- (1) $0 \leq d_{-m+1}, d_{n-1} \leq 1$ が成り立つ。
- (2) $k > 0$ のとき, $0 \leq d_{k-1} - d_k \leq 1$ が成り立つ。
- (3) $k \leq 0$ のとき, $0 \leq d_k - d_{k-1} \leq 1$ が成り立つ。

Proof.

- (1) $Y_{m,n}$ 内の箱で $\{(i, j) \in Y \mid j - i = -m + 1\}$ に含まれるものは $(m, 1)$ のみであることから, $0 \leq d_{-m+1} \leq 1$ が成り立つ。 d_{n-1} の場合についても同様に示せる。
- (2) $k - 1 \geq 0$ から補題 4.3 より, $(d_{k-1}, d_{k-1} + k - 1) \in Y, (d_{k-1} + 1, d_{k-1} + k) \notin Y$ が成り立つ。このとき, $(d_{k-1} + 1, d_{k-1} + k + 1) \notin Y$ が成り立つので, $d_k \leq d_{k-1}$ がわかる。 $d_{k-1} \leq 1$ のとき, $d_{k-1} - 1 \leq 0 \leq d_k$ が成り立つ。また, $d_{k-1} \geq 2$ のとき, $(d_{k-1} - 1, d_{k-1} + k - 1) \in Y$ であることから, $d_{k-1} - 1 \leq d_k$ が分かる。よって, $0 \leq d_{k-1} - d_k \leq 1$ が成り立つ。
- (3) (2) と同様に示される。 □

補題 4.4 より, d_k を用いて次の写像 $D_{m,n}$ と対角線表示が定義できる。

定義 4.5. 写像 $D_{m,n} : \mathcal{F}(Y_{m,n}) \rightarrow \mathbb{D}_{m,n}$ を以下で定める; $Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ に対して,

$$D_{m,n}(Y) = (0, d_{-m+1}, d_{-m+2}, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}, 0).$$

ただし, $d_k = \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = k\}$ である。以下, $D_{m,n}$ を代わりに D と表記する。 $D(Y)$ を Y の対角線表示と呼ぶ。

例 4.6. $Y_{3,5}$ に含まれるヤング図形 Y を以下で図示されるものとする。

3	4	3	2	1
2	3	4	3	
1	2	3		

このとき, $D(Y) = (0, 1, 2, \dot{3}, 2, 2, 1, 1, 0)$ となる。

補題 4.7. $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, 以下が成り立つ。

- (1) $D : \mathcal{F}(Y_{m,n}) \rightarrow \mathbb{D}_{m,n}$ は全単射である。
- (2) $1 \leq k \leq c_{\max}$ に対して,

$$\#\{(i, j) \in Y \mid c(i, j) = k\}$$

$$= \begin{cases} d_{-m+k} + d_{n-k} & (-m + k \neq n - k) \\ d_{-m+k} & (-m + k = n - k) \end{cases}$$

Proof. (1) D が単射であることは定義からわかる。

$\mathbf{a} = (a_{-m} = 0, a_{-m+1}, a_{-m+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n = 0) \in \mathbb{D}_{m,n}$ に対して, 次のように対応するヤング図形 Y を与える; 箱 (i, j) は, $\min(i, j) \leq a_{j-i}$ を満た

すとき、かつその時に限り Y に含まれる。このとき、 $-m < j - i < n$ を満たさない箱は Y に含まれないことに注意する。

ここで、 Y が確かにヤング図形になっていることを確認する。そのためには、箱 (i, j) が Y に含まれるとき、箱 $(i - 1, j)$ も Y に含まれるか $i = 1$ であることと、箱 $(i, j - 1)$ も Y に含まれるか $j = 1$ であることを示せばよい。 $-m < j - i < 0$ を満たす箱 (i, j) について考える。このとき、 $j < i$ より $\min(i, j) = j$ である。ここで、 $\min(i, j) = j \leq a_{j-i}$ と $0 \leq a_{j-i+1} - a_{j-i}$ から、 $\min(i - 1, j) = j \leq a_{j-i+1}$ を満たす。よって、箱 $(i - 1, j)$ が存在するなら、それは Y に含まれる。

$j - i = 0$ を満たす箱 (i, j) と $0 < j - i < n$ を満たす箱 (i, j) についても同様に示される。

Y の決め方から、 $a_k = d_k (-m < k < n)$ が成り立つ。よって、 $D(Y) = \mathbf{a}$ が成り立ち、 D が全射であることが示された。

(2) $-m + k \neq n - k$ とすると、

$$\begin{aligned} & \#\{c \in C(Y) \mid c = k\} \\ &= \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = -m + k, n - k\} \\ &= \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = -m + k\} \\ & \quad + \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = n - k\} \\ &= d_{-m+k} + d_{n-k} \end{aligned}$$

より成り立つ。 $-m + k = n - k$ の場合についても同様に示せる。□

5. 対角線表示とフック

ヤング図形 $Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ から、箱 (i, j) に対応するフック h を抜くことを考える。このとき、フックを抜いた後のヤング図形を Y' とする。番号付けが与えられたヤング図形 Y に対して、 $C(Y)$ を各箱が持つ番号からなる多重集合とする。また、フックに含まれる番号からなる多重集合を $C(h)$ と表す。このとき、箱 (i', j') と箱 $(i' + 1, j' + 1)$ の番号が同じであることから、 $C(Y) = C(Y') + C(h)$ が成り立つ。また、箱 (i, j) から見て一番下にある箱を (i', j) ($i' \geq i$)、一番右にある箱を (i, j') ($j' \geq j$) とすると、各 $-m < k < n$ に対して、

$$\begin{aligned} & \#\{(i, j) \in Y \mid j - i = k\} - \#\{(i, j) \in Y' \mid j - i = k\} \\ &= \begin{cases} 1 & (j - i' \leq k \leq j' - i) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。このことを対角線表示で見ると、

$$\begin{aligned} D(Y) &= (0, \dots, d_{j-i'-1}, d_{j-i'}, d_{j-i'+1}, \\ & \quad \dots, d_{j'-i-1}, d_{j'-i}, d_{j'-i+1}, \dots, 0) \end{aligned}$$

とおいたときに、

$$\begin{aligned} D(Y') &= (0, \dots, d_{j-i'-1}, d_{j-i'} - 1, d_{j-i'+1} - 1, \\ & \quad \dots, d_{j'-i-1} - 1, d_{j'-i} - 1, d_{j'-i+1}, \dots, 0) \end{aligned}$$

となることが言える。 $D(Y') \in \mathbb{D}_{m,n}$ に注意する。

このことから、ヤング図形のフックを抜く操作は、対角線表示においては「 $\mathbb{D}_{m,n}$ に含まれるようにある区間内の数を全て 1 減らす」操作に対応する。

$\mathbb{D}_{m,n}$ の元である

$$\mathbf{a} = (a_{-m} = 0, a_{-m+1}, a_{-m+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n = 0)$$

の添え字 l から r までの区間をすべて 1 減らして

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= (0, \dots, a_{l-1}, a_l - 1, a_{l+1} - 1, \\ & \quad \dots, a_{r-1} - 1, a_r - 1, a_{r+1}, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{m+n+1} \end{aligned}$$

にすると、 $\mathbf{a} \xrightarrow{l,r} \mathbf{a}'$ と表す。このとき、 \mathbf{a}' の 2 項間の値の差が変化するのは、 $a_{l-1}, a_l - 1$ 間と $a_r - 1, a_{r+1}$ 間のみである。よって、 \mathbf{a}' が $\mathbb{D}_{m,n}$ に含まれるかどうかは、 $a_{l-1}, a_l - 1$ 間と $a_r - 1, a_{r+1}$ 間で $\mathbb{D}_{m,n}$ の条件が成り立つかどうかを調べればよい。

例 5.1. 例 4.6 のヤング図形 Y に対して、 $(1, 4)$ に対応するフックを抜いたヤング図形を Y' とする。

3	4	3	2	1	→	3	4	3
2	3	4	3			2	3	4
1	2	3				1	2	3

$D(Y) = (0, 1, 2, \dot{3}, 2, 2, 1, 1, 0)$ である。

このとき、 $D(Y') = (0, 1, 2, \dot{3}, 2, \mathbf{1}, \mathbf{0}, 0)$ となる。

補題 4.7 より、 Y から (i, j) に対応するフック h を抜いて Y' にしたとき、そのフックに含まれる番号からなる多重集合 $C(h)$ は $D(Y)$ と $D(Y')$ の間でどの成分の数が 1 減少したかを見ることで確認できる。 $D(Y) \xrightarrow{l,r} D(Y')$ とすると、 $C(h) = \{c(k) \mid l \leq k \leq r\}$ となる。ただし、 $c(k) := \min(k + m, -k + n)$ である。

補題 5.2. ヤング図形 $Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ から (i, j) に対応するフック h を抜いて Y' にする。また、対角線表示において $D(Y) \xrightarrow{l,r} D(Y')$ と表せるとする。このとき、 Y' 上に $C(h') = C(h)$ を満たすようなフック h' が存在し、そのフックを抜いて Y'' にできるなら、対角線表示において $D(Y') \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y'')$ と表される。また、 Y'' 上に $C(h'') = C(h)$ を満たすようなフック h'' は存在しない。

Proof. $l \leq r < 0$ の場合について考える。 $l \leq 0 \leq r$ や $0 < l \leq r$ 場合についても同様に示せる。

$D(Y), D(Y') \in \mathbb{D}_{m,n}$ であることから、

$$D(Y') = (0, d'_{-m+1}, d'_{-m+2}, \dots, d'_{n-2}, d'_{n-1}, 0)$$

とすると, $d'_{l-1} = d'_l$, $d'_r + 1 = d'_{r+1}$ が成り立つ. ここで, $\#C(h) = r - l + 1$ であることから, 条件を満たすフック h' が存在するならば, 対角線表示では $a \in \mathbb{Z}$ を用いて $D(Y') \xrightarrow{a, a+r-l} D(Y'')$ と表されなければならない. $a = l$ のときに $C(h') = C(h)$ を満たすことは自明である. また, $a = n - m - r$ とすると,

$$\begin{aligned} C(h') &= \{c(k) \mid n - m - r \leq k \leq n - m - l\} \\ &= \{\min(k + m, -k + n) \mid -r \leq k - n + m \leq -l\} \\ &= \{\min(-k' + n, k' + m) \mid -r \leq -k' \leq -l\} \\ &= \{\min(k' + m, -k' + n) \mid l \leq k' \leq r\} \\ &= C(h) \end{aligned}$$

となる. それ以外の a の値について, $C(h') \neq C(h)$ となることを確認する. $l < n - m - r$ とする. このとき, $l < n - m - r < n - m - l$ と $l < r < n - m - l$ が成り立つ. また, $c(l) = c(n - m - l) < c(r) = c(n - m - r)$ が成り立つ. ここから, $C(h)$ に含まれる一番小さい番号は $c(l)$ である. $a < l, a > n - m - r$ の場合, $C(h')$ に $c(l)$ より小さい番号が含まれるので, $C(h') \neq C(h)$ となる. また, $l < a < n - m - r$ の場合, $C(h')$ に番号 $c(l)$ が含まれないので, $C(h') \neq C(h)$ となる. $l = n - m - r$ と $l > n - m - r$ の場合についても同様に示せる.

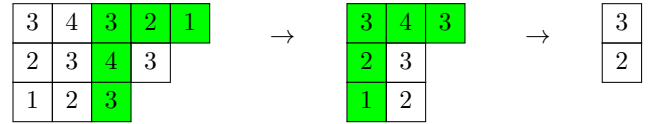
よって, $a = l, n - m - r$ となる. ここで, $a = l$ の場合を考える. このとき,

$$\begin{aligned} D(Y'') &= (0, \dots, d'_{l-1}, d'_l - 1, d'_{l+1} - 1, \\ &\dots, d'_{r-1} - 1, d'_r - 1, d'_{r+1}, \dots, 0) \end{aligned}$$

となるが, $d'_l - 1 - d'_{l-1} = -1$ であるため, $D(Y'') \notin \mathbb{D}_{m,n}$ となる. これは Y'' がヤング図形であることに矛盾する. 以上より, 条件を満たすフック h' が存在するとき, 対角線表示において $D(Y') \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y'')$ と表される.

Y'' からさらに $C(h'') = C(h)$ を満たすようなフック h'' を抜くことを考える. そのようなフックが存在すると仮定し, 抜いた後のヤング図形を Y''' とすると, 対角線表示において $D(Y'') \xrightarrow{l, r} D(Y''')$ または $D(Y'') \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y''')$ と表される. しかし, どちらの場合においても $D(Y''') \notin \mathbb{D}_{m,n}$ となるため, 条件を満たすようなフックは存在しない. \square

例 5.3. 例 4.6 のヤング図形 Y に対して, $(1, 3)$ に対応するフック h を抜いたヤング図形を Y' とする. このフックに含まれる番号からなる多重集合は $C(h) = \{3, 4, 3, 2, 1\}$ である. ここで, Y' に対して $(1, 1)$ に対応するフック h' を抜くと, そのフックに含まれる番号からなる多重集合も $C(h') = \{1, 2, 3, 4, 3\}$ である.



$D(Y) = (0, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 0)$ であり,

$D(Y') = (0, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0)$ である.

このとき, $D(Y'') = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ となる. また, $D(Y) \xrightarrow{0, 4} D(Y') \xrightarrow{-2, 2} D(Y'')$ と表される.

補題 5.2 より, 次のことが言える.

系 5.4. 山状番号付けがされたヤング図形 $Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ とその箱 (i, j) に対して, 次の操作 (MHR) を考える.

- (1) 箱 (i, j) に対応するフック h を抜く.
- (2) フックを抜いた後のヤング図形に対して, $C(h') = C(h)$ を満たすフック h' が存在するなら, さらにそのフックを抜く.
- (3) (2) の操作を可能な限り繰り返す.

このとき, この操作によって得られるヤング図形は (2) のフックの抜き方によらず一意である.

補題 5.5. ヤング図形 $Y \in \mathcal{F}(Y_{m,n})$ に対して, 箱 (i, j) と箱 (i', j') に対しての操作 (MHR) を考える. このとき, $C(h_{(i,j)}) = C(h_{(i',j')})$ が成り立つならば, それぞれの操作の結果で得られるヤング図形は等しい.

Proof. Y からフック $h_{(i,j)}$ を抜いた後のヤング図形を Y' , フック $h_{(i',j')}$ を抜いた後のヤング図形を Y'' とする. $C(h_{(i,j)}) = C(h_{(i',j')})$ であることと補題 5.2 の証明から, 対角線表示で $D(Y) \xrightarrow{l, r} D(Y')$ と表すと $D(Y) \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y'')$ となる.

ここで, 対角線表示で $D(Y') \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y''')$ を満たすようなフックが存在することを確認する.

$$D(Y) = (0, d_{-m+1}, d_{-m+2}, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}, 0),$$

$$D(Y') = (0, d'_{-m+1}, d'_{-m+2}, \dots, d'_{n-2}, d'_{n-1}, 0)$$

とおく. $D(Y) \xrightarrow{n-m-r, n-m-l} D(Y'')$ とできることから,

$$d_{n-m-r} - d_{n-m-r-1} = d'_{n-m-r} - d'_{n-m-r-1},$$

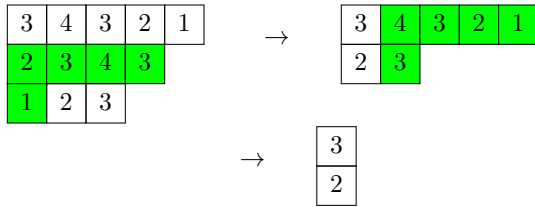
$$d_{n-m-l} - d_{n-m-l+1} = d'_{n-m-l} - d'_{n-m-l+1}$$

が成り立つことを確認すればよい. 成り立たないことを仮定すると, $l = n - m - r, r = n - m - l, l = n - m - l + 1, r = n - m - r - 1$ のどれかを満たす. しかし, $l = n - m - r$ と $r = n - m - l$ は同値であり, これらを満たすときは $D(Y) \xrightarrow{l, r} D(Y'') = D(Y')$ となる. これは $h_{(i,j)}$ と $h_{(i',j')}$ が異なるフックであることに矛盾する. また, $l = n - m - l + 1$ を仮定する. $l \leq 0$ とすると, Y から $h_{(i,j)}$ と $h_{(i',j')}$ それぞれ抜くことができることから, $d_{l-1} - d_l = -1, d_{n-m-l} - d_{n-m-l+1} = d_{l-1} - d_l = 0$ となり矛盾する. $l > 0$ の場合についても, $d_{l-1} - d_l =$

$0, d_{n-m-l} - d_{n-m-l+1} = d_{l-1} - d_l = 1$ となり矛盾する。
 $r = n - m - r - 1$ を仮定したときも同様に矛盾が示される。

ここから、補題 5.2 より Y の箱 (i, j) に対して (MHR) の操作を行うと Y''' になることがわかる。同様に、対角線表示で $D(Y'') \xrightarrow{l,r} D(Y''')$ を満たすようなフックも存在し、 Y の箱 (i', j') に対して (MHR) の操作を行うと Y'''' になる。また、対角線表示の定義から、 $D(Y''') = D(Y''')$ がわかる。□

例 5.6. 例 4.6 のヤング図形 Y に対して、 $(2, 1)$ に対応するフック h を抜いたヤング図形を Y' とする。このフックに含まれる番号からなる多重集合は $C(h) = \{\{1, 2, 3, 4, 3\}\}$ である。これは例 5.3 の $C(h)$ に等しい。ここで、 Y' に対して $(1, 2)$ に対応するフック h' を抜くと、そのフックに含まれる番号からなる多重集合も $C(h') = \{\{3, 4, 3, 2, 1\}\}$ である。



$D(Y) = (0, 1, 2, \dot{3}, 2, 2, 1, 1, 0)$ であり、
 $D(Y') = (0, 0, 1, \dot{2}, 1, 1, 1, 1, 0)$ である。
このとき、 $D(Y'') = (0, 0, 1, \dot{1}, 0, 0, 0, 0, 0)$ となる。また、
 $D(Y) \xrightarrow{-2,2} D(Y') \xrightarrow{0,4} D(Y'')$ と表される。この Y'' は、例 5.3 の Y'' に等しい。

ここまで、山状番号付けられた長方形型ヤング図形とそのフックの性質についてみてきた。これより、連続フック引き抜きゲームについて述べる。

6. 連続フック引き抜きゲーム

6.1 連続フック引き抜きゲームのルール

連続フック引き抜きゲームのルールは操作 (MHR) によって、以下で与えられる。

- (1) 山状番号付けが与えられた長方形ヤング図形が一つ与えられる。
- (2) 二人のプレイヤーが次のような操作 (a), (b) を交互に行う。
 - (a) 箱を一つ選び、対応するフックを引き抜く。 $C(h)$ を抜いたフックの番号からなる多重集合とする。
 - (b) その後、 $C(h)$ と同じ番号からなるフックを抜くことができる場合、連続でそのフックを抜く。
- (3) 最後にフックを抜いたプレイヤーの勝ちである。

補題 5.2 より、連続してフックは最大 2 回までしか抜け

ないことに注意する。

6.2 連続フック引き抜きゲームの Grundy 数

6.2.1 $1 \times n$ の場合

定理 6.1. 山状番号付けが与えられた長方形型ヤング図 $Y_{1,n}$ における連続フック引き抜きゲームにおいて、開始局面 $Y_{1,n}$ の Grundy 数 $\mathcal{G}(Y_{1,n})$ は以下ようになる。

$$\mathcal{G}(Y_{1,n}) = \begin{cases} n & (n \text{ は奇数}), \\ n-1 & (n \text{ は偶数}). \end{cases}$$

6.2.2 $2 \times 2n$ の場合

$n \geq 1$ とする。山状番号付けが与えられた長方形型ヤング図形 $Y_{2,2n}$ における連続フック引き抜きゲームについて考える。

補題 6.2. ヤング図形 $Y = (\lambda_1, \lambda_2)$ に対して、箱 (i, j) に対するフックを抜く操作を行った後のヤング図形を $Y' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$ とする。このとき、 $\lambda'_1 + \lambda'_2 = 2n$ が成り立つことと、箱 (i, j) に対する (MHR) の操作を行ったときに 2 回フックが抜かれることは同値である。また、箱 (i, j) に対する (MHR) の操作を行ったときに 2 回フックを抜くことができるとき、操作の後に得られるヤング図形は $(2n - \lambda_2, 2n - \lambda_1)$ である。

ヤング図形 $Y = (\lambda_1, \lambda_2)$ からフックを 1 回抜くことで得られるヤング図形全体の集合を $OH(Y)$ とする。このとき、

$$OH(Y) = \{(\lambda'_1, \lambda_2) \mid \lambda_2 \leq \lambda'_1 < \lambda_1\} \cup \{(\lambda_1, \lambda'_2) \mid 0 \leq \lambda'_2 < \lambda_2\}$$

$$\cup \{(\lambda_2 - 1, \lambda'_1) \mid 0 \leq \lambda'_1 < \lambda_2\}$$

と表せる。

補題から、 $Y_{2,2n}$ における連続フック引き抜きゲームの構造が次のようにわかる。

補題 6.3. (1) ゲームの局面全体の集合は $\mathcal{F}(Y_{2,2n}) \setminus \{(\lambda'_1, \lambda'_2) \mid (\lambda'_1 + \lambda'_2 = 2n)\}$ である。

(2) ヤング図形 $Y = (\lambda_1, \lambda_2)$ に対して、

(a) $\lambda_1 + \lambda_2 < 2n$ のとき、後続局面全体の集合は $OH(Y)$ である。

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 > 2n$ のとき、後続局面全体の集合は $OH(Y) \setminus \{(\lambda'_1, \lambda'_2) \mid (\lambda'_1 + \lambda'_2 = 2n)\} \cup \{(2n - \lambda_2, 2n - \lambda_1)\}$ である。

以下、このゲームの Grundy 数について記述する。

定理 6.4. 山状番号付けが与えられた長方形型ヤング図 $Y_{2,2n}$ における連続フック引き抜きゲームにおいて、開始局面 $Y_{2,2n}$ の Grundy 数 $\mathcal{G}(Y_{2,2n})$ は以下ようになる。 $\mathbb{Z}_{>0}$ を正の整数全体の集合とする。

$$\mathcal{G}(Y_{2,2n}) = \begin{cases} 3 & (n = 1), \\ 2 & (n = 1 + 4m \ (m \in \mathbb{Z}_{>0})), \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

6.2.3 $n \times n$ と $n \times (n + 1)$ の場合

定義 6.5. 数列 $(a_k)_{k=m}^n$ において、すべての $m \leq i \leq n$ に対して $a_i = a_{n+m-i}$ となるとき、数列 $(a_k)_{k=m}^n$ を対称数列と呼ぶ。

$\mathcal{T}(Y_{m,n})$ を開始局面が $Y_{m,n}$ である連続フック引き抜きゲームの遷移に現れる局面全体とする。

定理 6.6. 次が成り立つ。

(1) $Y \in \mathcal{F}(Y_{n,n})$ とする。 $D_{n,n}(Y)$ が対称数列であることと、 $Y \in \mathcal{T}(Y_{n,n})$ であることは同値である。

(2) $Y \in \mathcal{F}(Y_{n,n+1})$ とする。 $D_{n,n+1}(Y)$ が対称数列であることと、 $Y \in \mathcal{T}(Y_{n,n+1})$ であることは同値である。

ここで、山状番号付けが与えられた長方形ヤング図形 $Y_{n,n+1}$ とシフテッド・ヤング図形 $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$ との間にある対応について述べる。以下 $SY_n = (n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$ とおく。また、 $\mathcal{F}(SY_n)$ を SY_n に含まれるシフテッド・ヤング図形全体とする。

定義 6.7. 写像 $SD_n : \mathcal{F}(SY_n) \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ を以下で定める； $S \in SY_n$ に対して、

$$SD_n(S) = [d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, d_n = 0].$$

ただし、 $d_k = \#\{(i, j) \in S \mid j - i = k\}$ ($0 \leq k < n$) である。また、各行にある箱の数を並べた表記と区別するため、括弧のかわりに角括弧を用いる。以下、 SD_n を代わりに SD と表記する。 $SD(S)$ を S の対角線表示と呼ぶ。

$Y_{m,n}$ 上の対角線表示と同様にして、 $0 \leq d_k - d_{k+1} \leq 1$ ($0 \leq k < n$) が成り立つことがわかる。そこで、この条件を満たす \mathbb{Z}^{n+1} の元からなる集合を \mathbb{SD}_n とする。このとき、 $SD : \mathcal{F}(SY_n) \rightarrow \mathbb{SD}_n$ は全単射である。

補題 6.8. 開始局面が SY_n であるシフテッド・ヤング図形におけるフック引き抜きゲームと、開始局面が $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームに対して、写像 Φ を

$$\Phi : \mathcal{F}(SY_n) \rightarrow \mathcal{T}(Y_{n,n+1}) :$$

$$SD^{-1}[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0] \mapsto$$

$$D^{-1}(0, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$$

で定める。ただし、 $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0] \in \mathbb{SD}_n$ である。このとき、 Φ はゲームの構造の同型写像である。

補題 6.9. 開始局面が $Y_{n,n}$ と $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームに対して、写像 Ψ を

$$\Psi : \mathcal{T}(Y_{n,n}) \rightarrow \mathcal{T}(Y_{n,n+1}) :$$

$$D^{-1}(0, a_n, \dots, a_2, a_1, a_2, \dots, a_n, 0) \mapsto$$

$$D^{-1}(0, a_n, \dots, a_2, a_1, a_1, a_2, \dots, a_n, 0)$$

で定める。ただし、 $(0, a_n, \dots, a_2, a_1, a_2, \dots, a_n, 0) \in \mathbb{D}_{n,n}$ である。このとき、 Ψ はゲームの構造の同型写像である。

開始局面が $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームの Grundy 数について次が言える。

定理 6.10. $Y \in \mathcal{T}(Y_{n,n+1})$ に対し、 $S = \Phi^{-1}(Y)$ を対応するシフテッド・ヤング図形とする。このとき、開始局面が $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームの局面 Y の Grundy 数と S を局面とするシフテッド・ヤング図形におけるフック引き抜きゲームの Grundy 数は等しい。

Proof. 補題 6.8 と Grundy 数の定義から従う。 \square

この定理より、開始局面が $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームの局面の推移に現れる、すべての局面の Grundy 数を具体的に計算することができる。また、開始局面が $Y_{n,n}$ である連続フック引き抜きゲームの Grundy 数も同様に計算できる。

定理 6.11. 開始局面が $Y_{n,n}$ である連続フック引き抜きゲームの局面 Y の Grundy 数と開始局面が $Y_{n,n+1}$ である連続フック引き抜きゲームの局面 $\Psi(Y)$ の Grundy 数は等しい。

Proof. 補題 6.9 と Grundy 数の定義から従う。 \square

系 6.12. $Y_{n,n}$ または $Y_{n,n+1}$ を連続フック引き抜きゲームの局面とし、 G とおく。このとき、

$$G(G) = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} k$$

となる。

例 6.13. $Y_{3,4} = G = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$ とする。

このとき、 $G(G) = 1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ である。

7. まとめと今後の課題

今回山状番号付けが与えられた長方形ヤング図形とそれにおけるフックの性質を調べ、その図形を用いた連続フック引き抜きゲームの Grundy 数について調べた。開始局面がそれぞれ $Y_{1,n}$, $Y_{2,n}$, $Y_{n,n}$, $Y_{n,n+1}$ の場合は様子があったが、一般の形 $Y_{m,n}$ を開始局面とするゲームについては現在調査中である。

また、これら連続フック引き抜きゲームの Grundy 数を用いて、組合せ論における遷移決定問題にアプローチできるのではないかと考えており、現在いくつか予想が立っている。

連続フック引き抜きゲームの分析を通して、さらに数学的に面白い性質や構造を見出せることを期待したい。

8. 謝辞

本稿を読み、貴重なコメントを頂いた筑波大学大学院生の茂木祐紀氏に感謝する。

参考文献

- [1] Y. Irie: p-Saturations of Welter's game and the irreducible representations of symmetric groups; J. Algebraic Combin. 48 (2018)
- [2] M. H. Albert, R. J. Nowakowski, D. Wolfe, 川辺治之訳: 組合せゲーム理論入門-勝利の方程式-; 共立出版 (2011)
- [3] Kawanaka, Noriaki: SATO-WELTER GAME AND KAC-MOODY LIE ALGEBRAS (Topics in Combinatorial Representation Theory); 数理解析研究所講究録 (2001)
- [4] J. B. Olsson: Combinatorics and Representations of Finite Groups; Vorlesungen aus dem FB Mathematik der Univ. Essen, Heft 20, (1993)
- [5] 佐藤幹夫述 (榎本彦衛記): マヤ・ゲームの数学的理論, 計算機におけるゲームとパズルの諸問題; 数理解析研究所講究録 (1970)
- [6] 佐藤幹夫述 (榎本彦衛記): Maya game について; 数学のあゆみ, 15-1 (佐藤幹夫特集号), 73-84 (1970)
- [7] 佐藤文広: 石取りゲームの数学; 数学書房 (2014)
- [8] A. N. Siegel: Combinatorial Game Theory; American Mathematical Society (2013)