フラット項書き換えシステムにおける正規形の一意性に関する性質の決定不能性

佐藤 悠稀[1,a)]　青戸 等人[1,b)]

受付日 2020年9月29日, 採録日 2021年1月15日

概要：項書き換えシステム（TRS）は等式論理に基づく計算モデルである．TRS の計算による正規形の一意性を保証する性質として，合流性（CR），可換に関する一意正規形性（UNC），簡約に関する一意正規形性（UNR），正規形性（NFP）が知られている．これらの 4 つの性質は等価でなく，CR⇒NFP⇒UNC⇒UNR という関係がある．TRS の性質の決定可能性については，従来いろいろな結果が知られており，たとえば左線形右基底 TRS に対してはこれらの 4 つの性質がすべて決定可能であることが知られている．また，すべての書き換え規則の高さがたかだか 1 である TRS をフラット TRS とよぶ．フラット TRS に対しては，CR が決定不能（三橋ら，2006），UNC が決定可能（Radcliffe ら，2017），UNR が決定不能（Godoy ら，2009）ということがすでに知られているが，NFP については決定可能か決定不能かは未解決な問題であった．本論文ではフラット TRS に対する NFP が決定不能であることを報告する．具体的には，三橋らの CR の決定不能性の証明を拡張し，ポストの対応問題をフラット TRS に対する NFP に帰着することで，NFP の決定不能性を証明する．また，同様に三橋らの CR の決定不能性の証明を拡張することにより，既存の方法とは異なる方法で UNR の決定不能性を証明する．

キーワード：項書き換えシステム，一意正規形性，決定不能性

Undecidability of Some Properties Related to the Uniqueness of Normal Forms for Flat Term Rewiting Systems

Yuki Sato[1,a)]　Takahito Aoto[1,b)]

Received: September 29, 2020, Accepted: January 15, 2021

Abstract: Term rewriting systems (TRSs) are a computational model based on equational logic. Some properties that guarantee the uniqueness of normal forms for computations of TRSs are known: confluence (CR), uniqueness of normal forms with respect to conversions (UNC), uniqueness of normal forms with respect to reductions (UNR), and the normal form property (NFP). These four properties are mutually inequivalent, and the following relation holds: CR⇒NFP⇒UNC⇒UNR. Various results are known about the (un)decidability of the properties of TRSs. In particular, it is known that these four properties are decidable for left-linear and right-ground TRSs. TRSs in which the height of each rewriting rule is at most 1 are called flat TRSs. For flat TRSs, it is already known that CR is undecidable (Mitsuhashi et al., 2006), UNC is decidable (Radcliffe et al., 2017) and UNR is undecidable (Godoy et al., 2009); however, it is not known whether NFP is decidable or undecidable. In this paper, we show that NFP is undecidable for flat TRSs. To be exact, we extend the proof of the undecidability of CR by Mitsuhashi et al. (2006), and prove the undecidability of NFP for flat TRSs by reducing the PCP (Post Correspondence Problem) to it. Similarly, we give a new proof of the undecidability of UNR for flat TRSs by extending the proof of undecidability of CR by Mitsuhashi et al. (2006).

Keywords: term rewriting system, uniqueness of normal forms, decidability

1. はじめに

項書き換えシステム（TRS）は等式論理に基づく計算モデルである．また，これ以上計算できない項を正規形とよぶ．TRS による計算は非決定的な計算であるため，

[1] 新潟大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–2181, Japan
[a)] f19c018a@mail.cc.niigata-u.ac.jp
[b)] aoto@ie.niigata-u.ac.jp

正規形の一意性は TRS にとってとても重要な性質である．TRS の計算による正規形の一意性を保証する性質として，合流性（CR），可換に関する一意正規形性（UNC），簡約に関する一意正規形性（UNR），正規形性（NFP）が知られており，これらの性質については古くから知られている [9], [10]．また，これらの 4 つの性質は等価でなく，CR⇒NFP⇒UNC⇒UNR という関係がある [10]．合流性，UNC についてはいくつかの研究結果が知られている [1], [2]．UNR，NFP についてはあまり研究が行われていないが，文献 [5] などの研究がある．

制限のない TRS についてはこれら 4 つの性質が決定不能であるということは知られている．そこで，TRS に制限をかけていき，CR や UNC，UNR，NFP の決定可能と決定不能の境界に近づくことが行われてきた．たとえば左線形右基底 TRS に対してはこれらの 4 つの性質がすべて決定可能であることが知られている [4], [13]．また，すべての書き換え規則の高さがたかだか 1 である TRS をフラット TRS とよぶが，フラット TRS に対しては，CR が決定不能 [11]，UNC が決定可能 [12]，UNR が決定不能 [6] ということがすでに知られている．

NFP については決定可能か決定不能かは未解決な問題であった．本論文ではフラット TRS に対する NFP が決定不能であることを報告する．具体的には，三橋らの CR の決定不能性の証明を拡張し，ポストの対応問題をフラット TRS に対する NFP に帰着することで，それを証明する．また，同様に三橋らの CR の決定不能性の証明を拡張することにより，既存の手法とは異なる方法で UNR の決定不能性を証明する．これにより合流性の決定不能性の証明との差分が少なくなるため，本証明は CR の決定不能性と合わせて考えると Isabelle などの対話的定理証明器を使う場合により少ない労力で両者の形式的証明が書けるという利点がある．

本論文の構成について説明する．2 章では，本論文で用いる基本的な概念について述べる．3 章では，文献 [11] で用いられている記法や TRS，命題などを紹介する．4 章では，フラット TRS の UNR が決定不能であることを述べ，5 章ではフラット TRS の NFP が決定不能であることを述べる．6 章では関連研究について報告する．7 章は本論文のまとめである．

2. 準備

項書き換えシステムについては文献 [2]，オートマトンについては文献 [14] の記法を用いる．関数記号全体の集合を $\mathcal{F}$，変数全体の集合を $\mathcal{V}$ とする．関数記号は，それぞれ，引数の個数が決まっているものとする．この数をアリティという．また，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる項の集合を $\mathrm{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ と表す．また，項 t に現れる関数記号の集合を $\mathcal{F}(t)$，項 t の根記号を $\mathrm{root}(t)$ と書く．項 t の深さ $\mathrm{height}(t)$ を次のように定義する：t が変数または定数のとき $\mathrm{height}(t) = 0$，$t = f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき $1 + \max\{\mathrm{height}(t_1),\ldots,\mathrm{height}(t_n)\}$．

関数 $\sigma\colon \mathcal{V} \to \mathrm{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ で，集合 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを代入とよぶ．代入 σ の準同型拡張とは，次のように定義される関数 $\hat{\sigma}\colon \mathrm{T}(\mathcal{F},\mathcal{V}) \to \mathrm{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ をいう：$t \in \mathcal{V}$ のとき $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$，$t = f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき $f(\hat{\sigma}(t_1),\ldots,\hat{\sigma}(t_n))$．

代入 σ とその準同型拡張 $\hat{\sigma}$ を同一視して，$\hat{\sigma}$ と書くべきときも σ を用いる．また，以下では $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という表記を用いることもある．

空列を ϵ と書く．項の位置を正整数の列で表す．また，項 t の位置の集合を $\mathrm{Pos}(t)$ と書く．項 t の位置 p における部分項を $t|_p$ と書く．ホールとよばれる特別な定数 □ を 1 つだけ持つものを文脈とよぶ．文脈 $C[\ ]$ のホールの位置が p であることを明示したいときは $C[\ ]_p$ と書く．項 t の位置 p をホールに置き換えて得られる文脈を $t[\ ]_p$，項 t の位置 p を項 u に置き換えて得られる項を $t[u]_p$ と書く．

2 つの項 l, r が，$l \notin \mathcal{V}$, $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ を満たすとき，$l \to r$ を書き換え規則とよぶ．書き換え規則の有限集合を項書き換えシステム（TRS）とよぶ．

書き換え規則 $l \to r$ がフラットであるとは，$\mathrm{height}(l) \leq 1$ かつ $\mathrm{height}(r) \leq 1$ を満たすときにいう．TRS $\mathcal{R}$ に含まれるすべての書き換え規則がフラットであるとき，$\mathcal{R}$ はフラットであるという．

ある書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\ ]_p$ に対して，$s = C[l\sigma]_p$ かつ $t = C[r\sigma]_p$ となるとき，$s \underset{\mathcal{R}}{\to} t$ と書き，書き換えステップとよぶ．書き換えステップの $p, l \to r, \sigma$ を明示したいとき，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{p,l\to r,\sigma} t$ や $s \xrightarrow[\mathcal{R}]{p} t$ などと書くこともある．また，根位置以外での書き換えであることを明示したいときには $\xrightarrow{>\epsilon}$ と書く．$\to$ の対称閉包を $\leftrightarrow$，$\to$ の反射閉包を $\xrightarrow{=}$，$\to$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と表す．すなわち，$\leftrightarrow$ は両方向の書き換え，$\xrightarrow{=}$ は 0 または 1 ステップの書き換え，$\xrightarrow{*}$ は 0 ステップ以上の書き換えである．

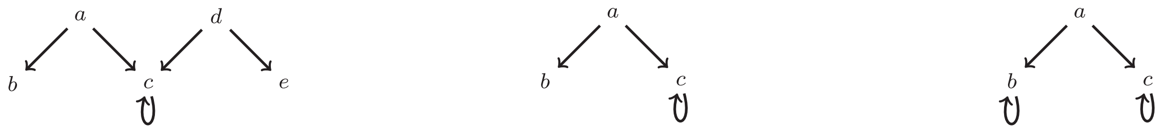
$s \underset{\mathcal{R}}{\to} t$ となるような t が存在しないとき，項 s を正規形とよぶ．$\underset{\mathcal{R}}{\to}$ に対する正規形の集合を $\downarrow_{\mathcal{R}}$ と記す．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t \in \downarrow_{\mathcal{R}}$ となるとき，項 t を項 s の正規形とよぶ．また，$\underset{\mathcal{R}}{\to}$ に対する項 t の正規形の集合を $t\downarrow_{\mathcal{R}}$ と書く．

$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ となる書き換え列が存在するとき，$\mathcal{R}$ 上で s から t へ到達可能であるという．

TRS $\mathcal{R}$ が合流性（*confluence*）を持つとは，$\xleftarrow[\mathcal{R}]{*} \circ \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \circ \xleftarrow[\mathcal{R}]{*}$ が成立するときをいう．$s \xleftrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ を満たす任意の正規形 s，t に対して $s = t$ が成り立つとき，TRS $\mathcal{R}$ は可換に関する一意正規形性（UNC）を持つという．また，$t \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ を満たす任意の項 s，任意の正規形 t，u に対して，つねに $t = u$ が成り立つとき，TRS $\mathcal{R}$ は簡約に関する一意正規形性（UNR）を持つという．TRS $\mathcal{R}$ が正規形性（NFP）を持つとは，$s \xleftrightarrow[\mathcal{R}']{*} t \in \downarrow_{\mathcal{R}}$ を満たす任意の項 s，t に

情報処理学会論文誌　プログラミング　Vol.14　No.2　15–24 (May 2021)

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{lll} a \to b, & d \to c, & c \to c \\ a \to c, & d \to e & \end{array} \right\} \qquad \mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{array}{ll} a \to b, & c \to c \\ a \to c & \end{array} \right\} \qquad \mathcal{R}_3 = \left\{ \begin{array}{ll} a \to b, & b \to b \\ a \to c, & c \to c \end{array} \right\}$$



$\mathrm{UNR}(\mathcal{R}_1) \wedge \neg\mathrm{UNC}(\mathcal{R}_1)$ 　　 $\mathrm{UNC}(\mathcal{R}_2) \wedge \neg\mathrm{NFP}(\mathcal{R}_2)$ 　　 $\mathrm{NFP}(\mathcal{R}_3) \wedge \neg\mathrm{CR}(\mathcal{R}_3)$

図 1　CR，NFP，UNC，UNR の差
Fig. 1　Differences of CR, NFP, UNC and UNR.

対して，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ が成り立つときにいう．CR，UNC，UNR，NFP はいずれも TRS の計算による正規形の一意性を保証する性質である．

CR，UNC，UNR，NFP には，CR $\Rightarrow$ NFP $\Rightarrow$ UNC $\Rightarrow$ UNR という関係がある [10]．また，TRS $\mathcal{R}$ が合流性を持つことを CR($\mathcal{R}$) と表し，合流性を持たないことを $\neg$CR($\mathcal{R}$) と表すこともある．UNC，UNR，NFP についても同様の記法を用いる．**図 1** に CR，UNC，UNR，NFP の 4 つの性質の違いを表す例を示す．

ある問題に対して YES/NO で答えることのできるプログラムが存在するときその問題は決定可能，YES/NO で答えることのできるプログラムが存在しないときその問題は決定不能であるという．Σ を文字の集合，Σ^+ を文字列の集合とする．$\{\langle u_i, v_i\rangle \in \Sigma^+ \times \Sigma^+ \mid 1 \le i \le k\}$ に対して，$u_{i_1} \cdots u_{i_n} = v_{i_1} \cdots v_{i_n}$ となる列 $i_1 \cdots i_n$ が存在するかという問題のことをポストの対応問題（PCP）という．PCP は決定不能であることが知られている．

例 1. $\langle u_1, v_1\rangle = \langle aab, aa\rangle, \langle u_2, v_2\rangle = \langle ba, bb\rangle, \langle u_3, v_3\rangle = \langle a, aba\rangle$ とする．$P = \{\langle u_1, v_1\rangle, \langle u_2, v_2\rangle, \langle u_3, v_3\rangle\}$ を PCP のインスタンスとする．$u_1u_2u_1u_3 = aabbaaaba = v_1v_2v_1v_3$ となるので，列 1213 は PCP P の解である．

有限オートマトンは 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, F, s)$ である．ここで，Q は状態の有限集合，Σ は入力文字の有限集合，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は遷移関数，$F \subseteq Q$ は受理状態の有限集合，$s \in Q$ は開始状態である．有限オートマトン M が受理するすべての文字列の集合を $L(M)$ と表す．

3.　フラット TRS の到達可能性の決定不能性

フラット TRS の到達可能性の決定不能性は文献 [11] によってすでに証明されている．この後の章のフラット TRS の UNR，NFP の決定不能性の証明は，文献 [11] の証明を拡張して行っている．この章では文献 [11] で用いられている記法や TRS，補題などを紹介する．

3.1　PCP の符号化

$P = \{\langle u_i, v_i\rangle \in \Sigma^+ \times \Sigma^+ \mid 1 \le i \le k\}$ を PCP のインスタンスとする．文字列 u の長さを $|u|$ と表し，$l_P = \max_{1 \le i \le k}(|u_i|, |v_i|)$ とする．

PCP P に解があるかどうかを TRS で判定することを考える．しかし，P の要素である $\langle u_i, v_i\rangle$ は文字列の対であり，このままでは TRS で扱うことが難しい．そこで，$\otimes$ という新たなオペレータを用いて文字列の対を新たな文字の列に変換する．具体的には新しい記号として $\Delta = \{1, \cdots, l_P\} \times (\Sigma \cup \{\_\})^2$ を用いる．変換の方法としては，u_i，v_i の 1 文字目から順に対にしていく．また，対にしていく際には 1 文字目から順に $1, \ldots, l_P$ というインデックスをつけていき，長さ l_P の 3 つ組の列を生成する．文字列の長さが l_P よりも短い場合には対にする文字が存在しないので，_ という記号を使って対を作ることとする．

$\otimes$: $\Sigma^+ \times \Sigma^+ \to \Delta^+$ の正式な定義を次に記す：$a_1 \cdots a_n \otimes a'_1 \cdots a'_m = \langle 1, a_1, a'_1\rangle \cdots \langle l_P, a_{l_P}, a'_{l_P}\rangle$．ここで，$a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_m \in \Sigma$，任意の $i \in \{n+1, \ldots, l_P\}$ に対して $a_i = \_$，任意の $j \in \{m+1, \ldots, l_P\}$ に対して $a'_j = \_$ である．

例 2. $l_P = 4$ とする．このとき，$ab \otimes bba = \langle 1, a, b\rangle\langle 2, b, b\rangle\langle 3, \_, a\rangle\langle 4, \_, \_\rangle$．ここで，$\Delta$ の要素が 1 つの記号として用いられていることに注意する．

$L(A) = \{u_i \otimes v_i \mid \langle u_i, v_i\rangle \in P\}^+$ となるような，有限オートマトン $A = (Q_A, \Delta, \delta_A, F_A, q_A)$ を考える．このとき，以下が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned} & d_0 \cdots d_m \in L(A) \\ & \Leftrightarrow \text{ある } i_1, \ldots, i_l (1 \le i_j \le k) \text{ が存在して}, d_0 \cdots d_m = \\ & \quad (u_{i_1} \otimes v_{i_1}) \cdots (u_{i_l} \otimes v_{i_l}) \end{aligned}$$

以下でこの有限オートマトンを用いて書き換え規則を定義する．書き換え規則のシグニチャはアリティ 1 の $d \in \Delta$ と定数の $q \in Q_A$，定数の e である．記号列 $d_0 \cdots d_n \in \Delta^+$ を書き換え規則で扱うために，$d_0(\cdots(d_n(e))\cdots)$ という項で符号化する．また遷移関数 $\delta(q_i, d) = q_j$ を書き換え規則 $q_i \to d(q_j)$ で表す．

$$T_A = \{q \to d(q') \mid q' \in \delta_A(q, d)\} \cup \{q \to e \mid q \in F_A\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} & d_0 \cdots d_m \in L(A) \\ & \Leftrightarrow q_A \xrightarrow[T_A]{*} d_0(d_1(\cdots(d_m(e))\cdots)) \end{aligned}$$

3.2 PCP の解の判定

これまでの符号化に基づくと，$q_A \xrightarrow[T_A]{*} \langle i_0, a_0, b_0\rangle(\cdots\langle i_N, a_N, b_N\rangle(e)\cdots)$ となったときに，左側の成分 $a_0 \cdots a_N$ と右側の成分 $b_0 \cdots b_N$ が一致していれば，PCP P に解が存在するということになる．ただし，$a_0 \cdots a_N$ と $b_0 \cdots b_N$ が一致しているか判定するときには，$\_$ を飛ばす必要がある．この判定を実現するための書き換え規則を用意していく．

まず，左側の成分を抜き出すための書き換え規則は以下のように定義できる．

$$\begin{aligned} \mathit{\Pi}_1 = \{&\langle n, a, a'\rangle(x) \to a(x) \\ &\mid n \in \{1, \ldots, l_P\}, a \in \Sigma, a' \in \Sigma \cup \{\_\}\} \\ \mathit{\Pi}_3 = \{&\langle n, \_, a'\rangle(x) \to x \\ &\mid n \in \{2, \ldots, l_P\}, a' \in \Sigma \cup \{\_\}\} \end{aligned}$$

$\mathit{\Pi}_1$，$\mathit{\Pi}_3$ に関して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\langle i_0, a_0, b_0\rangle(\cdots\langle i_N, a_N, b_N\rangle(e)\cdots) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow[\mathit{\Pi}_1 \cup \mathit{\Pi}_3]{*} a_{i_1}(\cdots a_{i_n}(e)\cdots) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{del}(a_0 \cdots a_N) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} \end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{del}(w)$ を文字列 w の $\_$ を消したものである．

同様にして右側の成分を抜き出すための書き換え規則は次のように定義できる．

$$\begin{aligned} \mathit{\Pi}_2 = \{&\langle n, a, a'\rangle(x) \to a'(x) \\ &\mid n \in \{1, \ldots, l_P\}, a \in \Sigma \cup \{\_\}, a' \in \Sigma\} \\ \mathit{\Pi}_4 = \{&\langle n, a, \_\rangle(x) \to x \\ &\mid n \in \{2, \ldots, l_P\}, a \in \Sigma \cup \{\_\}\} \end{aligned}$$

$\mathit{\Pi}_1$，$\mathit{\Pi}_3$ のときと同様に，$\mathit{\Pi}_2$，$\mathit{\Pi}_4$ に関して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\langle i_0, a_0, b_0\rangle(\cdots\langle i_N, a_N, b_N\rangle(e)\cdots) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow[\mathit{\Pi}_2 \cup \mathit{\Pi}_4]{*} b_{i_1}(\cdots b_{i_n}(e)\cdots) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{del}(b_0 \cdots b_N) = b_{i_1} \cdots b_{i_n} \end{aligned}$$

以上をまとめると，以下が成り立つことになる．

P の解が存在

$\Leftrightarrow q_A \xrightarrow[T_A]{*} s \xrightarrow[\mathit{\Pi}_1 \cup \mathit{\Pi}_3]{*} t,\ q_A \xrightarrow[T_A]{*} s \xrightarrow[\mathit{\Pi}_2 \cup \mathit{\Pi}_4]{*} t$

となる $t \in \mathrm{T}(\Sigma \cup \{e\})$ が存在

次に，$t \in \mathrm{T}(\Sigma \cup \{e\})$ を判定する必要があるため，これも有限オートマトンを用いて実現する．このために $L(B) = \Sigma^+$ となるような有限オートマトン $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, F_B, q_B)$ を考える．そして書き換え規則の集合 T_B を以下のように定義する．なお，有限オートマトン A のときと同様，書き換え規則のシグニチャは，アリティ 1 の $a \in \Sigma$，定数の $q \in Q_B$，定数の e である．

$$T_B = \{q \to a(q') \mid q' \in \delta_B(q, a)\} \cup \{q \to e \mid q \in F_B\}$$

このとき，$a_0 \cdots a_n \in L(B) \Leftrightarrow q_B \xrightarrow[T_B]{*} a_0(a_1(\cdots(a_n(e))\cdots))$ が成り立つ．

3.3 色付けの導入

以上で PCP を扱う準備はほぼ整ったが，実際に到達可能性を PCP に帰着させるためには更に工夫が必要となる．これが文献 [11] で導入された「色付け」というアイディアである．これは T_A，T_B，$\mathit{\Pi}_1$，$\mathit{\Pi}_2$，$\mathit{\Pi}_3$，$\mathit{\Pi}_4$ といった TRS の規則が干渉し合わないようにするための工夫である．

Σ と Δ の関数記号にそれぞれ 13 色 $0, \ldots, 12$ の色をつける．ただし，色付けした関数記号をすべては使わず，一部の色付けされた関数記号だけを使う．

i 色の関数記号 a を $a^{(i)}$ と記す．次のようにすべての Σ と Δ の関数記号に色をつける．ここで，$0 \leq i \leq 12$ である．

$$\begin{aligned} \Sigma^{(i)} &= \{a^{(i)} \mid a \in \Sigma\} \\ \Delta^{(i)} &= \{d^{(i)} \mid d \in \Delta\} \end{aligned}$$

まず，色を変更する書き換え規則を以下に定義する．

$$\begin{aligned} S^{(i,j)} &= \left\{a^{(i)}(x) \to a^{(j)}(x) \mid a \in \Sigma\right\} \\ P^{(i,j)} &= \left\{d^{(i)}(x) \to d^{(j)}(x) \mid d \in \Delta\right\} \end{aligned}$$

次に，書き換え規則 T_A，T_B，$\mathit{\Pi}_1$，$\mathit{\Pi}_3$，$\mathit{\Pi}_2$，$\mathit{\Pi}_4$ に対しても色付け版を定義する．

$$\begin{aligned} T_A^{(i,j)} &= \left\{q^{(i)} \to d^{(j)}(q'^{(i)}) \mid q' \in \delta_A(q, d)\right\} \\ &\quad \cup \left\{q^{(i)} \to e \mid q \in F_A\right\} \\ T_B^{(i,j)} &= \left\{q^{(i)} \to a^{(j)}(q'^{(i)}) \mid q' \in \delta_B(q, a)\right\} \\ &\quad \cup \left\{q^{(i)} \to e \mid q \in F_B\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{\Pi}_1^{(i,j)} &= \{\langle n, a, a'\rangle^{(i)}(x) \to a^{(j)}(x) \\ &\qquad \mid n \in \{1, \ldots, l_p\}, a \in \Sigma, a' \in \Sigma \cup \{\_\}\} \\ \mathit{\Pi}_3^{(i,j)} &= \{\langle n, \_, a'\rangle^{(i)}(x) \to x \\ &\qquad \mid n \in \{2, \ldots, l_p\}, a' \in \Sigma \cup \{\_\}\} \\ \mathit{\Pi}_2^{(i,j)} &= \{\langle n, a, a'\rangle^{(i)}(x) \to a'^{(j)}(x) \\ &\qquad \mid n \in \{1, \ldots, l_p\}, a \in \Sigma \cup \{\_\}, a' \in \Sigma\} \\ \mathit{\Pi}_4^{(i,j)} &= \{\langle n, a, \_\rangle^{(i)}(x) \to x \\ &\qquad \mid n \in \{2, \ldots, l_p\}, a \in \Sigma \cup \{\_\}\} \end{aligned}$$

次に，実現したい色替えの様子を以下に示す．

(1) $6 \underset{T_A}{\rightsquigarrow} 3 \underset{P}{\rightsquigarrow} 0$

(2) $7 \underset{T_A}{\rightsquigarrow} 3 \underset{\mathit{\Pi}_1, \mathit{\Pi}_3}{\rightsquigarrow} 1$

(3) $8 \underset{T_A}{\rightsquigarrow} 4 \underset{\mathit{\Pi}_2,\ \mathit{\Pi}_4}{\rightsquigarrow} 2$

(4) $9 \underset{T_A}{\rightsquigarrow} 4 \underset{P}{\rightsquigarrow} 0$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r, "\epsilon"] & f(& q_A^{(6)}, \arrow[d, "*"', "T_A^{(6,3)}"] & q_A^{(7)}, \arrow[d, "*"', "T_A^{(7,3)}"] & q_A^{(8)}, \arrow[d, "*"', "T_A^{(8,4)}"] & q_A^{(9)}, \arrow[d, "*"', "T_A^{(9,4)}"] & q_B^{(10)}, \arrow[d, "*"', "T_B^{(10,5)}"] & q_B^{(11)} \arrow[d, "*"', "T_B^{(11,5)}"] &) & & \\
& f(\arrow[d, "\epsilon"'] & s, & s, & t, & t, & u, & u &) & & \\
& g(& s, \arrow[d, "*"', "P^{(3,0)}"] & s, \arrow[d, "*"', "\Pi_1^{(3,1)}\ \Pi_3^{(3,1)}"] & t, \arrow[d, "*"', "\Pi_2^{(4,2)}\ \Pi_4^{(4,2)}"] & t, \arrow[d, "*"', "P^{(4,0)}"] & u, \arrow[d, "*"', "S^{(5,1)}"] & u, \arrow[d, "*"', "S^{(5,2)}"] & q_A^{(12)} \arrow[d, "*"', "T_A^{(12,0)}"] &) & \\
& g(& s', & s_L, & t_R, & s', & s_L, & t_R, & s' &) \arrow[r, "\epsilon"] & 1
\end{tikzcd}
$$

図 **2**　$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ の書き換えの概略図

Fig. 2　Overview of the reduction $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$.

(5) $10 \underset{T_B}{\rightsquigarrow} 5 \underset{S}{\rightsquigarrow} 1$

(6) $11 \underset{T_B}{\rightsquigarrow} 5 \underset{S}{\rightsquigarrow} 2$

(7) $12 \underset{T_A}{\rightsquigarrow} 0$

これらを実現するため，それぞれの場合に対して以下のような関数記号上の項書き換え規則を使用する．

(1) $Q_A^{(6)} \cup \Delta^{(3)} \cup \Delta^{(0)}$ 上の $T_A^{(6,3)} \cup P^{(3,0)}$

(2) $Q_A^{(7)} \cup \Delta^{(3)} \cup \Sigma^{(1)}$ 上の $T_A^{(7,3)} \cup \Pi_1^{(3,1)} \cup \Pi_3^{(3,1)}$

(3) $Q_A^{(8)} \cup \Delta^{(4)} \cup \Sigma^{(2)}$ 上の $T_A^{(8,4)} \cup \Pi_2^{(4,2)} \cup \Pi_4^{(4,2)}$

(4) $Q_A^{(9)} \cup \Delta^{(4)} \cup \Delta^{(0)}$ 上の $T_A^{(9,4)} \cup P^{(4,0)}$

(5) $Q_B^{(10)} \cup \Sigma^{(5)} \cup \Sigma^{(1)}$ 上の $T_B^{(10,5)} \cup S^{(5,1)}$

(6) $Q_B^{(11)} \cup \Sigma^{(5)} \cup \Sigma^{(2)}$ 上の $T_B^{(11,5)} \cup S^{(5,2)}$

(7) $Q_A^{(12)} \cup \Delta^{(0)}$ 上の $T_A^{(12,0)}$

このとき，必要になる関数記号は，e に加えて，

$$
\begin{aligned}
\Theta^{012} &= \Delta^{(0)} \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)} \\
\Theta^{345} &= \Delta^{(3)} \cup \Delta^{(4)} \cup \Sigma^{(5)} \\
Q &= Q_A^{(6)} \cup Q_A^{(7)} \cup Q_A^{(8)} \cup Q_A^{(9)} \cup Q_B^{(10)} \cup Q_B^{(11)} \cup Q_A^{(12)}
\end{aligned}
$$

である．最後に，用いる書き換え規則を全部まとめると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 = {} & T_A^{(6,3)} \cup T_A^{(7,3)} \cup T_A^{(8,4)} \cup T_A^{(9,4)} \cup T_B^{(10,5)} \cup T_B^{(11,5)} \\
& \cup P^{(3,0)} \cup \Pi_1^{(3,1)} \cup \Pi_2^{(4,2)} \cup \Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)} \\
& \cup P^{(4,0)} \cup S^{(5,1)} \cup S^{(5,2)} \cup T_A^{(12,0)}
\end{aligned}
$$

となる．

3.4　到達可能性による PCP の符号化

最後に，これまでの準備に基づいて PCP を到達可能性への符号化に用いる TRS を用意する．シグニチャとして，定数の 0，1，アリティ 6 の f，アリティ 7 の g を追加する．そして以下のように TRS $\mathcal{R}_1$ を定義する．

$$
\begin{tikzcd}
\underset{f/1,\ f/2}{\Delta^+ \ni s} \arrow[r, "*", "g/2"'] \arrow[d, equal, "g/1,\ g/4,\ g/7"'] & \underset{f/5}{s_L \in \Sigma^+} \arrow[d, equal, "g/5,\ g/6"] \\
\underset{f/3,\ f/4}{\Delta^+ \ni t} \arrow[r, "*", "g/3"'] & \underset{f/6}{t_R \in \Sigma^+}
\end{tikzcd}
$$

図 **3**　f と g の引数の役割

Fig. 3　Roles of each argument of f and g.

$$
\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \ \cup \left\{
\begin{array}{l}
0 \to f(q_A^{(6)}, q_A^{(7)}, q_A^{(8)}, q_A^{(9)}, q_B^{(10)}, q_B^{(11)}) \\
f(x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5) \\
\qquad \to g(x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5, q_A^{(12)}) \\
g(x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, x_0) \to 1
\end{array}
\right\}
$$

このとき，PCP P が解を持つことと $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ なる書き換えが存在することは同値となる．これを見るために，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ の書き換えがどのように PCP P を符号化しているかを説明する．まず，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ となるためには $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{} f(q_A^{(6)}, q_A^{(7)}, q_A^{(8)}, q_A^{(9)}, q_B^{(10)}, q_B^{(11)}) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} g(t_0, t_1, t_2, t_0, t_1, t_2, t_0) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{} 1$ となる必要がある．さらに，$f(q_A^{(6)}, q_A^{(7)}, q_A^{(8)}, q_A^{(9)}, q_B^{(10)}, q_B^{(11)}) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} g(t_0, t_1, t_2, t_0, t_1, t_2, t_0)$ の部分を見てみると，根記号が f から g に代わる書き換えステップが必ず含まれるはずである．ここで，色情報を加味すると，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ の書き換えの概略図は図 **2** のようになることが分かる．

次に，この書き換えの存在が PCP P が解をどのようにチェックしているのかをまとめたものが図 **3** である．以下，f/n で f の第 n 引数を表す．g/n も同様である．

PCP P の解は，s と t の両方となっており，s と t の等価性が $g/1$，$g/4$，$g/7$ で判断されている．$s \in \Delta^+$ であることを判断するのが $f/1$，$f/2$ である．また，$t \in \Delta^+$ であることは $f/3$，$f/4$ で判断している．s からは解の左側の成分 $s_L \in \Sigma^+$ が，t からは解の右側の成分 $t_R \in \Sigma^+$ が抜き出されている．これらを抜き出す操作を実行しているのが，それぞれ，$g/2$ と $g/3$ の部分である．また，$s_L \in \Sigma^+$

の判定は $f/5$ で，$t_R \in \Sigma^+$ の判定は $f/6$ で行われている．最後に，s_L と t_R の等価性の判定をする必要があるが，これが行われているのが $g/5$，$g/6$ の部分である．

命題 3 （文献 [11]）．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow$ PCP P が解を持つ

以下，本論文では，命題 3 を利用して，フラット TRS に対する UNR および NFP の決定不能性の証明を与える．

4. フラット TRS の UNR の決定不能性

本章ではフラット TRS の UNR が決定不能であることを示す．

$1'$ を新たな定数とする．$\mathcal{R}_1$ に書き換え規則を追加した $\mathcal{R}_3$，$\mathcal{R}$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cup \{0 \to 1'\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 &\cup \left\{d^{(0)}(x) \to d^{(0)}(x) \mid d \in \Delta\right\} \\ &\cup \left\{ \begin{array}{l} a^{(1)}(x) \to a^{(1)}(x) \\ a^{(2)}(x) \to a^{(2)}(x) \end{array} \;\middle|\; a \in \Sigma \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{array}{l} e \to e \\ f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\ \qquad \to f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\ g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) \\ \qquad \to g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

$0 \to 1'$ は 0 を正規形 $1'$ に書き換えるための規則である．これにより $0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ が成り立つとき 0 は異なる 2 つの正規形 1，$1'$ を持つことになる．その他の追加規則はループするだけの書き換え規則であるが，これは正規形を 1 と $1'$ のみにするために追加した規則である．

本章の主定理を示す．

定理 4. フラット TRS の UNR は決定不能である．

命題 3 より，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ が存在することと $\mathcal{R}$ が UNR でないことが同値であることをいえれば，この定理が成り立つ．以下の小節では，この同値性を次の 2 ステップに分けて示す．

$$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1 \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \mathcal{R} \text{ が UNR でない}$$

4.1 ステップ（1）：$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ と $0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ の同値性

$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ を示す．

$\varphi(t)$ を項 t に現れるすべての $1'$ を 0 に置き換えた項とする．文脈 C についても同様に $\varphi(C)$ を定める．また，代入 σ に対して，$\varphi(\sigma) = \{s := \varphi(t) \mid s := t \in \sigma\}$ とする．

補題 5. 任意の項 s，t に対して，$s \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{} t \Rightarrow \varphi(s) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{=} \varphi(t)$．

(証明)． $s \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{} t$ となる項 s，t を任意にとり固定する．

(1) $s \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{} t$ のとき．
$s = C[l\sigma]$，$t = C[r\sigma]$ を満たす $l \to r \in \mathcal{R}_1$，文脈 C，代入 σ が存在する．$1' \notin \mathcal{F}(l)$ より $\varphi(l) = l$ なので，この C に対して，$\varphi(s) = \varphi(C[l\sigma]) = \varphi(C)[\varphi(l\sigma)] = \varphi(C)[\varphi(l)\varphi(\sigma)] = \varphi(C)[l\varphi(\sigma)]$ となる．$1' \notin \mathcal{F}(r)$ より同様にして，$\varphi(t) = \varphi(C)[r\varphi(\sigma)]$ となる．よって，

$$\varphi(s) = \varphi(C)[l\varphi(\sigma)] \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{p,l\to r,\varphi(\sigma)} \varphi(C)[r\varphi(\sigma)] = \varphi(t)$$

(2) $s \xrightarrow[\{0\to 1'\}]{} t$ のとき．
$s = C[0], t = C[1']$ を満たす文脈 C が存在して，この C に対して，$\varphi(s) = \varphi(C)[0]$，$\varphi(t) = \varphi(C)[0]$ が成り立つ．

よって (1)，(2) より，$\varphi(s) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{=} \varphi(t)$ が成立する． □

系 6. 任意の項 s，t に対して，$s \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} t \Rightarrow \varphi(s) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} \varphi(t)$．

系 7. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1$．

(証明)．（⇒）$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_3$ より自明．（⇐）系 6 より，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1 \Rightarrow \varphi(0) \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} \varphi(1) \Rightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1$ □

次に $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ を示す．$\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}_3$ にいくつかのループする書き換え規則を付け加えたものであるため，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ を示すことは難しくない．

補題 8. 任意の項 s，t に対して，$s \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} t \Leftrightarrow s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$．

(証明)．（⇒）$\mathcal{R}_3 \subseteq \mathcal{R}$ より自明．（⇐）まず，$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} t' \Rightarrow s' \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{=} t'$ を示す．$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} t'$ とする．

(1) $s' \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{} t'$ のときは明らかに成立．

(2) $s' \xrightarrow[\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_3]{l\to r,\sigma} t'$ のとき．$s' = C[l\sigma]$, $t' = C[r\sigma]$ となる文脈 C が存在する．また，このとき $l = r$ なので，$s' = t'$．

よって $s' \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{=} t'$ となる．以上より，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t \Rightarrow s \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} t$ が成り立つ． □

系 9. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$．

(証明)． 系 7，補題 8 より，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_3]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ となり成立． □

4.2 ステップ（2）：$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ と $\neg$UNR($\mathcal{R}$) の同値性

次に，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}$ が UNR でない，を示す．（⇒）については，1，$1'$ がいずれも 0 の正規形になっていることから容易に示すことができる．（⇐）は，$\mathcal{R}$ が UNR でないと仮定したときに，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ でないとすると矛盾が生じることを用いて証明する．また，$\mathcal{R}$ が UNR でない ということは，$s \in T(\mathcal{V}, \mathcal{F})$，$t$，$u \in \mathcal{V} \cup \{1, 1'\}$ で $t \neq u$，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ となるものが存在するということと同値なので，これを満たすサイズ最小の s の存在を仮定して矛盾を示す．以下の補題は s がある形をしている場合には s としてより小さい項が存在することを示している．

補題 10. $d \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345}$，$t \in \{1, 1'\} \cup \mathcal{V}$ とすると，$d(s) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t \Rightarrow s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ が成立する．

(証明)． $d(s) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t, d \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345}$，$t \in \{1, 1'\} \cup \mathcal{V}$ とする．書き換え規則より以下が成り立つ：

$$d(u) \xrightarrow[\mathcal{R}]{>\epsilon} d(u') \Rightarrow u \xrightarrow[\mathcal{R}]{} u'$$

$$d(u) \xrightarrow[\Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)}]{\epsilon} u' \Rightarrow u = u'$$

$$d(u) \xrightarrow[\mathcal{R} \setminus (\Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)})]{\epsilon} v \Rightarrow \begin{array}{l} v = d'(u) \text{ となる} \\ d' \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345} \text{が存在} \end{array}$$

ここで，$d \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345}$ より，$d(u)$ に対して T_A，T_B の各規則による根位置での書き換えをすることはできないことに注意する．また，書き換え列 $d(s) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ の中で，少なくとも 1 回は $\xrightarrow[\Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)}]{\epsilon}$ による書き換えが行われているので，

$$d(s) \left(\xrightarrow[\mathcal{R}]{>\epsilon} \cup \xrightarrow[\mathcal{R} \setminus (\Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)})]{\epsilon} \right)^* d'(s')$$

$$\xrightarrow[\Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_4^{(4,2)}]{\epsilon} s'' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$$

となる．よって，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' = s'' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ となるので成立する． □

補題 11. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}$ が UNR でない

(証明). ($\Rightarrow$) $0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ とする．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{} 1'$ であり 1，$1' \in \downarrow_{\mathcal{R}}$ なので，$\mathcal{R}$ は UNR でない．

($\Leftarrow$) $\mathcal{R}$ は UNR でないとする．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ が成立しないと仮定する．

$\downarrow_{\mathcal{R}} = \mathcal{V} \cup \{1, 1'\}$ であるので，ある $s \in \mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ で，

$$\exists t, u \in \mathcal{V} \cup \{1, 1'\}.\ t \neq u, s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t, s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u \quad \cdots (\alpha)$$

を満たすものが存在する．これを満たすサイズ最小の s をとり固定する．

(1) $s = 0$ のとき．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s'$ とする．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ は成立しないので書き換え規則より，$\mathrm{root}(s') \in \{0, f, g, 1'\}$ となる．よって，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' \in \mathcal{V} \cup \{1, 1'\}$ とすると $s' = 1'$ となるので (α) に矛盾．

(2) $s = e$ のとき．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' \Rightarrow s' = e$ となるので，(α) に矛盾．

(3) $\mathrm{root}(s) \in \{f, g\}$ のとき．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s'$ とする．書き換え規則より，$\mathrm{root}(s') \in \{f, g, 1\}$ となるので (1) のときと同様に (α) に矛盾．

(4) $s = d(s')$，$d \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345}$ のとき．$s \xrightarrow[R]{*} t, s \xrightarrow[R]{*} u$ とすると補題 10 より，$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ かつ $s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ となる．よって，s の最小性に矛盾．

(5) $s \in Q$ のとき．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s'$ とする．書き換え規則より，$\mathcal{F}(s') \subseteq Q \cup \Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \{e\}$ となるので (α) に矛盾．

(6) $s = 1, 1'$ または $s \in \mathcal{V}$ のとき．$s \in \downarrow_{\mathcal{R}}$ より (α) に矛盾．

よって，(α) を満たす最小の s は存在しない．よって $0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ が成立する． □

5. フラット TRS の NFP の決定不能性

本章ではフラット TRS の NFP が決定不能であることを示す．

5.1 準備

フラット TRS の NFP が決定不能であることの証明は，文献 [11] のフラット TRS の合流性が決定不能であることの証明に変更を加えて行う．これには，3 章で紹介した準備に加えて，文献 [11] の証明で用いられた，いくつかの TRS や命題がさらに必要となる．このため，本節ではそれらを紹介する．

関数 $\phi : \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が与えられたとして，それを次のように TRS にも拡張する：$\phi(\mathcal{R}) = \{\phi(\alpha) \to \phi(\beta) \mid \alpha \to \beta \in \mathcal{R}\} \setminus \{t \to t \mid t \in \mathrm{T}\}$．

命題 12 （文献 [11]）．任意の TRS $\mathcal{R}$ について，$\mathcal{R}$ が合流性を持つことと (1)–(4) の条件をすべて満たす ϕ: $\mathrm{T} \to \mathrm{T}$ が存在することは同値である．

(1) $s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} t \Rightarrow \phi(s) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R})]{*} \phi(t)$

(2) $\xrightarrow[\phi(\mathcal{R})]{} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}]{*}$

(3) $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \phi(t)$

(4) $\phi(\mathcal{R})$ が合流性を持つ．

次に $\mathcal{R}_1$ にいくつかの書き換え規則を追加することによって得られる，$\mathcal{R}_2$ を定義する．追加する書き換え規則は，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} 1$ が成立するときに $d \in \Theta^{012}$ を消去するための書き換え規則と，e を 0 に書き換える規則である．これを実現するために新たな関数記号 $\Theta_2^{012} = \{d_2 \mid d \in \Theta^{012}\}$ を用意する．ここで，d_2 のアリティは 2 である．

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{e \to 0\} \cup \left\{ \begin{array}{l|l} d(x) \to d_2(0, x) & \\ d_2(1, x) \to x & d \in \Theta^{012} \end{array} \right\}$$

0 から 1 への書き換えについて次の命題が成り立つ．

命題 13 （文献 [11]）．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$

関数記号だけからなる項のことを基底項とよぶ．G_2 を $\Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \Theta_2^{012} \cup Q \cup \{f, g, e, 0, 1\}$ 上の項の集合，つまりすべての基底項の集合と定義する．

命題 14 （文献 [11]）．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成り立つとき，任意の $t \in G_2$ に対して $t \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成立する．

次に，$\phi(t)$ を項 t のすべての極大な基底部分項を 1 に置き換える関数とする．このとき，

$$\phi(\mathcal{R}_0) = P^{(3,0)} \cup \Pi_1^{(3,1)} \cup \Pi_3^{(3,1)} \cup \Pi_2^{(4,2)} \cup \Pi_4^{(4,2)} \cup P^{(4,0)} \cup S^{(5,1)} \cup S^{(5,2)}$$

$$\phi(\mathcal{R}_1) = \phi(\mathcal{R}_0) \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5) \\ \qquad \to g(x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5) \\ g(x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, x_0) \to 1 \end{array} \right\}$$

$$\phi(\mathcal{R}_2) = \phi(\mathcal{R}_1) \cup \left\{ \begin{array}{l|l} d(x) \to d_2(1, x) & \\ d_2(1, x) \to x & d \in \Theta^{012} \end{array} \right\}$$

となる．

命題 15 （文献 [11]）．任意の $h \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \{f, g\} \cup \Theta_2^{012}$ に対して，$h(1, \ldots, 1) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}_2)]{*} 1$ が成り立つ．

命題 14，命題 15 より，次の命題が得られる．

命題 16 （文献 [11]）．$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成り立つとき，以下が成立する．

(1) $s \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{} t \Rightarrow \phi(s) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}_2)]{*} \phi(t)$

(2) $\xrightarrow[\phi(\mathcal{R}_2)]{} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*}$

(3) $t \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} \phi(t)$

(4) $\phi(\mathcal{R}_2)$ が合流性を持つ．

なお，文献 [11] では，命題 16 を利用して，$\mathcal{R}_2$ が合流性を持つことが，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ と同値であり，したがって，命題 3，13 より，PCP P が解を持つこととも同値になること（したがって，フラット TRS の合流性が決定不能であること）を示している．

次の節ではこれらの命題と命題 3 を利用してフラット TRS の NFP の決定不能性を示す．

5.2 フラット TRS の NFP の決定不能性

フラット TRS の NFP の決定不能性を証明するために，$\mathcal{R}_2$ に 2 つの書き換え規則を追加することによって $\mathcal{R}'$ を定義する．また，新たなシグニチャとして定数の $0'$ を追加する．

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_2 \cup \left\{ \begin{array}{c} 0' \to 0 \\ 0' \to 1 \end{array} \right\}$$

補題 17. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$

(証明)． ($\Rightarrow$) $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}'$ より成立．($\Leftarrow$) $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成立すると仮定する．$\mathcal{R}'$ の書き換え規則の右辺に $0'$ が現れるものは存在しない．よって，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ の書き換えの中に $0'$ という関数記号は現れないので $\mathcal{R}' \setminus \mathcal{R}_2 = \{0' \to 0,\ 0' \to 1\}$ に含まれる書き換え規則が使われることはない．よって $0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成立する．□

以下で $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つならば $\mathcal{R}'$ が合流性を持つことを示す．証明の流れは前節で紹介した文献 [11] の証明と同様である．

G' を $\Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \Theta_2^{012} \cup Q \cup \{f, g, e, 0, 1, 0'\}$ 上の項の集合とする．G' はすべての基底項の集合である．

補題 18. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つとき，任意の $t \in G'$ に対して $t \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成立する．

(証明)． $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つと仮定する．補題 17 より，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成り立つ．よって命題 14 より，任意の $s \in G'$ に対して $s \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成立する．

任意の $t \in G'$ をとり固定する．$t \xrightarrow[\{0' \to 1\}]{*} t' \in G_2$ となる t' が存在する．$t' \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ となるので $t \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成立する．□

次に $\phi(\mathcal{R}')$ について考える．$\phi(0') \to \phi(0) = 1 \to 1$, $\phi(0') \to \phi(1) = 1 \to 1$ より，$\phi(\mathcal{R}') = \phi(\mathcal{R}_2)$ となる．

補題 19. 任意の $h \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \{f, g\} \cup \Theta_2^{012}$ に対して，$h(1, \ldots, 1) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}')]{*} 1$ が成り立つ．

(証明)． 命題 15 より，任意の $h \in \Theta^{012} \cup \Theta^{345} \cup \{f, g\} \cup \Theta_2^{012}$ に対して，$h(1, \ldots, 1) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}_2)]{*} 1$ が成り立つ．$\phi(\mathcal{R}_2) = \phi(\mathcal{R}')$ となるので成立する．□

補題 20. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つとき，以下が成立する．

(1) $s \xrightarrow[\mathcal{R}']{} t \Rightarrow \phi(s) \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}')]{*} \phi(t)$

(2) $\xrightarrow[\phi(\mathcal{R}')]{} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}']{*}$

(3) $t \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} \phi(t)$

(4) $\phi(\mathcal{R}')$ が合流性を持つ．

(証明)． $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つと仮定する．補題 17 より，$0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1$ が成り立つ．よって命題 16 の (1)–(4) が成立する．

(1) $s \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{} t$ のとき．命題 16 (1) より明らか．
$s \xrightarrow[\{0' \to 0, 0' \to 1\}]{} t$ のとき．$s|_p = 0', t = s[b]_p (b \in \{0, 1\})$ となる p が存在する．s, t の極大基底項の位置は変わらないので，$\phi(s) = \phi(t)$ となる．

(2) 命題 16 (2) より，

$$\xrightarrow[\phi(\mathcal{R}')]{} = \xrightarrow[\phi(\mathcal{R}_2)]{} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} \subseteq \xrightarrow[\mathcal{R}']{*}$$

となるので成立．

(3) 補題 18 より成立．

(4) 命題 16 (4) より $\phi(\mathcal{R}') = \phi(\mathcal{R}_2)$ が合流性を持つので成立．

□

補題 21. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1 \Rightarrow \mathcal{R}'$ が合流性を持つ．

(証明)． 命題 12，補題 20 より成立する．□

補題 22. $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}'$ が NFP である．

(証明)． ($\Rightarrow$) $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ を仮定する．補題 21 より，$\mathcal{R}'$ は合流性を持つ．CR $\Rightarrow$ NFP が成り立つので，$\mathcal{R}'$ は NFP である．

($\Leftarrow$) $\mathcal{R}'$ は NFP であると仮定する．$0 \xleftarrow[\mathcal{R}']{} 0' \xrightarrow[\mathcal{R}']{} 1 \in \downarrow_{\mathcal{R}'}$ となるので $0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1$ が成り立つ．□

定理 23. フラット TRS の NFP は決定不能である．

(証明)． 以下より成立する．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' \text{が NFP である} &\Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}']{*} 1 \ \text{(補題 22 より)} \\ &\Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_2]{*} 1 \ \text{(補題 17 より)} \\ &\Leftrightarrow 0 \xrightarrow[\mathcal{R}_1]{*} 1 \ \text{(補題 13 より)} \\ &\Leftrightarrow \text{PCP } P \text{ が解を持つ（命題 3 より）} \end{aligned}$$

□

6. 関連研究

本章ではすでに知られている CR，UNC，UNR，NFP の決定可能性に関する結果について紹介する．

まずは以下で用いる TRS の性質について説明する．項

表 1　主なクラスの決定可能性，決定不能性
Table 1　(Un)decidability results for some classes of TRSs.

	CR	NFP	UNC	UNR
左線形右基底	決定可能	決定可能	決定可能	決定可能
線形フラット	決定可能	?	決定可能	決定可能
右線形フラット	決定可能	?	決定可能	決定不能
フラット	決定不能	決定不能	決定可能	決定不能
線形シャロー	決定可能	?	決定可能	決定可能
右線形シャロー	決定可能	?	決定可能	決定不能
シャロー	決定不能	決定不能	決定可能	決定不能

が変数を含まないとき，その項は基底であるといい，項が同じ変数を 2 つ以上含まないとき，その項は線形であるという．項 t がシャローであるとは，s が変数または $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ で，s_i $(1 \leq i \leq n)$ が変数または基底項であるときをいう．

$p \in \{$基底，線形，フラット，シャロー$\}$ とする．書き換え規則 $l \to r$ が p であるとは，項 l，r がいずれも p であるときをいう．また，書き換え規則 $l \to r$ が左 p であるとは，項 l が p であるときをいい，書き換え規則 $l \to r$ が右 p であるとは，項 r が p であるときをいう．TRS が p であるとは，すべての書き換え規則が p であるときをいい，TRS が右（左）p であるとは，すべての書き換え規則が右（左）p であるときをいう．

定義より，フラット TRS $\subseteq$ シャロー TRS，基底 TRS $\subseteq$ シャロー TRS，基底 TRS $\subseteq$ 線形 TRS の関係が成り立つ．

左線形右基底 TRS については第一階の書き換え理論の決定可能性が知られており，それにより CR，UNC，UNR，NFP がいずれも決定可能であることが導かれる [4], [13]．その他の TRS のクラスにおける決定（不）可能性を以下にまとめる．なお，決定可能性については極大なクラス，決定不能性については極小なクラスのみを示す．

CR の決定可能性について以下が知られている．
- 決定可能な TRS のクラス
  右線形シャロー TRS [8]
- 決定不能な TRS のクラス
  フラット TRS [11]

UNC の決定可能性について以下が知られている．
- 決定可能な TRS のクラス
  シャロー TRS [12]
- 決定不能な TRS のクラス
  右基底 TRS [15]

UNR の決定可能性について以下が知られている．
- 決定可能な TRS のクラス
  線形シャロー TRS [6]
- 決定不能な TRS のクラス
  線形右フラット TRS [7]
  右線形フラット TRS [6] *1

NFP については知られていない．

以上の結果から導かれる，いくつかの主要なクラスにおける決定（不）可能性を**表 1** にまとめる．表中の四角で囲まれている箇所が，本論文で新たに得られた結果である．

7. まとめ

本論文ではフラット TRS に対する UNR と NFP が決定不能であることの証明を報告した．フラット TRS に対する UNR の決定可能性についてはすでに知られている [3], [6] が，対話的証明器による形式化を考える際には有用性が期待される．フラット TRS の NFP の決定不能性についてはこれまでは知られていなかった性質であり，決定可能と決定不能の境界により近づくことができた．

謝辞　適切な指摘を詳細にしてくださった査読者の方に深く感謝する．

なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 18K11158 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] Aoto, T. and Toyama, Y.: Automated proofs of unique normal forms w.r.t. conversion for term rewriting systems, *Proc. 12nd International Symposium on Frontiers of Combining Systems* (*FroCoS 2019*), LNAI, Vol.11175, pp.330–347, Springer-Verlag (2019).

[2] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press (1998).

[3] Comon, H. and Jacquemard, F.: Ground reducibility is EXPTIME-complete, *Information and Computation*, Vol.187, No.1, pp.123–153 (2003).

[4] Dauchet, M. and Tison, S.: The theory of ground rewrite systems is decidable, *Proc. 5th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (*LICS 1990*), pp.242–248, IEEE Computer Society Press (1990).

[5] Felgenhauer, B.: Deciding confluence and normal form properties of ground term rewrite systems efficiently, *Logical Methods in Computer Science*, Vol.14, No.4, pp.1–35 (2018).

[6] Godoy, G. and Jacquemard, F.: Unique Normalization for Shallow TRS, *Proc. 20th International Conference on Rewriting Techniques and Applications* (*RTA 2009*), LNCS, Vol.5595, pp.63–77, Springer-Verlag (2009).

[7] Godoy, G. and Tison, S.: On the Normalization and Unique Normalization Properties of Term Rewrite Systems, *Proc. 21st International Conference on Automated Deduction* (*CADE-21*), LNAI, Vol.4603, pp.247–262, Springer-Verlag (2007).

[8] Godoy, G. and Tiwari, A.: Confluence of Shallow Right-Linear Rewrite Systems, *Proc. 19th International Workshop on Computer Science Logic* (*CSL 2005*), LNCS, Vol.3634, pp.541–556, Springer-Verlag (2005).

[9] Klop, J.W.: *Term Rewriting Systems*, pp.1–116, Oxford University Press, Inc. (1993).

[10] Middeldorp, A.: Modular aspects of properties of term rewriting systems related to normal forms, *Proc. 3rd International Conference on Rewriting Techniques and*

*1 文献 [6] の補題 9，11 には間違いがあり，証明は正しくないと考えられる．著者らが知る限り，現在までのところ，正しい証明は報告されていない．

Applications (*RTA 1989*), LNCS, Vol.355, pp.263–277, Springer-Verlag (1989).
[11] Mitsuhashi, I., Oyamaguchi, M. and Jacquemard, F.: The Confluence Problem for Flat TRSs, *Proc. 8th International Conference on Artificial Intelligence and Symbolic Computation* (*AISC 2006*), LNAI, Vol.4201, pp.68–81, Springer-Verlag (2006).
[12] Radcliffe, N.R., Moraes, L.F.T. and Verma, R.M.: Uniqueness of Normal Forms for Shallow Term Rewrite Systems, *ACM Trans. Computational Logic*, Vol.18, No.2, pp.17:1–17:20 (2017).
[13] Rapp, F. and Middeldorp, A.: Automating the First-Order Theory of Rewriting for Left-Linear Right-Ground Rewrite Systems, *Proc. 1st International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction* (*FSCD 2016*), LIPIcs, Vol.52, pp.36:1–36:12, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik (2016).
[14] Sipser, M.: 計算理論の基礎，共立出版 (2008).
[15] Verma, R.: Complexity of Normal Form Properties and Reductions for Term Rewriting Systems, *Fundamenta Informaticae*, Vol.92, No.1-2, pp.145–168 (2009).

佐藤 悠稀

1997 年生．2019 年新潟大学工学部情報工学科卒業．現在，同大学自然科学研究科電気情報工学専攻情報工学コース博士前期課程に在籍．書き換えシステムの研究に従事．

青戸 等人　（正会員）

1969 年生．1997 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了．同年同大学情報科学研究科助手．1998 年群馬大学工学部助手．2003 年東北大学電気通信研究所講師，2004 年同助教授，2007 年同准教授．2015 年より新潟大学自然科学系教授．博士（情報科学）．書き換えシステム，定理自動証明，ソフトウェア基礎の研究に従事．ソフトウェア科学会，ACM，EATCS 各会員．