情報処理学会論文誌　プログラミング　Vol.14　No.2　1–14 (May 2021)

圏論に基づく正則項上の単一化の形式化

宮前 海里[1,a)]　青戸 等人[1,b)]

受付日 2020年9月29日, 採録日 2021年1月15日

概要：自動推論において単一化は重要な役割を果たす．さまざま形式体系では，通常，有限項を対象とすることが多いが，遅延リストやストリームなどの仮想的に無限長と見なされるデータを扱うために対象を無限項に拡張した体系が提案されている．無限項の中でも部分項が有限個のみの項を正則項とよぶ (Courcelle, 1983)．正則項は有限項の等式集合である再帰式表現を用いて記述することができる．正則項の単一化について岩見と青戸 (2012) によって以下が示されている．(1) 再帰式表現の解が再帰式表現の最汎単一化子である．(2) 正則項の単一化子が再帰式表現から構成できる等式の単一化子と対応する．本論文ではこれらの結果を圏論を用いて一般化する．正則項の圏論を用いた定式化について，Aczel ら (2003) は，反復可能な関手によって特徴付けられる終余代数を考え，正則項を表す射が再帰式表現から一意的に定まることを示している．また，Rydeheard と Burstall (1986) により，余等化子を用いた最汎単一化子の圏論上での定式化が与えられている．上記の (1)，(2) の結果を一般化するために，最汎単一化子をクライスリ圏上の余等化子として与えて，再帰式表現の解が余等化子になることを示す．圏論上で一般化することにより，集合の圏と多項式的な関手を用いれば元の結果が得られるばかりでなく，たとえば，完備半順序の圏や有限部分集合を返す関手についても本結果を適用することができる．

キーワード：正則項，終余代数，単一化，モナド，クライスリ圏

A Category-theoretic Formalization of Unification over Rational Terms

Kairi Miyamae[1,a)]　Takahito Aoto[1,b)]

Received: September 29, 2020, Accepted: January 15, 2021

Abstract: Unification plays an important role in automated reasoning. Various formal systems usually deal with finite terms; on the other hand, in order to deal with lazy lists or streams, which can be virtually regarded as infinite data, infinite terms are considered in some systems. A rational term is an infinite term which has only finite many subterms (Courcelle, 1983). A rational term can be given finitely by using regular systems. On the unification over rational terms, the following facts are given by Iwami and Aoto (2012). (1) The solution of a regular system is the most general unifier of that regular system. (2) A unifier of rational terms corresponds a unifier of equations constructed by the regular systems specifying those terms. In this paper, we generalize these results using category theory. In their category-theoretic formalization of rational terms, Aczel et al. (2003) considered final coalgebras characterized by iteratable functors, and showed that arrows which represent rational terms are uniquely determined by guarded equations. In addition, the category-theoretic formalization of most general unifier using coequalizer was given by Rydeheard and Burstall (1986). To generalize the results (1) and (2) above, we formalize a most general unifier as a coequalizer in a Kleisli category and show that the solution of guarded equation becomes a coequalizer. Thanks to the formalization based on category theory, not only the original results on rational terms are obtained by considering the category of sets and a polynomial functor, but we can also apply our results, for example, to the category of completely partially ordered sets or the functor that returns finite subsets for each given set.

Keywords: rational term, final coalgebra, unification, monad, Kleisli category

1. はじめに

自動推論において単一化は最も重要な概念の 1 つであり，関数型言語の型推論や項書き換えシステムの完備化手続きなどに応用されている．通常，さまざまな形式体系で有限項のみを対象とするため，有限項の単一化については広く研究されている [1], [2]．一方，無限リストやストリームなどの仮想的に無限長と見なされるデータを扱うため，対象を無限項に拡張した体系が提案されている [3], [4]．無限項の中でも部分項が有限個のみの項は正則項とよばれ，正則項は有限項の等式集合を用いて表せることが知られている [5]．また，岩見と青戸によって正則項上の単一化について次の事実が知られている [6]．

(1) 再帰式表現の解が再帰式表現の最汎単一化子である．
(2) 正則項の単一化子が再帰式表現から構成できる等式の単一化子と対応する．

本論文ではこれらの結果を圏論を用いて一般化する．

本論文では圏（category）とよばれる構造を扱う [7], [8]．圏は対象と射からなる構造で対象と射としてさまざまな概念を考えることができる．たとえば，対象として集合を，射として写像をとれる．他にも対象として完備半順序集合，射として連続写像をとることでも圏を構成でき，また，対象としてモノイド，射としてモノイド準同型をとることでも圏になる．以上のように多くの概念を圏としてとらえることができるため，圏論を用いることで非常に一般的な理論を展開できる．

終余代数は無限長と見なせるデータを扱うための枠組みである [9]．Aczel らは反復可能関手によって特徴付けられる終余代数を用いて，正則項を表す射が再帰式表現から一意に定まることを圏論的に示した [10]．圏論的な単一化の扱いについては Rydeheard と Burstall により，クライスリ圏（Kleisli category）上の余等化子を用いた単一化の定式化が与えられている [11]．

正則項に関する圏論による定式化および，単一化に関する定式化はすでに存在するが，両者を結び付ける理論はまだ存在しない．そこで本論文では，上記の正則項の単一化に関する結果 (1)，(2) を一般化する定式化を与える．

本論文の構成は以下のとおりである．2 章では圏論と正則項に関する基本事項を紹介し，上記の結果 (1)，(2) の形式的な言明を与える．3 章では Aczel らによる正則項の圏論的な定式化を簡単にまとめる．4 章で上記の結果 (1) を圏論的に定式化し，証明を与える．5 章で上記の結果 (2) を圏論的に定式化し，証明を与える．6 章に関連研究をあげる．7 章は本論文の結果をまとめ，今後の課題を述べる．

[1] 新潟大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–2181, Japan
[a] f19c031h@mail.cc.niigata-u.ac.jp
[b] aoto@ie.niigata-u.ac.jp

2. 準備

本章では本論文で用いる圏論の概念と正則項の基本的な事項を簡単に説明する．詳細は，圏論については文献 [7], [8] など，正則項については文献 [5], [6] を参照していただきたい．

2.1 圏，終余代数，モナド，クライスリ圏

圏とは対象のクラスと射のクラスおよび射から対象への対応 dom と cod からなる．射 f が $\mathrm{dom}(f) = A$ および $\mathrm{cod}(f) = B$ のとき，$f : A \to B$ と書き，A を f の始域，B を f の終域とよぶ．また，圏は次の条件を満たさなければならない．

(1) 射 f，g が $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき，f と g を合成した射 $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ が存在する．
(2) すべての対象 A について射 $1_A : A \to A$ が存在し，任意の射 $f : A \to B$ について，$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ となる．
(3) 任意の射 $f : A \to B$，$g : B \to C$，$h : C \to D$ について，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

例として，対象を集合，射を写像とすることで集合の圏 **Sets** ができる．また，対象を完備半順序，射を連続写像とすることで完備半順序の圏 **CPO** ができる．順序集合 $(P, \leq)$ について，対象を P の元，$a \leq b$ のときかつそのときに限り，射 $a \to b$ が 1 つ存在すると決めることで圏になる．特に，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ に通常の順序を考えることで圏になる．この圏を ω と書く．

圏 $\mathbf{C}$ の対象 A，B が同型とは射 $f : A \to B$，$g : B \to A$ が存在して，$f \circ g = 1_B$，$g \circ f = 1_A$ となることである．このとき，$f : A \to B$ に対して $g : B \to A$ は一意に決まるため，$g = f^{-1}$ と書き，f を同型射とよぶ．また，A と B が同型であることを $A \cong B$ または同型射を明示して，$f : A \cong B$ と書く．圏論では同型な対象は区別せず，同じ対象として扱う．

圏 $\mathbf{C}$ の対象 1 が終対象であるとは，任意の対象 A について射 $! : A \to 1$ が唯一存在することである．**Sets** では終対象は元が 1 つの集合 $\{*\}$ である．

対象 A，B の余積 $A + B$ とは射 $\mathrm{inl} : A \to A + B$，$\mathrm{inr} : B \to A + B$ が存在して，任意の射 $f : A \to X$，$g : B \to X$ について，$u \circ \mathrm{inl} = f$，$u \circ \mathrm{inr} = g$ を満たす射 $u : A + B \to X$ が一意に存在するような対象のことをいう．射 u は f，g について一意に存在するので，$u = [f, g]$ と書く．圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象 A，B について余積 $A + B$ が存在するとき，$\mathbf{C}$ は 2 項余積を持つという．**Sets** は 2 項余積を持つ圏であり，余積は非交差和に等しい．

2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{C}$ の射 $f : A \to B, g : C \to D$ から $[\mathrm{inl} \circ f, \mathrm{inr} \circ g] : A + C \to B + D$ という射が構成できる．これを $f + g$ と書く．つまり，$f + g = [\mathrm{inl} \circ f, \mathrm{inr} \circ g]$

である．ここで対象 X と恒等射 1_X は 1 対 1 対応するため，$f+X$ と書いて $f+1_X$ を表したり $Y+g$ と書いて 1_Y+g を表す．また，$\circ$ は $+$ より結合力が強いと約束する．すなわち，$s\circ t+f\circ g$ は $(s\circ t)+(f\circ g)$ を意味する．

上の定義では 2 つの対象についてその余積を定義した．これを変更して，3 つの対象の余積を定義できる．つまり，対象 A, B, C の余積 $A{+}B{+}C$ とは射 $\mathrm{in}_1 : A \to A{+}B{+}C$, $\mathrm{in}_2 : B \to A+B+C$，$\mathrm{in}_3 : C \to A+B+C$ が存在して，任意の射 $f : A \to X$，$g : B \to X$，$h : C \to X$ について，$u\circ \mathrm{in}_1 = f$，$u\circ \mathrm{in}_2 = g$，$u\circ \mathrm{in}_3 = h$ を満たす射 $u : A+B+C \to X$ が一意に存在する対象である．射 u は f，g，h について一意に存在するので，$u=[f,g,h]$ と書く．

圏 $\mathbf{C}$ が 2 項余積を持つとすると，$\mathbf{C}$ には 3 対象の余積も存在する．3 対象の余積としては $(A{+}B){+}C$ と $A{+}(B{+}C)$ の 2 つのとり方があるが，これらは同型になるため，どちらをとってもかまわない．同様にして，任意の自然数 $n \ge 2$ について $\mathbf{C}$ が 2 項余積を持てば，$\mathbf{C}$ は n 対象の余積を持つ．一般に n 個の対象 $X_1,\dots,X_n$ について，それらの余積を $\coprod_{i=1}^{n} X_i$ と書く．

始域と終域が一致する 2 つの射 f，$g : A \to B$ について，f と g の余等化子とは射 $c : B \to C$ で次の 2 つの条件を満たすものである．

(1) $c\circ f = c\circ g$.

(2) 射 $d : B \to D$ が $d\circ f = d\circ g$ ならば，一意な射 $e : C \to D$ が存在して $e\circ c = d$ となる．

圏 $\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$ について，関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは $\mathbf{C}$ の対象 A を $\mathbf{D}$ の対象 $F(A)$ に，$\mathbf{C}$ の射 f を $\mathbf{D}$ の射 $F(f)$ に対応させ，次の条件を満たすものである．

(1) $\mathbf{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について $F(f) : F(A) \to F(B)$.

(2) $\mathbf{C}$ の任意の対象 A について $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

(3) $\mathbf{C}$ の任意の射 $f : A \to B$，$g : B \to C$ について，$F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$.

対象 A に関手 F を適用して得られる対象を $F(A)$ と書くが，括弧が明らかな場合は括弧を省略して FA と書く．同様に射への適用も括弧を省略する．なお，適用は最も強い結合力を持つものとする．

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$，$G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ について，合成関手 $G\circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ が存在する．また，恒等関手 $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ も自明に存在する．

関手 F，$G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ について，自然変換 $\theta : F \to G$ とは $\mathbf{C}$ の各対象 A に $\mathbf{D}$ の射 $\theta_A : FA \to GA$ を対応させるもので，$\mathbf{C}$ の任意の射 $f : A \to B$ について，$\theta_B\circ Ff = Gf\circ\theta_B$ となるものである．

圏 $\mathbf{C}$ と関手 $F : J \to \mathbf{C}$ について，F の極限とは $\mathbf{C}$ の対象 L と J の対象で添字付けられた $\mathbf{C}$ の射の族 $\{l_i : L \to Fi\}_{i\in J}$ の組 $(L, \{l_i : L \to Fi\}_{i\in J})$ であって，次を満たすものである．

(1) J の任意の射 $\alpha : i \to j$ について，$l_j = F\alpha\circ l_i$.

(2) $\mathbf{C}$ の対象と射の族の組 $(C, \{c_i : C \to Fi\}_{i\in J})$ が J の任意の射 $\alpha : i \to j$ について，$c_j = F\alpha\circ c_i$ を満たすならば，一意な射 $f : C \to L$ が存在して，J の任意の対象 i について，$c_i = l_i\circ f$.

圏 $\mathbf{C}$ において圏 J からの任意の関手 $F : J \to \mathbf{C}$ について F の極限が存在するならば，$\mathbf{C}$ は J-完備であるという．また，関手 $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が J-連続とは任意の関手 $F : J \to \mathbf{C}$ について F の極限を $(L, \{l_i : L \to Fi\}_{i\in J})$ としたとき，$(GL, \{Gl_i : GL \to G(Fi)\}_{i\in J})$ が $G\circ F : J \to \mathbf{D}$ の極限となることである．

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ について F-余代数とは $\mathbf{C}$ の対象と射の組 $(A, a : A \to FA)$ のことである．F-終余代数とは F-余代数 $(D, d : D \to FD)$ であって，任意の F-余代数 $(A, a : A \to FA)$ について射 $f : A \to D$ があって，$d\circ f = Ff\circ a$ となるものをいう．

F-終余代数について次が成り立つ．

補題 1（Lambek [7]）．F-終余代数 $(D, d : D \to FD)$ について，$d : D \cong FD$.

また，F-終余代数が存在するための十分条件として次が知られている．

命題 2（Barr [12]）．終対象を持つ圏 $\mathbf{C}$ が ω-完備で，$F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ が ω-連続ならば F-終余代数が存在する．

圏 $\mathbf{C}$ でのモナドとは，関手 $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ と自然変換 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to T$ および，自然変換 $\mu : T\circ T \to T$ の 3 つ組 (T, η, μ) であって，任意の対象 X について，$\mu_X\circ T\mu_X = \mu_X\circ\mu_{TX}$ かつ $\mu_X\circ T\eta_X = \mu_X\circ\eta_{TX} = 1_{TX}$ となるものである．

圏 $\mathbf{C}$ 上のモナド (T, η, μ) について，次のようにして圏 $\mathbf{C}_T$ を定義できる．

- $\mathbf{C}_T$ の対象は $\mathbf{C}$ の対象とする．
- $\mathbf{C}_T$ の射 $f : A \to B$ とは $\mathbf{C}$ における射 $f : A \to TB$ とする．
- $\mathbf{C}_T$ の射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$，つまり $\mathbf{C}$ における $f : A \to TB$ と $g : B \to TC$ について，$\mathbf{C}_T$ における合成 $g\circ_T f : A \to C$ を $g\circ_T f = \mu_C\circ Tg\circ f$ で定義する．

$$A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{\mu_C} TC$$

- $\mathbf{C}_T$ における恒等射 $1_A : A \to A$ は $\mathbf{C}$ の射 $\eta_A : A \to TA$ とする．

この圏 $\mathbf{C}_T$ を T のクライスリ圏とよぶ．圏 $\mathbf{C}$ の合成 $\circ$ とクライスリ圏 $\mathbf{C}_T$ での合成 $\circ_T$ について，$f\circ_T(g\circ h) = (f\circ_T g)\circ h$ が成り立つので，括弧を省略して $f\circ_T g\circ h$ と書く．

2.2　正則項と再帰式表現

次に正則項と再帰式表現の解についての基本事項を紹介する．Σ を関数記号の集合，X を変数の集合とし，それぞれの関数記号には引数の個数が定まっているものとする．n 引数の関数記号の集合を Σ_n と書き，正整数の有限列の集合を $\mathbb{N}_+^*$ と書く．空列を ϵ で表し，有限列 p，$q \in \mathbb{N}_+^*$ の連結を $p.q$ で表す．部分関数 $t : \mathbb{N}_+^* \to \Sigma \cup X$ が以下の条件を満たすとき，t を Σ，X 上の項とよぶ．

(1) $t(\epsilon) \in \Sigma \cup X$.

(2) 任意の $p \in \mathbb{N}_+^*$ に対して, $t(p.i) \in \Sigma \cup X \iff t(p) \in \Sigma_n$ かつ $1 \leq i \leq n$.

Σ, X 上の項の集合を $T_\Sigma X$ と書く．

関数記号の集合 $\Sigma = \{f^2\}$ と変数集合 $X = \{x\}$ を考える．ここで，関数記号を f^2 と書くことで関数記号 f が 2 引数であることを表す．次で定義される部分関数 $t_1 : \mathbb{N}_+^* \to \Sigma \cup X$ は Σ, X 上の項である．

$$t_1(p) = \begin{cases} f & (p = \epsilon \text{ または } p = q.1) \\ x & (p = q.2) \end{cases}$$

項 $t \in T_\Sigma X$ の定義域 $\mathrm{Pos}(t) = \{p \in \mathbb{N}_+^* \mid t(p) \in \Sigma \cup X\}$ の要素を t における位置とよぶ．位置集合 $\mathrm{Pos}(t)$ が有限集合であるとき，項 t を有限であるという．項 t に出現する変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と書く．項 t の位置 $p \in \mathrm{Pos}(t)$ での部分項を $t|_p(q) = t(p.q)$ なる項 $t|_p$ と定義する．項 t の部分項の集合を $\mathrm{Subterms}(t) = \{t|_p \mid p \in \mathrm{Pos}(t)\}$ と定義する．

写像 $\sigma : X \to T_\Sigma Y$ を代入とよぶ．代入 σ を項 $t \in T_\Sigma X$ に適用した結果の項 $\sigma(t) \in T_\Sigma Y$ を次で定義する．

$$\sigma(t)(p) = \begin{cases} \sigma(t(p_0))(p_1) & (p = p_0.p_1 \text{ かつ } t(p_0) \in X) \\ t(p) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\sigma(t)$ は t に出現する変数 $x \in X$ を $\sigma(x)$ で置き換えた結果得られる項を表す．$\sigma : X \to T_\Sigma Y$ が $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ かつ $\sigma(x_i) = u_i$ のとき，σ を $\{x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n\}$ とも表す．$\sigma : X \to T_\Sigma Y$ について，X が有限集合で任意の $x \in X$ について $\sigma(x)$ が有限項のとき，σ を有限代入とよぶ．

等式を $s \approx t$ と表す．ここでは $s, t \in T_\Sigma X$ とする．代入 $\sigma : X \to T_\Sigma(X \cup Y)$ を等式集合 $\{x \approx \sigma(x) \mid x \in X\}$ と同一視することがある．等式集合 E に出現する変数の集合を次で定義する：$\mathcal{V}(E) = \bigcup_{s \approx t \in E} \mathcal{V}(s) \cup \mathcal{V}(t)$.

等式集合 E の単一化子とは，任意の等式 $s \approx t \in E$ に対して $\sigma(s) = \sigma(t)$ となる代入 σ のことである．等式集合 E の単一化子の集合を $\mathrm{Unif}(E)$ と表す．代入上の擬順序 $\preceq$ を $\theta \preceq \eta \iff$ ある代入 ρ が存在して $\eta = \rho \circ \theta$ と定義する．単一化子のうち $\preceq$ に関して極小なものを最汎単一化子とよぶ．

項 t の部分項集合 $\mathrm{Subterms}(t)$ が有限集合のとき，t を正則項とよぶ．有限代入 $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\} : \{x_1, \ldots, x_n\} \to T_\Sigma(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup X)$ が以下の条件を満すとき，再帰式表現とよび $[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ と書く．

$$\begin{aligned} &\neg(\exists i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}. \\ &\quad (\forall j.\ 1 \leq j < k \Rightarrow t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \wedge t_{i_k} = x_{i_1}) \end{aligned}$$

再帰式表現 $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ について項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を以下のように相互再帰的に定義する．

$$\begin{aligned} &\theta^\star(x_i)(p) \\ &= \begin{cases} t_i(p) & (p \in \mathrm{Pos}(t_i) \text{ かつ } t_i(p) \notin \{x_1, \ldots, x_n\}) \\ \theta^\star(x_j)(r) & (p = q.r \text{ かつ } t_i(q) = x_j) \end{cases} \end{aligned}$$

項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を再帰式表現の解とよぶ．再帰式表現の定義から $\theta^\star(x_i)$ は well-defined である．$\theta^\star$ によって代入 $\{x_1 := \theta^\star(x_1), \ldots, x_n := \theta^\star(x_n)\}$ を表す．直感的には $\theta^\star$ は θ を無限回合成したものである．再帰式表現 $\theta = [y := f(y, x)]$ についてその解 $\theta^\star(y)$ は上記の項 t_1 に一致する．

ここで，正則項と再帰式表現について次の命題が知られている．

命題 3（文献 [5]）．再帰式表現の解は正則項である．また，任意の正則項はある再帰式表現の解である．

命題 4（再帰式表現の最汎単一化子 [6]）．$\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とする．このとき代入 $\theta^\star$ は再帰式表現 θ に対応する等式集合 $\{x_1 \approx t_1, \ldots, x_n \approx t_n\}$ の最汎単一化子である．

命題 5（再帰式表現に基づく単一化問題 [6]）．$\theta = [x_1 := s_1, \ldots, x_n := s_n]$ および $\gamma = [y_1 := t_1, \ldots, y_n := t_n]$ を $x_1, \ldots, x_n \notin \mathcal{V}(\gamma)$ かつ $y_1, \ldots, y_n \notin \mathcal{V}(\theta)$ なる再帰式表現とする．$s = \theta^\star(x_1), t = \gamma^\star(y_1)$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} &\tau \in \mathrm{Unif}(\theta \cup \gamma \cup \{x_1 \approx y_1\}) \\ &\iff \exists \rho \in \mathrm{Unif}(\{s \approx t\}).\ \tau = \rho \circ (\theta^\star \cup \gamma^\star). \end{aligned}$$

本論文の目的は命題 4 および命題 5 を圏論を用いて証明し，一般化することである．そのための土台として，Aczel らによる再帰式表現の解についての圏論的な取り扱い [10] を用いる．次章では Aczel らの結果を簡単にまとめる．

3.　反復可能関手と解の定理

Aczel らによって，再帰式表現とその解の存在についての圏論的な取り扱いが示されている [10]．本章では Aczel らの結果を簡単にまとめる．

定義 6（反復可能関手）．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と，関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を考える．このとき，$\mathbf{C}$ の対象 X について関手 $H_X^\star : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を $H_X^\star(-) = H(-) + X$ とおく．$\mathbf{C}$ の任意の対象 X について $H_X^\star$-終余代数が存在するとき，H は反復可能（iteratable）という．

例 7．2 項余積と終対象を持つ ω-完備な圏 $\mathbf{C}$ と ω-連続な関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ について考える．このとき，$H^{\star}_{X}(-) = H(-) + X$ も ω-連続なので，命題 2 より H は反復可能である．

例 8. Σ を関数記号の有限集合とする．Σ の関数記号で最大の引数を $|\Sigma|$ と書く．このとき，$H_{\Sigma}(-) = \coprod_{n=0}^{|\Sigma|} \Sigma_n \times (-)^n$ とすることで関手 $H_{\Sigma} : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$ が定義できる．関手 H_{Σ} は ω-連続であり，$\mathbf{Sets}$ は ω-完備なので，H_{Σ} は反復可能である．このとき，$T_{\Sigma}X$ が $H^{\star}_{\Sigma,X}$-終余代数になる．岩見らの結果はこの関手 H_{Σ} に固定して考えた場合に対応する．

定義 9（反復可能関手 H から誘導される T_X, η_X, τ_X）．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の反復可能関手 H を考える．$\mathbf{C}$ の各対象 X について $H^{\star}_{X}$-終余代数を $(T_X, \alpha_X : T_X \to H(T_X) + X)$ と書く．このとき，補題 1 より α_X は同型射なので，$\alpha_X^{-1} : H(T_X) + X \to T_X$ が存在する．余積の定義より，α_X^{-1} は 2 つの射に分解できる．その分解を $\alpha_X^{-1} = [\tau_X, \eta_X]$ と書く．ここで，$\tau_X : H(T_X) \to T_X, \eta_X : X \to T_X$ となる．

命題 10（代入定理 [10]）．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の反復可能関手 H と $H^{\star}_{X}$-終余代数 (T_X, α_X) を考える．このとき，$\mathbf{C}$ の任意の射 $s : X \to T_Y$ について $\mathbf{C}$ の射 $\widehat{s} : T_X \to T_Y$ であって，$\widehat{s} \circ \tau_X = \tau_Y \circ H\widehat{s}$ かつ $\widehat{s} \circ \eta_X = s$ となるものが一意に存在する．$\widehat{s}$ を s の拡張とよぶ．

命題 10 の系として次が導かれる．

系 11（文献 [10]）．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の関手 H が反復可能とする．$\mathbf{C}$ の対象 X について $H^{\star}_{X}$-終余代数 (T_X, α_X) の対象部分である T_X を対応させ，$\mathbf{C}$ の射 $f : A \to B$ については $\widehat{\eta_B \circ f}$ を対応させればこの対応は関手になる．この関手を T と書く．対象 X に $\eta_X : X \to TX$ を対応させるとこの対応が自然変換 $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to T$ を与える．対象 X に $\widehat{1_{TX}} : T^2X \to TX$ を対応させるとこの対応が自然変換 $\mu : T^2 \to T$ を与える．さらに，(T, η, μ) がモナドになる．つまり，任意の対象 X について次の等式を満たす．

$$\mu_X \circ T\eta_X = 1_X = \mu_X \circ \eta_{TX}$$

$$\mu_X \circ T\mu_X = \mu_X \circ \mu_{TX}$$

また，対象 X に $\tau_X : H(TX) \to TX$ を対応させるとこの対応が自然変換 $\tau : H \circ T \to T$ を与える．

ここで，$\mu_X = \widehat{1_{TX}}$ なことと $\widehat{\ }$ の性質から，

$$\mu_X \circ \tau_{TX} = \widehat{1_{TX}} \circ \tau_{TX} = \tau_X \circ H\widehat{1_{TX}} = \tau_X \circ H\mu_X \quad (1)$$

となることに注意する．

定義 12. $\mathbf{C}$ を 2 項余積を持つ圏，$H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を反復可能関手とする．このとき，系 11 よりモナド (T, η, μ) が誘導される．このモナドを H の完全反復モナド（completely iterative monad）とよぶ．

定義 13．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の反復可能関手 H と H の完全反復モナド (T, η, μ) を固定する．ここで $\mathbf{C}$ の射 $e : X \to T(X + Y)$ が再帰式表現（guarded equation）とは射 $f : X \to H(T(X + Y)) + Y$ が存在して，$e = [\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr}] \circ f$ となることである．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[drr, "f"'] & & T(X+Y) \\
& & H(T(X+Y)) + Y \arrow[u, "{[\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr}]}"']
\end{tikzcd}$$

例 14．関数記号の集合として $\Sigma = \{h^1, g^2\}$ を考える．このとき，Σ から反復可能関手 H_{Σ} が誘導され，H_{Σ} から関手 T_{Σ} が誘導される．このとき，直感的には τ_X は関数記号と項から項を作る関数, η_X は変数から項を作る関数である．等式集合 $\{x \approx h(x), y \approx g(y, a)\}$ を考える．$X = \{x, y\}$, $Y = \{a\}$ として，$e : X \to T_{\Sigma}(X+Y)$ を $e(x) = h(x)$, $e(y) = g(y, a)$ と定義する．このとき，$f : X \to H_{\Sigma}(T_{\Sigma}(X + Y)) + Y$ を $f(x) = (h, x), f(y) = (g, y, a)$ とすることで，e は再帰式表現であることが分かる．

例 14 より，岩見ら [6] の意味での再帰式表現は Aczel ら [10] の意味での再帰式表現の例になっていることが分かる．

命題 15（解の定理 [10]）．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の反復可能関手 H と H の完全反復モナド (T, η, μ) を考える．任意の再帰式表現 $e : X \to T(X + Y)$ について，射 $e^{\dagger} : X \to TY$ であって，$e^{\dagger} = \mu_Y \circ T[e^{\dagger}, \eta_Y] \circ e$ を満たすものが一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e^{\dagger}"] \arrow[d, "e"'] & TY \\
T(X+Y) \arrow[r, "{T[e^{\dagger}, \eta_Y]}"'] & T^2Y \arrow[u, "\mu_Y"']
\end{tikzcd}$$

命題 15 における等式はクライスリ圏 $\mathbf{C}_T$ における合成を用いて，$e^{\dagger} = [e^{\dagger}, \eta_Y] \circ_T e$ と表せることに注意する．

例 16．例 14 の $e : X \to T_{\Sigma}(X + Y)$ について，$e^{\dagger} : X \to T_{\Sigma}Y$ は, $e^{\dagger}(x) = f(f(f(\dots)))$, $e^{\dagger}(y) = g(g(g(\dots, a), a), a)$ である．

4. 圏論による再帰式表現の最汎単一化子

本章の目標は命題 4 を Aczel らの圏論による再帰式表現と解の取り扱いをもとにして一般化することである．

最初に，圏論の意味での単一化子を定式化する．この定式化のアイデアは文献 [11], [13] によるものである．

関数記号の集合 Σ から誘導される関手 $H_{\Sigma} : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$

について，項の集合 $T_\Sigma X$ は $H^\star_{\Sigma,X}$-終余代数として特徴付けることができた．$T_\Sigma X$ の単一化子について観察してみる．

等式集合 $E = \{s_i \approx t_i | i \in I\} \subseteq (T_\Sigma X)^2$ について f，$g : I \to T_\Sigma X$ を $f(i) = s_i$，$g(i) = t_i$ で定義すると，代入 $\sigma : X \to T_\Sigma Y$ が E の単一化子とは $\sigma \circ_{T_\Sigma} f = \sigma \circ_{T_\Sigma} g$ となることである．ここで，$\circ_{T_\Sigma}$ は一般のモナドに対して定義できるため，単一化子の定義を一般化できる．

このアイデアを基に圏論での単一化子を定式化する．

定義 17（単一化子）．圏 $\mathbf{C}$ とその上のモナド (T, η, μ) を任意にとる．クライスリ圏 $\mathbf{C}_T$ 上の射 f，$g : X \to Y$ について，$\sigma : Y \to Z$ が f と g の単一化子であるとは $\sigma \circ_T f = \sigma \circ_T g$ を満たすことである．

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\ \sigma\ } Z \qquad \text{in } \mathbf{C}_T$$

また，$\sigma : Y \to Z$ が f と g の最汎単一化子とは，f，g の余等化子であることと定義する．すなわち，σ は f，g の単一化子であって任意の $\gamma : Y \to W$ について γ が f，g の単一化子のとき，$u \circ_T \sigma = \gamma$ となる $u : Z \to W$ が一意に存在することである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\gamma"'] & Z \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & W \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}_T$$

ここでの議論はすべて $\mathbf{C}_T$ 上で行われており，各射 $X \to Y$ は圏 $\mathbf{C}$ では $X \to TY$ なる射であることと，合成はすべて $\circ_T$ であることに注意する．

この定式化の下で再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Y)$ を等式集合だと思ったとき，$\theta^\dagger : X \to TY$ が最汎単一化子になることを圏論的に導くことを考える．

3 章でみたように，再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Y)$ は等式集合 $E = \{x \approx \theta(x) \mid x \in X\}$ に対応させることができる．ここで，$\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} : X \to T(X+Y)$ を考えると，$\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ は等式集合 E の左辺を表すと見なせる．よって，現在の定式化のもとで θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子は E の単一化子だと見なせる．一方，θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子は $X+Y \to TZ$ なる射であり，$\theta^\dagger : X \to TY$ とは始域が一致していない．そこで，$\theta^\dagger : X \to TY$ の代わりに $[\theta^\dagger, \eta_Y] : X+Y \to TY$ を考えよう．すると，射 $[\theta^\dagger, \eta_Y]$ は θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子になる．

補題 18．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および H の完全反復モナド (T, η, μ) について考える．再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Y)$ について，$[\theta^\dagger, \eta_Y]$ が θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子である．

証明．　$[\theta^\dagger, \eta_Y]$ が θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子であるとは，$[\theta^\dagger, \eta_Y] \circ_T \theta = [\theta^\dagger, \eta_Y] \circ_T (\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl})$ となることである．ここで右辺を変形すると，

$$\begin{aligned} &[\theta^\dagger, \eta_Y] \circ_T (\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}) = ([\theta^\dagger, \eta_Y] \circ_T \eta_{X+Y}) \circ \mathrm{inl} \\ &= [\theta^\dagger, \eta_Y] \circ \mathrm{inl} \\ &\quad (\eta_{X+Y} \text{ は } \mathbf{C}_T \text{ の恒等射}) \\ &= \theta^\dagger \\ &= [\theta^\dagger, \eta_Y] \circ_T \theta \\ &\quad (\text{命題 } 15) \end{aligned}$$

となり目的の式が得られた．□

ここで，命題 4 をふまえると $[\theta^\dagger, \eta_Y]$ が最汎単一化子になると予想される．これは次の補題で与えられる再帰式表現の解を考えることで示される．

補題 19．2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および，H の完全反復モナド (T, η, μ) について考える．任意の $\theta : X \to T(X+Y)$ と $t : Y \to TZ$ について，θ が再帰式表現ならば $\mu_{X+Z} \circ T[\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}] \circ T(1_X + t) \circ \theta : X \to T(X+Z)$ も再帰式表現である．

証明．　θ が再帰式表現であることから $f : X \to H(T(X+Y)) + Y$ が存在して $\theta = [\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr}] \circ f$ となる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & T(X+Y) \\ & H(T(X+Y))+Y \arrow[u, "{[\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr}]}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}$$

すると，以下に示すように次の 2 つの等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &T(1_X + t) \circ [\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr}] \\ &= [\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ} \circ \mathrm{inr}] \circ (H(T(1_X + t)) + t) \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mu_{X+Z} \circ T[\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}] \circ [\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ} \circ \mathrm{inr}] \\ &= [\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inr}] \circ ([1_{H(T(X+Z))}, H(T\mathrm{inr})] + 1_Z) \\ &\circ a \circ (1_{H(T(X+Z))} + \alpha_Z) \circ (H\mu_{X+Z} + 1_{TZ}) \\ &\circ (H(T[\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]) + 1_{TZ}) \qquad (3) \end{aligned}$$

式 (2)，(3) が表す状況を**図 1** に示す．

ここで，a は $a : H(T(X+Z)) + (H(TZ) + Z) \cong (H(T(X+Z)) + H(TZ)) + Z$ なる同型射を表し，$[[f, g], h] \circ a = [f, [g, h]]$ を満たすとする（そのような a は余積の定義からつねに存在する）．

式 (2) は次の式変形から示される．なお，余積の定義に基づいた変形は明示しない．

$$\begin{aligned} &\underline{T(1_X + t) \circ [\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inr}]} \\ &= [\underline{T(1_X + t) \circ \tau_{X+Z}}, \underline{T(1_X + t) \circ \eta_{X+Z}} \circ \mathrm{inr}] \\ &= [\tau_{X+TZ} \circ H(T(1_X + t)), \eta_{X+TZ} \circ \underline{(1_X + t) \circ \mathrm{inr}}] \\ &\quad (\tau, \eta \text{ の自然性}) \\ &= \underline{[\tau_{X+TZ} \circ H(T(1_X + t)), \eta_{X+TZ} \circ \mathrm{inr} \circ t]} \\ &= [\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ} \circ \mathrm{inr}] \circ (H(T(1_X + t)) + t) \end{aligned}$$

式 (3) は次の式変形から示される．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & T(X+Y) \arrow[r, "T(1_X+t)"] & T(X+TZ) \arrow[r, "{T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]}"] & T^2(X+Z) \arrow[r, "\mu_{X+Z}"] & T(X+Z) \\
 & H(T(X+Y))+Y \arrow[u, "{[\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y}\circ \mathrm{inr}]\ \ (2)}"'] \arrow[r, "H(T(1_X+t))+t"'] & H(T(X+TZ))+TZ \arrow[u, "{[\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ}\circ \mathrm{inr}]}"'] \arrow[d, "{H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ}}"] & & \\
 & & H(T^2(X+Z))+TZ \arrow[d, "H\mu_{X+Z}+1_{TZ}"] \arrow[r, phantom, "(3)"] & & \\
 & & H(T(X+Z))+TZ \arrow[d, "1_{H(T(X+Z))}+\alpha_Z"] & & \\
 & & H(T(X+Z))+(H(TZ)+Z) \arrow[d, "a"] & & \\
 & & (H(T(X+Z))+H(TZ))+Z \arrow[rr, "{[1_{H(T(X+Z))}, H(T\mathrm{inr})]+1_Z}"] & & H(T(X+Z))+Z \arrow[uuuuu, "{[\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z}\circ \mathrm{inr}]}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{in } \mathbf{C}
$$

図 1　補題 19 の証明中における式 (2)，(3) が表す状況
Fig. 1　Situation at Eqs. (2), (3) in the proof of Lemma 19.

$$\underline{[\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z}\circ \mathrm{inr}]\circ([1, HT\mathrm{inr}]+1_Z)}\circ a\circ(1+\alpha_Z)$$
$$\circ\,(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=[\underline{\tau_{X+Z}\circ[1, HT\mathrm{inr}]}, \eta_{X+Z}\circ \mathrm{inr}]\circ a\circ(1+\alpha_Z)$$
$$\circ\,(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=[[\tau_{X+Z}, \underline{\tau_{X+Z}\circ HT\mathrm{inr}}], \underline{\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inr}}]\circ a\circ(1+\alpha_Z)$$
$$\circ\,(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=\underline{[[\tau_{X+Z}, T\mathrm{inr}\circ\tau_Z], T\mathrm{inr}\circ\eta_Z]\circ a}\circ(1+\alpha_Z)$$
$$\circ\,(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
（τ, η の自然性）
$$=[\tau_{X+Z}, \underline{[T\mathrm{inr}\circ\tau_Z, T\mathrm{inr}\circ\eta_Z]}]\circ(1+\alpha_Z)$$
$$\circ\,(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
（a の定義）
$$=\underline{[\tau_{X+Z}, T\mathrm{inr}\circ[\tau_Z, \eta_Z]]\circ(1+\alpha_Z)}\circ(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})$$
$$\circ\,(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=[\tau_{X+Z}, T\mathrm{inr}\circ\underline{[\tau_Z, \eta_Z]\circ\alpha_Z}]\circ(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})$$
$$\circ\,(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=\underline{[\tau_{X+Z}, T\mathrm{inr}]\circ(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})}$$
$$\circ\,(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
（$\alpha_Z^{-1}=[\tau_Z, \eta_Z]$）
$$=[\underline{\tau_{X+Z}\circ H\mu_{X+Z}}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ\,(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$=\underline{[\mu_{X+Z}\circ\tau_{T(X+Z)}, T\mathrm{inr}]}$$
$$\underline{\circ(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})}$$
（式 (1)）
$$=[\mu_{X+Z}\circ\underline{\tau_{T(X+Z)}\circ H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])}, T\mathrm{inr}]$$
$$=[\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\tau_{X+TZ}, \underline{T\mathrm{inr}}]$$
（τ の自然性）
$$=[\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\tau_{X+TZ},$$
$$\underline{[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]}\circ \mathrm{inr}]$$
$$=[\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\tau_{X+TZ},$$
$$\underline{1_{T(X+Z)}}\circ[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ \mathrm{inr}]$$
$$=[\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\tau_{X+TZ},$$
$$\mu_{X+Z}\circ\underline{\eta_{T(X+Z)}\circ[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]}\circ \mathrm{inr}]$$
（モナドの公理）
$$=\underline{[\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\tau_{X+TZ},}$$
$$\underline{\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ\eta_{X+TZ}\circ \mathrm{inr}]}$$
（η の自然性）
$$=\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ\,[\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ}\circ \mathrm{inr}]$$

式 (2) と式 (3) より次の式が導かれる．

$$\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ T(1_X+t)\circ\underline{\theta}$$
$$=\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ\,\underline{T(1_X+t)\circ[\tau_{X+Y}, \eta_{X+Y}\circ \mathrm{inr}]}\circ f$$
（θ が再帰式表現であること）
$$=\underline{\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ[\tau_{X+TZ}, \eta_{X+TZ}\circ \mathrm{inr}]}$$
$$\circ\,(H(T(1_X+t))+t)$$
（式 (2)）
$$=[\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z}\circ \mathrm{inr}]\circ([1_{H(T(X+Z))}, H(T\mathrm{inr})]+1_Z)$$
$$\circ\,a\circ(1_{H(T(X+Z))}+\alpha_Z)\circ(H\mu_{X+Z}+1_{TZ})$$
$$\circ\,(H(T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}])+1_{TZ})$$
$$\circ\,(H(T(1_X+t))+t)\circ f$$
（式 (3)）

すなわち，$\mu_{X+Z}\circ T[\eta_{X+Z}\circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]\circ T(1_X+t)\circ\theta=$

$[\tau_{X+Z}, \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}] \circ (\cdots)$ の形になるため，再帰式表現である． □

補題 19 における再帰式表現の解を考えることで，次の定理が証明される．

定理 20. 2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および, H の完全反復モナド (T, η, μ) について考える．再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Z)$ について，$[\theta^\dagger, \eta_Z] : X+Z \to TZ$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の最汎単一化子である．つまり，次の $\mathbf{C}_T$ 圏上の図式において，$[\theta^\dagger, \eta_Z]$ が余等化子になる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\theta"] \arrow[r, shift right, "\eta_{X+Z}\circ\mathrm{inl}"'] & X+Z \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}_T$$

証明. $[\theta^\dagger, \eta_Z]$ が単一化子であることは補題 18 で示した．よって，$[\theta^\dagger, \eta_Z]$ が最汎であることを示せばよい．つまり，$e : X+Z \to TW$ が $e \circ_T \theta = e \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ を満たすと仮定し，$u \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] = e$ となる $u : Z \to TW$ が一意に存在することを示す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\theta"] \arrow[r, shift right, "\eta_{X+Z}\circ\mathrm{inl}"'] & X+Z \arrow[r, "{[\theta^\dagger,\eta_Z]}"] \arrow[dr, "e"'] & Z \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & W \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}_T$$

このとき，e が余積からの射なので $e = [s,t]$ と分解でき，$[s,t] \circ_T \theta = [s,t] \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} = [s,t] \circ \mathrm{inl} = s$ より

$$[s,t] \circ_T \theta = s \tag{4}$$

が得られる．

ここで，$\rho = \mu_{X+W} \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}] \circ T(1_X + t) \circ \theta$ とすると，補題 19 より ρ は再帰式表現である．次の 2 つの等式を示せば命題 15 より

$$t \circ_T \theta^\dagger = \rho^\dagger = s \tag{5}$$

が従う．

$$s = \mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \rho$$
$$t \circ_T \theta^\dagger = \mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \rho$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\rho"] & TW \\ T(X+W) \arrow[r, "{T[s,\eta_W]}"] & T^2W \arrow[u, "\mu_W"'] \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t\circ_T\theta^\dagger"] \arrow[d, "\rho"] & TW \\ T(X+W) \arrow[r, "{T[t\circ_T\theta^\dagger,\eta_W]}"] & T^2W \arrow[u, "\mu_W"'] \end{tikzcd} \qquad \text{in } \mathbf{C}$$

まず，$s = \mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \rho$ を示す．

$$\mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \underline{\rho}$$
$$= \mu_W \circ \underline{T[s, \eta_W] \circ \mu_{X+W}} \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（ρ の定義）

$$= \underline{\mu_W \circ \mu_{TW}} \circ T^2[s, \eta_W] \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（μ の自然性）

$$= \mu_W \circ \underline{T\mu_W \circ T^2[s, \eta_W] \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]}$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（モナドの公理）

$$= \mu_W \circ T[\mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \eta_{X+W} \circ \mathrm{inl},$$
$$\mu_W \circ \underline{T[s, \eta_W] \circ T\mathrm{inr}}] \circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（T の関手性）

$$= \mu_W \circ T[\mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, \underline{\mu_W \circ T\eta_W}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$
$$= \mu_W \circ T[\underline{\mu_W \circ T[s, \eta_W] \circ \eta_{X+W}} \circ \mathrm{inl}, 1_{TW}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（モナドの公理）

$$= \mu_W \circ T[\underline{[s, \eta_W] \circ_T \eta_{X+W}} \circ \mathrm{inl}, 1_{TW}] \circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（$\circ_T$ の定義）

$$= \mu_W \circ T[\underline{[s, \eta_W] \circ \mathrm{inl}}, 1_{TW}] \circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（η_{X+W} は $\mathbf{C}_T$ の恒等射）

$$= \mu_W \circ \underline{T[s, 1_{TW}] \circ T(1_X + t)} \circ \theta$$
$$= \underline{\mu_W \circ T[s, t] \circ \theta}$$
$$= \underline{[s, t] \circ_T \theta}$$

（$\circ_T$ の定義）

$$= s$$

（式 (4)）

次に $t \circ_T \theta^\dagger = \mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \rho$ を示す．

$$\mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \underline{\rho}$$
$$= \mu_W \circ \underline{T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \mu_{X+W}} \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（ρ の定義）

$$= \underline{\mu_W \circ \mu_{TW}} \circ T^2[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（μ の自然性）

$$= \mu_W \circ \underline{T\mu_W \circ T^2[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ T[\eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, T\mathrm{inr}]}$$
$$\circ T(1_X + t) \circ \theta$$

（モナドの公理）

$$= \mu_W \circ T[\mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \eta_{X+W} \circ \mathrm{inl},$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_W \circ \underline{T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ T\mathrm{inr}} \circ T(1_X + t) \circ \theta \\
&\quad \text{（T の関手性）} \\
&= \mu_W \circ T[\mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \eta_{X+W} \circ \mathrm{inl}, \underline{\mu_W \circ T\eta_W}] \\
&\circ T(1_X + t) \circ \theta \\
&= \mu_W \circ T[\underline{\mu_W \circ T[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ \eta_{X+W}} \circ \mathrm{inl}, 1_{TW}] \\
&\circ T(1_X + t) \circ \theta \\
&\quad \text{（モナドの公理）} \\
&= \mu_W \circ T[\underline{[t \circ_T \theta^\dagger, \eta_W] \circ_T \eta_{X+W}} \circ \mathrm{inl}, 1_{TW}] \\
&\circ T(1_X + t) \circ \theta \\
&\quad \text{（$\circ_T$ の定義）} \\
&= \mu_W \circ \underline{T[t \circ_T \theta^\dagger, 1_{TW}] \circ T(1_X + t)} \circ \theta \\
&\quad \text{（η_{X+W} は $\mathbf{C}_T$ の恒等射）} \\
&= \mu_W \circ T\underline{[t \circ_T \theta^\dagger, t]} \circ \theta \\
&= \mu_W \circ T(\underline{t \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z]}) \circ \theta \\
&= \mu_W \circ \underline{T(\mu_W \circ Tt \circ [\theta^\dagger, \eta_Z])} \circ \theta \\
&= \underline{\mu_W \circ T\mu_W} \circ T^2 t \circ T[\theta^\dagger, \eta_Z] \circ \theta \\
&= \mu_W \circ \underline{\mu_{TW} \circ T^2 t} \circ T[\theta^\dagger, \eta_Z] \circ \theta \\
&\quad \text{（モナドの公理）} \\
&= \mu_W \circ Tt \circ \underline{\mu_Z \circ T[\theta^\dagger, \eta_Z] \circ \theta} \\
&\quad \text{（μ の自然性）} \\
&= \underline{\mu_W \circ Tt \circ \theta^\dagger} \\
&\quad \text{（命題 15）} \\
&= t \circ_T \theta^\dagger \\
&\quad \text{（$\circ_T$ の定義）}
\end{aligned}
$$

以上で，式 (5) が示された．よって，$t \circ_T \eta_Z = t$ を用いて $e = [s,t] = [t \circ_T \theta^\dagger, t \circ_T \eta_Z] = t \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z]$ が導かれる．すなわち，u の存在性が示された．

次に u の一意性を示そう．そのため，$u : Z \to TW$ を任意にとり $u \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] = [s,t]$ を仮定する．このとき，$[s,t] = u \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] = [u \circ_T \theta^\dagger, u]$ が得られる．したがって，$u = t$ となり，u は一意である．□

また，定理 20 から次の系が得られる．

系 21. 2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および，H の完全反復モナド (T, η, μ) について考える．再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Z)$ について，$[\tau_1, \tau_2] : X+Z \to TW$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子とすると，$\tau_1 = \tau_2 \circ_T \theta^\dagger$ が成り立つ．

証明.　$[\tau_1, \tau_2] : X+Z \to TW$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子とする．このとき，定理 20 より $[\theta^\dagger, \eta_Z] : X+Z \to TZ$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の最汎単一化子である．よって，ある射 $u : Z \to TW$ が存在して $u \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] = [\tau_1, \tau_2]$ となる．ここで，$u \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] = [u \circ_T \theta^\dagger, u]$ なので $[u \circ_T \theta^\dagger, u] = [\tau_1, \tau_2]$．つまり，次の 2 つの式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&u \circ_T \theta^\dagger = \tau_1 \\
&u = \tau_2
\end{aligned}
$$

すなわち，$\tau_1 = \tau_2 \circ_T \theta^\dagger$ である．□

例 22. 関数記号の集合を $\Sigma = \{g^2\}$ とする．変数の集合 $X = \{x\}$，$Y = \{a\}$ に対して $\theta : X \to T_\Sigma(X+Y)$，$\theta(x) = g(a,x)$ を考える．このとき θ は再帰式表現であり，その解は $\theta^\dagger : X \to T_\Sigma Y$，$\theta^\dagger(x) = g(a, g(a, g(a, \cdots)))$ である．$\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} : X \to T_\Sigma(X+Y)$ は $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}(x) = x$ なので，θ と $\eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子 $\sigma : X+Y \to T_\Sigma Z$ は $\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma}(g(a,x))$ となる写像である．ここで，$[\theta^\dagger, \eta_Y] : X+Y \to T_\Sigma Y$ は $[\theta^\dagger, \eta_Y](x) = g(a, g(a, g(a, \cdots)))$，$[\theta^\dagger, \eta_Y](a) = a$ となることから，

$$
\begin{aligned}
\widehat{[\theta^\dagger, \eta_Y]}(x) &= [\theta^\dagger, \eta_Y](x) \\
&= g(a, g(a, g(a, \cdots))) \\
&= g(a, [\theta^\dagger, \eta_Y](x)) \\
&= \widehat{[\theta^\dagger, \eta_Y]}(g(a,x))
\end{aligned}
$$

が導かれ，$[\theta^\dagger, \eta_Y]$ は単一化子である．

また，$\gamma : X + Y \to T_\Sigma Z$ を単一化子とすると，$\widehat{\gamma}(x) = \widehat{\gamma}(g(a,x))$ となるため，$\gamma(x) = g(\gamma(a), \gamma(x))$ が導かれる．よって，

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) &= g(\gamma(a), \gamma(x)) \\
&= g(\gamma(a), g(\gamma(a), \gamma(x))) \\
&= g(\gamma(a), g(\gamma(a), g(\gamma(a), \gamma(x)))) \\
&\ \ \vdots \\
&= g(\gamma(a), g(\gamma(a), g(\gamma(a), \cdots)))
\end{aligned}
$$

となるため，γ と $[\theta^\dagger, \eta_Y]$ の違いは $a \in Y$ をどう移すかだけであり，$\gamma = (\gamma \circ \mathrm{inr}) \circ_{T_\Sigma} [\theta^\dagger, \eta_Y]$ と表せることが分かる．よって，$[\theta^\dagger, \eta_Y]$ は最汎単一化子である．

例 23. 関数記号の集合 $\Sigma = \{g^2\}$ を考える．等式 $g(x,y) = g(y,x)$ を有限回または無限回適用して得られる同値関係を $\sim^*$ とする．このとき，反復可能関手 $H : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$ が存在し，その完全反復モナド (T, η, μ) について $TX = T_\Sigma X/\!\sim^*$ が成り立つ [14]．よって，項を $\sim^*$ により同一視した場合にも定理 20 を適用できる．

5. 圏論による再帰式表現に基づく単一化問題

本章では命題 5 を圏論的に証明する．

元 $x \in X$ と射 $x : 1 \to X$ は圏 $\mathbf{Sets}$ において，1 対 1 対応する．これを任意の圏に一般化し，射 $x : 1 \to X, y : 1 \to Y$ をとることで，変数 $x \in X$，$y \in Y$ ととったと考える．

命題 5 では再帰式表現 θ，γ について，θ と γ で左辺の変数が異なるとしていた．θ と γ で左辺の変数が異なれ

ば，θ と γ に含まれる式は相異なることになり，式 $x \approx y$ は θ と γ のどちらにも含まれないことが分かる．つまり，$\theta \cap \gamma = \emptyset$，$\theta \cap \{x \approx y\} = \emptyset$，$\gamma \cap \{x \approx y\} = \emptyset$ であり，$\theta \cup \gamma \cup \{x \approx y\}$ は非交叉和となる．集合論における非交叉和は圏論における余積に対応するため，$\theta + \gamma + \{x \approx y\}$ を考えればよい．

θ と γ を Aczel らの意味での再帰式表現 $\theta : X + Z \to TZ$ と $\gamma : Y + Z \to TZ$ にそれぞれ同一視しよう．再帰式表現の最汎単一化子を考えたときと同様に $\theta + \gamma + \{x \approx y\}$ の右辺を表す射 $\theta + \gamma + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x$ と左辺を表す射 $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y$ を考える．2 つの射の始域は $X+Y+1$ で，終域は $T(X+Z)+T(Y+Z)+T(X+Y)$ である．単一化子を考えるときにはクライスリ圏で考える必要があるが，今考えている射は終域が TA の形ではない．そこで左から $[T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]]$ を合成する．すると，終域が $T(X+Y+Z)$ となるため，現在の定式化のもとで単一化子を議論できる．

定理 24． 2 項余積と終対象 1 を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および，H の完全反復モナド (T, η, μ) を任意にとり，固定する．再帰式表現 $\theta : X \to T(X+Z)$，$\gamma : Y \to T(Y+Z)$ と $x : 1 \to X$，$y : 1 \to Y$ について $X + Y + 1 \to T(X+Y+Z)$ なる次の 2 つの射を考える．

$$\begin{aligned}\mathrm{rhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\quad \circ (\theta + \gamma + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x) \\ \mathrm{lhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\quad \circ (\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y)\end{aligned}$$

このとき，$\tau : X + Y + Z \to TW$ が rhs と lhs の単一化子であることと，$\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子 $\rho : Z \to TW$ が存在して，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ となることが同値である．

ここで，定理 24 の証明のために次の補題を示しておく．

補題 25． $\mathbf{C}$ を 2 項余積を持つ圏，(T, η, μ) を $\mathbf{C}$ 上のモナドとする．$\mathbf{C}$ の射 $[f_1, f_2, f_3] : X + Y + Z \to TW$ と $g_1 : A \to T(X+Z)$，$g_2 : B \to T(Y+Z)$，$g_3 : C \to T(X+Y)$ について，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}[f_1, f_3] \circ_T g_1 = [f_1, f_2, f_3] &\\ \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] &\\ \circ (g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_1 & \qquad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f_2, f_3] \circ_T g_2 = [f_1, f_2, f_3] &\\ \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] &\\ \circ (g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_2 & \qquad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f_1, f_2] \circ_T g_3 = [f_1, f_2, f_3] &\\ \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] &\\ \circ (g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_3 & \qquad (8)\end{aligned}$$

証明． 式 (6) は次の式変形から示せる．

$$\begin{aligned}&[f_1, f_2, f_3] \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\circ \underline{(g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_1} \\ &= [f_1, f_2, f_3] \circ_T \underline{[T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]]} \\ &\underline{\circ\ \mathrm{in}_1} \circ g_1 \\ &= \underline{[f_1, f_2, f_3] \circ_T T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3]} \circ g_1 \\ &= \mu_W \circ \underline{T[f_1, f_2, f_3] \circ T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3]} \circ g_1 \\ &= \underline{\mu_W \circ T[f_1, f_3] \circ g_1} \\ &= [f_1, f_3] \circ_T g_1\end{aligned}$$

式 (7)，(8) も同様にして示せる．

$$\begin{aligned}&[f_1, f_2, f_3] \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\circ \underline{(g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_2} \\ &= [f_1, f_2, f_3] \circ_T \underline{[T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]]} \\ &\underline{\circ\ \mathrm{in}_2} \circ g_2 \\ &= \underline{[f_1, f_2, f_3] \circ_T T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3]} \circ g_2 \\ &= \mu_W \circ \underline{T[f_1, f_2, f_3] \circ T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3]} \circ g_2 \\ &= \underline{\mu_W \circ T[f_2, f_3] \circ g_2} \\ &= [f_2, f_3] \circ_T g_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[f_1, f_2, f_3] \circ_T [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\circ \underline{(g_1 + g_2 + g_3) \circ \mathrm{in}_3} \\ &= [f_1, f_2, f_3] \circ_T \underline{[T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]]} \\ &\underline{\circ\ \mathrm{in}_3} \circ g_3 \\ &= \underline{[f_1, f_2, f_3] \circ_T T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]} \circ g_3 \\ &= \mu_W \circ \underline{T[f_1, f_2, f_3] \circ T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]} \circ g_3 \\ &= \underline{\mu_W \circ T[f_1, f_2] \circ g_3} \\ &= [f_1, f_2] \circ_T g_3\end{aligned}$$

□

補題 25 で示した等式を活用し，定理 24 を証明する．

定理 24 の証明． ($\Longrightarrow$) $\tau : X + Y + Z \to TW$ が rhs と lhs の単一化子であるとして，$\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子 $\rho : Z \to TW$ が存在し，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ となることを示す．すなわち，

$$\tau \circ_T \mathrm{rhs} = \tau \circ_T \mathrm{lhs}$$

として，ρ の存在を示す．

$\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$ と分解できることに注意すると，補題 25 の式 (6) より，

$$\begin{aligned}\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_1 &= [\tau_1, \tau_3] \circ_T \theta \\ \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_1 &= [\tau_1, \tau_3] \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}\end{aligned}$$

すなわち，

$$[\tau_1, \tau_3] \circ_T \theta = [\tau_1, \tau_3] \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} \qquad (9)$$

がいえる．同じく補題 25 の式 (7) より，

$$\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_2 = [\tau_2, \tau_3] \circ_T \gamma$$
$$\tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_2 = [\tau_2, \tau_3] \circ_T \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl}$$

すなわち，

$$[\tau_1, \tau_3] \circ_T \gamma = [\tau_1, \tau_3] \circ_T \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} \tag{10}$$

がいえる．補題 25 の式 (8) からは

$$\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_3 = [\tau_1, \tau_2] \circ_T \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x$$
$$\tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_3 = [\tau_1, \tau_2] \circ_T \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y$$

が得られ，$[\tau_1, \tau_2] \circ_T \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x = \tau_1 \circ x$ かつ $[\tau_1, \tau_2] \circ_T \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y = \tau_2 \circ y$ なので，

$$\tau_1 \circ x = \tau_2 \circ y \tag{11}$$

がいえる．

ここで，式 (9) と式 (10) はそれぞれ $[\tau_1, \tau_3]$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子であることおよび，$[\tau_2, \tau_3]$ が γ と $\eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子であることを示している．よって，系 21 より $\tau_1 = \tau_3 \circ_T \theta^\dagger, \tau_2 = \tau_3 \circ_T \gamma^\dagger$ が分かり，式 (11) とあわせて

$$\tau_3 \circ_T \theta^\dagger \circ x = \tau_3 \circ_T \gamma^\dagger \circ y$$

がいえる．すなわち，τ_3 は $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子である．

また，

$$\begin{aligned}\tau &= [\tau_3 \circ_T \theta^\dagger, \tau_3 \circ_T \gamma^\dagger, \tau_3] \\ &= \tau_3 \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]\end{aligned}$$

なので，ρ として τ_3 を選べばよいことが分かる．

($\Longleftarrow$) 次に $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子 ρ について，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ と表せるとき，τ が rhs と lhs の単一化子になることを示す．

ここで，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z] = [\rho \circ_T \theta^\dagger, \rho \circ_T \gamma^\dagger, \rho]$ なので，補題 25 の式 (6) より

$$\begin{aligned}\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_1 &= [\rho \circ_T \theta^\dagger, \rho] \circ_T \theta \\ &= \rho \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] \circ_T \theta \\ \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_1 &= [\rho \circ_T \theta^\dagger, \rho] \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} \\ &= \rho \circ_T [\theta^\dagger, \eta_Z] \circ_T \eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}\end{aligned}$$

となるが，$[\theta^\dagger, \eta_Z]$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子であることから右辺どうしが等しい．よって，$\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_1 = \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_1$ が成立する．また，補題 25 の式 (7) より

$$\begin{aligned}\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_2 &= [\rho \circ_T \gamma^\dagger, \rho] \circ_T \gamma \\ &= \rho \circ_T [\gamma^\dagger, \eta_Z] \circ_T \gamma \\ \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_2 &= [\rho \circ_T \gamma^\dagger, \rho] \circ_T \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} \\ &= \rho \circ_T [\gamma^\dagger, \eta_Z] \circ_T \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl}\end{aligned}$$

となるが，$[\gamma^\dagger, \eta_Z]$ が θ と $\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl}$ の単一化子であることから右辺どうしが等しい．よって，$\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_2 = \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_2$ が成立する．同様に，補題 25 の式 (8) より

$$\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_3 = \rho \circ_T \theta^\dagger \circ x$$
$$\tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_3 = \rho \circ_T \gamma^\dagger \circ y$$

となるが，ρ が $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子であることから右辺どうしが等しくなる．

以上より $\tau \circ_T \mathrm{rhs} \circ \mathrm{in}_i = \tau \circ_T \mathrm{lhs} \circ \mathrm{in}_i$（$i = 1, 2, 3$）が成立するため余積の定義より，

$$\tau \circ_T \mathrm{rhs} = \tau \circ_T \mathrm{lhs}$$

が導かれ，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ は単一化子だと分かる． □

定理 24 は単一化子についての同値性を述べたが，最汎単一化子についても同様の同値性がいえる．

系 26. 2 項余積を持つ圏 $\mathbf{C}$ と反復可能関手 $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ および，H の完全反復モナド (T, η, μ) を任意にとり，固定する．再帰式表現 $\theta : X \to T(X + Z)$，$\gamma : Y \to T(Y + Z)$ と $x : 1 \to X$，$y : 1 \to Y$ について次の 2 つの射を考える．

$$\begin{aligned}\mathrm{rhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\quad \circ (\theta + \gamma + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x) \\ \mathrm{lhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\ &\quad \circ (\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y)\end{aligned}$$

このとき，$\tau : X + Y + Z \to TW$ が rhs と lhs の最汎単一化子であることと，$\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の最汎単一化子 $\rho : Z \to TW$ が存在して，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ となることが同値である．

証明. ($\Longrightarrow$) $\tau : X + Y + Z \to TW$ が rhs と lhs の最汎単一化子であるとする．このとき，定理 24 より $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子 $\rho : Z \to TW$ が存在して，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ となる．この ρ が最汎単一化子であることを示す．

$\rho' : Z \to TW'$ が $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子であるとする．このとき定理 24 より，$\tau' = \rho' \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ が rhs と lhs の単一化子である．τ が最汎単一化子であることから，ある $u : W \to TW'$ が存在して，

$$u \circ_T \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z] = \rho' \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$$

となる．両辺に右から in_3 を合成すれば，$u \circ_T \rho = \rho'$ が得られる．

また，$v : W \to TW'$ が $v \circ_T \rho = \rho'$ とすると，$v \circ_T \tau = \tau'$ が得られ $v = u$ が従う．すなわち，u は一意である．

以上より，ρ は最汎単一化子である．

($\Longleftarrow$) 次に $\rho : Z \to TW$ が $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の最汎単一化

子であるとして，$\tau = \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ が rhs と lhs の最汎単一化子であることを示す．

$\tau' : X + Y + Z \to TW'$ が rhs と lhs の単一化子であるとすると，定理 24 より，$\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子 $\rho' : Z \to TW'$ が存在して，$\tau' = \rho' \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ となる．このとき ρ が最汎単一化子であることから，$u : W \to TW'$ が存在して，$u \circ_T \rho = \rho'$ となる．両辺に右から $[\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$ を $\circ_T$ で合成すれば，$u \circ_T \tau = \tau'$ が得られる．

また，$v : W \to TW'$ が $v \circ_T \tau = \tau'$ とすると，

$$v \circ_T \rho \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z] = \rho' \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$$

がいえる．両辺に in_3 を右から合成することで，$v \circ_T \rho = \rho'$ が得られ，$v = u$ が従う．すなわち，u は一意である．

以上より，τ は最汎単一化子である． □

例 27. 関数記号の集合を $\Sigma = \{g^2\}$ とする．変数の集合 $X = \{x\}$，$Y = \{y\}$，$Z = \{z\}$ に対して，再帰式表現 $\theta : X \to T_\Sigma(X+Z)$, $\gamma : Y \to T_\Sigma(Y+Z)$ を $\theta(x) = g(z, x)$, $\gamma(y) = g(y, z)$ と定義する．**Sets** の終対象として $1 = \{*\}$ をとり，射 $x : 1 \to X$ と元 $x \in X$ を同一視し，射 $y : 1 \to Y$ と元 $y \in Y$ を同一視する．このとき，2 つの射

$$\begin{aligned}
\mathrm{rhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\
&\quad \circ (\theta + \gamma + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x) \\
\mathrm{lhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\
&\quad \circ (\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y)
\end{aligned}$$

を計算する．ここで，**Sets** において余積は非交叉和であるので $X, Y, 1 \subseteq X + Y + 1$ と見なせることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{rhs}(x) &= \theta(x) = g(z, x) \\
\mathrm{rhs}(y) &= \gamma(y) = g(y, z) \\
\mathrm{rhs}(*) &= x \\
\mathrm{lhs}(x) &= x \\
\mathrm{lhs}(y) &= y \\
\mathrm{lhs}(*) &= y
\end{aligned}$$

が成り立つ．rhs と lhs の単一化子 $\tau : X + Y + Z \to T_\Sigma W$ は $\tau \circ_T \mathrm{rhs} = \tau \circ_T \mathrm{lhs}$ を満たすので，$X, Y, Z \subseteq X + Y + Z$ に注意すると次の等式を導ける．

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= g(\tau(z), \tau(x)) \\
\tau(y) &= g(\tau(y), \tau(z)) \\
\tau(x) &= \tau(y)
\end{aligned}$$

上の等式から

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= g(\tau(z), \tau(x)) \\
&= g(\tau(z), g(\tau(z), \tau(x))) \\
&\;\;\vdots \\
&= g(\tau(z), g(\tau(z), \cdots)) \\
\tau(y) &= g(\tau(y), \tau(z)) \\
&= g(g(\tau(y), \tau(z)), \tau(z)) \\
&\;\;\vdots \\
&= g(g(\cdots, \tau(z)), \tau(z)) \\
g(\tau(z), g(\tau(z), \cdots)) &= g(g(\cdots, \tau(z)), \tau(z))
\end{aligned}$$

が導かれる．よって，

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= (\tau \circ \mathrm{in}_3) \circ_{T_\Sigma} \theta^\dagger(x) \\
\tau(y) &= (\tau \circ \mathrm{in}_3) \circ_{T_\Sigma} \gamma^\dagger(y)
\end{aligned}$$

となるため，$\rho = \tau \circ \mathrm{in}_3$ を用いて，

$$\tau = \rho \circ_{T_\Sigma} [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z]$$

と表せる．また，$\rho \circ_{T_\Sigma} \theta^\dagger(x) = g(\rho(z), g(\rho(z), \cdots))$ であり，$\rho \circ_{T_\Sigma} \gamma^\dagger(y) = g(g(\cdots, \rho(z)), \rho(z))$ であるので，ρ は $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子である．

例 28. 関数記号の集合 $\Sigma = \{g^2\}$ を考える．等式 $g(x, y) = g(y, x)$ を有限回または無限回適用して得られる同値関係を $\sim^*$ とする．このとき，反復可能関手 H : **Sets** $\to$ **Sets** が存在し，その完全反復モナド (T, η, μ) について $TX = T_\Sigma X/{\sim^*}$ が成り立つ [14]．項 $t \in T_\Sigma X$ の $\sim^*$ に関する同値類を $[t]_{\sim^*} \in TX$ と表す．変数の集合 $X = \{x\}, Y = \{y\}, Z = \{z\}$ に対して，再帰式表現 $\theta : X \to T(X + Z), \gamma : Y \to T(Y + Z)$ を $\theta(x) = [g(z, x)]_{\sim^*}, \gamma(y) = [g(y, z)]_{\sim^*}$ と定義する．$g(z, g(z, \cdots)) \sim^* g(g(\cdots, z), z)$ なので，$\theta^\dagger \circ x = \gamma^\dagger \circ y$ である．よって，η_Z が $\theta^\dagger \circ x$ と $\gamma^\dagger \circ y$ の単一化子である．このとき，$\tau = \eta_Z \circ_T [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z] = [\theta^\dagger, \gamma^\dagger, \eta_Z] : X + Y + Z \to TZ$ を考える．定理 24 は τ が次の 2 つの射の単一化子であることを主張している．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\
&\quad \circ (\theta + \gamma + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inl} \circ x) \\
\mathrm{lhs} &= [T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_2, \mathrm{in}_3], T[\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2]] \\
&\quad \circ (\eta_{X+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{Y+Z} \circ \mathrm{inl} + \eta_{X+Y} \circ \mathrm{inr} \circ y)
\end{aligned}$$

実際に計算すると，

$$\begin{aligned}
\tau \circ_T \mathrm{rhs}(x) &= \tau \circ_T \theta(x) = \tau([g(z, x)]_{\sim^*}) \\
&= [g(z, g(z, \cdots))]_{\sim^*} = \theta^\dagger(x) \\
\tau \circ_T \mathrm{rhs}(y) &= \tau \circ_T \gamma(y) = \tau([g(y, z)]_{\sim^*}) \\
&= [g(g(\cdots, z), z)]_{\sim^*} = \gamma^\dagger(y) \\
\tau \circ_T \mathrm{rhs}(*) &= \tau(x) = \theta^\dagger(x)
\end{aligned}$$

$$\tau \circ_T \mathrm{lhs}(x) = \tau(x) = \theta^\dagger(x)$$
$$\tau \circ_T \mathrm{lhs}(y) = \tau(y) = \gamma^\dagger(y)$$
$$\tau \circ_T \mathrm{lhs}(*) = \tau(y) = \gamma^\dagger(y)$$

となるが，$\theta^\dagger(x) = \gamma^\dagger(x)$ なので τ が単一化子であることが分かる．

6. 関連研究

本論文で用いた圏論的な単一化の定式化は文献 [11], [13] によって導入されたものである．この定式化を応用したその他の研究として，Eklund らによる多値の単一化がある [15]．そこでは，圏論的な単一化の定式化を項の関手と冪集合関手の合成に対して適用している．しかし，我々が調査した限り，圏論的な単一化の定式化を正則項上の単一化へ応用した研究は見つけられなかった．

単一化の双対な概念として反単一化（anti-unification）[16], [17] がある．圏論的な反単一化の定式化として，Kahl によって直積の普遍射の構成が反単一化に対応することが示されている [18]．また，正則項の反単一化については Maher と Stucker [19] により，正則項と密接した関係にある項グラフ上の反単一化については Baumgärtner ら [20] により報告されている．しかし，これらの研究は圏論を用いたものではなく，正則項上の反単一化を圏論を用いて一般化する試みは行われていないようである．

7. まとめと今後の課題

本論文では Aczel らによる再帰式表現と解の圏論的定式化 [10] をもとにして，岩見と青戸による正則項の単一化に関する結果を圏論を用いて一般化した．3 章で述べたように，**Sets** 上の反復可能関手 H_Σ を考えることで無限項の集合の場合が得られる．よって，4 章と 5 章の議論を H_Σ での場合に適用すれば岩見と青戸による結果が得られる．本論文では議論を展開する圏は 2 項余積を持つものとし，その上の反復可能関手として終余代数の存在に関する条件を課した．つまり，本論文の議論は 2 項余積を持つ圏すべてで展開することができ，反復可能関手も条件を満たすものであれば任意にとってよい．2 項余積を持つ圏としては **CPO** などがある．反復可能関手の条件について，到達可能関手（accessible functor）であれば反復可能となることが知られている [10], [12]．そのため，本論文の結果は多くの場合に適用できる．

岩見と青戸による証明では位置に関する帰納法を用いているが，本論文の証明では Aczel らによる余帰納法を用いた定式化に基づく．その結果，本論文では射の等式変形によって証明が完了している．

Aczel らは文献 [10] において，完全反復モナドを自己関手上のモノイダル圏の構造を用いて一般化している．すなわち，モノイダル圏上の対象として完全反復モノイドを定義し，完全反復モノイド上で解の定理を示した．このことから，完全反復モノイドを用いて本論文の命題をモノイダル圏へ一般化することが期待できる．

文献 [10] では再帰式表現の右辺に無限項がくる場合も許すため，再帰式表現の解は正則項とは限らない．Adámek らは文献 [10] での理論をより発展させ，正則項をとるモナドについての解の定理を示した [21]．本論文の定理は解の定理を用いて示されているため，文献 [21] の体系においても同様に証明できるだろう．

本論文では Aczel らによる解の定理 [10] を用いて議論を行った．しかし，同じ目的を達成する異なる体系が提案されている．実際に，Moss は関手 $H(- + X)$ の終余代数を用いてパラメータ余再帰（parametric corecursion）を考案しており [22]，解の定理とパラメータ余再帰の関連が文献 [23] で示されている．さらに，文献 [23] では解の定理やパラメータ余再帰は Bartels による一般化余帰納法（generalised coinduction）[24] の特殊な場合であることが示されている．したがって，一般化余帰納法を正則項の単一化へ応用することで，本論文の定理をより一般化することが期待できる．

本論文で用いた解の定理 [10] は左辺が変数である等式の集合における解の存在を示している．それに対し，De Marchi らは左辺が関数の場合について解の存在を示している [25]．文献 [10] の理論と文献 [25] の理論を組み合わせた体系について本論文の定理を証明できれば，より複雑な体系へと正則項の単一化を応用できると予想される．

以上のことから今後の課題として以下のことがあげられる．

(1) 完全反復モノイドによるモノイド圏への一般化．
(2) 解の定理が成り立つ体系で本論文の定理が成り立つことの一般的な証明を与えること．
(3) 一般化余帰納法を用いたさらなる一般化．
(4) De Marchi らの理論 [25] と組み合わせることによる複雑な体系への応用．

謝辞　本論文を改善するための丁寧なコメントをくださった査読者に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 18K11158 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press (1998).
[2] Baader, F. and Siekmann, J.H.: Unification Theory, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, pp.41–125, Oxford University Press (1994).
[3] Endrullis, J., Grabmayer, C., Hendriks, D., Klop, J.W. and de Vrijer, R.: Proving infinitary normalization, *Proc. International Workshop on Types for Proofs and Programs* (*TYPES 2008*), Lecture Notes in Computer

Science, Vol.5497, pp.64–82, Springer-Verlag (2009).

[4] Kennaway, J.R., Klop, J.W., Sleep, M.R. and de Vries, F.J.: On the adequacy of graph rewriting for simulating term rewriting, *ACM Trans. Programming Languages and Systems*, Vol.16, No.3, pp.493–523 (1994).

[5] Courcelle, B.: Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol.25, pp.95–169 (1983).

[6] 岩見宗弘，青戸等人：無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証，コンピュータソフトウェア，Vol.29, No.1, pp.211–239 (2012).

[7] Awodey, S.: *Category Theory*, Oxford University Press, 2nd edition (2010).

[8] Mac Lane, S.: *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (1978).

[9] Rutten, J.J.: Universal coalgebra: A theory of systems, *Theoretical Computer Science*, Vol.249, No.1, pp.3–80 (2000).

[10] Aczel, P., Adámek, J., Milius, S. and Velebil, J.: Infinite trees and completely iteraive theories: A coalgebraic view, *Theoretical Computer Science*, Vol.300, pp.1–45 (2003).

[11] Rydeheard, D.E. and Burstall, R.M.: A categorical unification algorithm, *Category Theory and Computer Programming*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.240, pp.493–505, Springer-Verlag (1986).

[12] Barr, M.: Terminal coalgebras in well-founded set theory, *Theoretical Computer Science*, Vol.114, pp.299–315 (1993).

[13] Goguen, J.A.: What is unification? — A categorical view of substitution, equation and solution, *Resolution of Equations in Algebraic Structures Vol.1: Algebraic Techniques*, pp.217–261, Academic Press (1989).

[14] Adámek, J. and Milius, S.: Terminal coalgebras and free iterative theories, *Information and Computation*, Vol.204, No.7, pp.1139–1172 (2006).

[15] Eklund, P., Galn, M., Medina, J., Ojeda-Aciego, M. and Valverde, A.: A categorical approach to unification of generalised terms, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol.66, pp.41–51 (2002).

[16] Plotkin, G.: A note on inductive generalization, *Machine Intelligence*, Vol.5, pp.305–310 (1970).

[17] Reynolds, J.: Transformational systems and the algebraic structure of atomic formulas, *Machine Intelligence*, Vol.5, pp.135–152 (1970).

[18] Kahl, W.: Finite limits and anti-unification in substitution categories, *Proc. 24th International Workshop on Algebraic Development Techniques* (*WADT 2018*), Lecture Notes in Computer Science, Vol.11563, pp.87–102, Springer-Verlag (2019).

[19] Maher, M.J. and Stucker, P.J.: On inductive inference of cyclic structures, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, Vol.15, No.2, pp.167–208 (1995).

[20] Baumgärtner, A., Kutsia, T., Levy, J. and Villaret, M.: Term-graph anti-unification, *Proc. 3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction* (*FSCD 2018*), Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol.108, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, pp.9:1–9:17 (2018).

[21] Adámek, J., Milius, S. and Velebil, J.: Free iterative theories: A coalgebraic view, *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol.13, pp.259–320 (2003).

[22] Moss, L.S.: Parametric corecursion, *Theoretical Computer Science*, Vol.260, No.1, pp.139–163 (2001).

[23] Jacobs, B.: Relating two approaches to coinductive solution of recursive equations, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol.106, pp.145–166 (2004).

[24] Bartels, F.: On generalised coinduction and probabilistic specification formats: Distributive laws in coalgebraic modelling, PhD Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam (2004).

[25] De Marchi, F., Ghani, N. and Lüth, C.: Solving algebraic equations using coalgebra, *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, Vol.37, No.4, pp.301–314 (2003).

宮前 海里

1997 年生．2019 年新潟大学工学部情報工学科卒業．現在，同大学大学院自然科学研究科電気情報工学専攻情報工学コース博士課程前期に在籍．

青戸 等人　（正会員）

1969 年生．1997 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了．同年同大学情報科学研究科助手．1998 年群馬大学工学部助手．2003 年東北大学電気通信研究所講師，2004 年同助教授，2007 年同准教授．2015 年より新潟大学自然科学系教授．博士（情報科学）．書き換えシステム，定理自動証明，ソフトウェア基礎の研究に従事．ソフトウェア科学会，ACM，EATCS 各会員．