

# スピン数増加を抑えたイジングモデルのビット幅削減手法

谷地 悠太<sup>1</sup> 於久 太祐<sup>2</sup> 武笠 陽介<sup>2</sup> 多和田 雅師<sup>3</sup> 戸川 望<sup>2</sup>

**概要:** 組合せ最適化問題を効率的に解く計算機としてアニーリングマシンが注目されている。アニーリングマシンでは組合せ最適化問題をイジングモデルと呼ばれるデータ構造に変換することで、元の組合せ最適化問題を解法する。この際、イジングモデルの係数のビット幅はアニーリングマシンの扱える値の範囲内に収める必要がある。本稿では、シフト法とスピン追加法を組合せた効果的なビット幅削減手法を提案する。提案手法は、まずシフト法を適用することでイジングモデル全体の係数をだまかに削減し、その後、アニーリングマシンの扱える値の範囲を超える係数について、さらにスピン追加法を適用する。その結果、追加スピンを抑えながらビット幅変換前後でイジングモデルの基底状態（最低エネルギー状態）が変化することを防ぐ。本稿では、提案手法を適用した際、基底状態を変化させない条件を理論的に見出すと同時に、計算機実験により、シフト法ならびにスピン追加法と比較して、提案手法は追加スピンを削減しながら、より広範囲のイジングモデルに対して基底状態を変化させずにビット幅を削減できることを示す。

## 1. はじめに

現在、配送ルートの最適化やジョブ管理スケジューリングの最適化といった実際の問題は組合せ最適化問題として数理モデル化される。多くの組合せ最適化問題は NP または NP 困難な問題であり、最適解を得るためには変数の量に対して指数的な計算時間がかかる。組合せ最適化問題をより効率的に処理するハードウェアとして、アニーリングマシンが注目されている。アニーリングマシンとは、物理現象を用いて組合せ最適化問題を解くハードウェアであり、量子アニーリングマシン [1], [2], [3], [4] や CMOS アニーリングマシン [5], [6], [7], デジタルアニーラ [8] 等が知られている。

アニーリングマシンで組合せ最適化問題の解を得る場合、組合せ最適化問題をイジングモデル [9] に変換する必要がある。イジングモデルはスピン、相互作用、外部磁場の 3 つから構成される統計力学モデルである。イジングモデルの例を図 1 に示す。スピンには  $+1/-1$  の 2 値の向きがあり、外部磁場と呼ばれる強制力がかかっている。イジングモデル中の 2 個のスピン同士には相互作用と呼ばれる強制力がかかっている。あるスピンの向きはこれらの強制力と周辺のスピンによって決まる。アニーリングマシンは、物理現象等を利用してイジングモデルのエネルギーが低い状態を探索する。スピンの向きはこれらの強制力と

周辺のスピンによって決まる。この際、イジングモデルのスピンが表す 2 値変数が定まると、エネルギーの値を計算することができる。イジングモデルに対して、エネルギー状態が最も低いスピンの向きを基底状態と呼び、そのときのイジングモデルのエネルギーを基底エネルギーと呼ぶ。

アニーリングマシンを用いて組合せ最適化問題を解く手順を図 2 に示す。図 2 は以下の 5 フェーズに分けられる。

**フェーズ 1** 解きたい組合せ最適化問題を目的関数や制約関数で表し、論理イジングモデルとして定式化する。論理イジングモデルとは、スピン数に制約がなく、任意のスピン間に相互作用が働く接続辺を置くことができ、また外部磁場係数ならびに相互作用係数は任意の実数を取ることができる。

**フェーズ 2** 定式化された論理イジングモデルを、実際のアニーリングマシンへ埋め込むために物理イジングモデルにマッピングする。物理イジングモデルとは、アニーリングマシンのトポロジ上に物理的接続のあるスピン間のみ相互作用を置くことができるイジングモデルを指す。また物理イジングモデルでは、相互作用係数と外部磁場係数が表現できる数値の範囲に制限がある。

**フェーズ 3** アニーリングマシンが、物理イジングモデルのエネルギーが低い状態を探索する。

**フェーズ 4** アニーリングマシンが出力した物理イジングモデルの状態を論理イジングモデルに復元する。

**フェーズ 5** 論理イジングモデルの状態を組合せ最適化問

<sup>1</sup> 早稲田大学大学情報通信学科

<sup>2</sup> 早稲田大学大学院基幹理工学研究科情報理工・情報通信専攻

<sup>3</sup> 早稲田大学グリーン・コンピューティング・システム研究機構

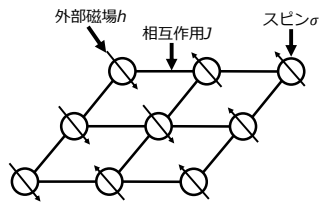


図 1: イジングモデルの例.

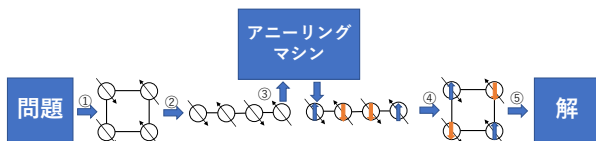


図 2: アニーリングマシンを用いて組合せ最適化問題を解く流れ.

題の解に変換する.

特にフェーズ 2 では, 論理イジングモデルから物理イジングモデルへマッピングする際に, 論理イジングモデルから物理イジングモデルのトポロジに変換する (トポロジ変換). 論理イジングモデルの相互作用係数と外部磁場係数のビット幅を物理イジングモデルの相互作用係数と外部磁場係数のビット幅に変換 (ビット幅変換) する必要がある. 実アニーリングマシンによって組合せ最適化問題を解法するには, トポロジ変換ならびにビット幅変換共に重要であるが, 本稿では, 特に後者のビット幅変換に着目することにする. 特に, 論理イジングモデルの相互作用係数と外部磁場係数のビット幅は任意のものであるのに対して, 実アニーリングマシンが表す物理イジングモデルの相互作用係数と外部磁場係数のビット幅は有限であり, いかにこれらのビット幅を削減するかが重要となる.

既存のビット幅削減手法にはシフト法とスピン追加法 [10] が存在する. シフト法は, 元のイジングモデルの相互作用係数や外部磁場係数の下位ビットを削減することでビット幅を削減する手法である. シフト法は, スピン数が増加しないが基底状態が変換前後で必ずしも一致しない可能性がある. スピン追加法は, 補助スピンを追加することで係数の重みを分散させ, ビット幅を削減する手法である. スピン追加法は, 基底状態が変換前後で一致するが, スピン数が増加する.

本稿では, シフト法とスピン追加法を組合せた効果的なビット幅削減手法を提案する. 提案手法は, まずシフト法を適用することでイジングモデル全体の係数を大まかに削減し, その後, アニーリングマシンの扱える値の範囲を超

える係数について, さらにスピン追加法を適用する. その結果, 追加スピンを抑えながらビット幅変換前後でイジングモデルの基底状態が変化することを防ぐ.

本稿の貢献点は以下の通りである.

- (1) シフト法とスピン追加法を組合せたビット幅削減手法を提案する. 提案手法は, シフト法によりイジングモデル全体の係数を大まかに削減し, さらにスピン追加法により, すべての係数がアニーリングマシンの扱える値の範囲に抑えることを可能とする.
- (2) 提案手法は, もとのイジングモデルの係数が一定の範囲内であれば, ビット幅変換前後で基底状態を理論的に変化させない.
- (3) 計算機実験により提案手法は既存手法に比べビット幅削減量が同じならば追加スピン数や基底状態の変化が少ないことを示す.

以下に本稿の構成を示す. 2 章で既存のビット幅削減手法を説明する. 3 章でシフト法とスピン追加法を組合せた手法を提案する. 4 章で提案手法の実験結果を示す. 5 章で本稿をまとめる.

## 2. 既存のビット幅削減手法

本章では, 既存のビット幅削減手法であるシフト法とスピン追加法 [10] を説明する. シフト法は, 元のイジングモデルの相互作用係数や外部磁場係数の下位ビットを削減することでビット幅を削減する手法である. スピン追加法は, 補助スピンを追加することでビット幅を減らす手法である. なお本稿では, 各係数は符号ビット 1 ビットと数値ビットから構成されるものとする.

### 2.1 イジングモデルのビット幅削減問題

イジングモデルは  $G = (V, E)$  で表されるグラフ  $G$  上に定義される. スピン  $\sigma_i$  は頂点  $i \in V$  上に定義され,  $J_{i,j}$  はエッジ  $e = (i, j) \in E$  上に定義される. イジングモデルのエネルギー関数は式 (1) で表される.

$$H_{\text{Ising}} = \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} h_i \sigma_i \quad (1)$$

式 (1) を最小化するようなスピン  $\sigma_i$  の向き (+1 あるいは -1) を  $G$  の基底状態と呼び, その際の式 (1) の値を基底エネルギーと呼ぶ. ただし,  $\sigma_i$  ( $i \in V$ ) はスピンを表し  $\pm 1$  の値をとる.  $J_{i,j}$  は  $\sigma_i$  と  $\sigma_j$  間の相互作用を,  $h_i$  は  $\sigma_i$  にかかる外部磁場を表し任意の整数をとる.

式 (1) で表される任意のイジングモデル  $G = (V, E)$  を, 制約されたビット幅を持つイジングモデル  $G' = (V', E')$  への変換は以下ようになる [10].  $V'$  は  $V$  に対していくつかのスピンを表す頂点を追加したものであり,  $E'$  は追

**Algorithm 1** シフト法のアプローチ

**Input:**  $G = (V, E), w_V, w_E, b_{\text{org}}, b_{\text{dst}}$   
**Output:**  $G' = (V', E'), w'_V, w'_E$   
 $d = 2^{(b_{\text{org}} - b_{\text{dst}})}$   
 $V' = V$   
 $E' = E$   
**for**  $v$  in  $V'$  **do**  
  **if**  $w_V(v) > 0$  **then**  
     $w'_V(v) = \max(\lfloor \frac{w_V(v)}{d} \rfloor, 1)$   
  **else if**  $w_V(v) < 0$  **then**  
     $w'_V(v) = \min(\lceil \frac{w_V(v)}{d} \rceil, -1)$   
  **end if**  
**end for**  
**for**  $e = (i, j)$  in  $E'$  **do**  
  **if**  $w_E(e) > 0$  **then**  
     $w'_E(e) = \max(\lfloor \frac{w_E(e)}{d} \rfloor, 1)$   
  **else**  
     $w'_E(e) = \min(\lceil \frac{w_E(e)}{d} \rceil, -1)$   
  **end if**  
**end for**

加したスピンに対して、 $E$  にいくつかのエッジを追加したものを表す。また  $G = (V, E)$  は元のイジングモデル、 $G' = (V', E')$  はビット幅削減後のイジングモデルと呼ぶ。

- 入力
- (1)  $G = (V, E)$   
 $V$ : スピンの頂点の集合,  $E$ : エッジの集合  
 $Z$ : 整数の集合
  - (2)  $w_V: V \rightarrow \mathbf{Z}, w_E: E \rightarrow \mathbf{Z} \setminus \{0\}$   
 $w_V(v)$ : 頂点  $v \in V$  に対応するスピンの外部磁場係数  
 $w_E(e)$ : エッジ  $e \in E$  に対応する相互作用係数
  - (3)  $r_V^{\text{lower}}, r_V^{\text{upper}}, r_E^{\text{lower}}, r_E^{\text{upper}}$   
対象マシンの外部磁場係数と相互作用係数の上限と下限  
なお、以下のように仮定する。  
 $r_V^{\text{upper}}, r_E^{\text{upper}} > 0, r_V^{\text{lower}}, r_E^{\text{lower}} < 0$

出力

- (1)  $G' = (V', E')$
- (2)  $w'_{V'} \rightarrow [r_V^{\text{lower}}, r_V^{\text{upper}}]$   
 $w'_{E'} \rightarrow [r_E^{\text{lower}}, r_E^{\text{upper}}] \setminus \{0\}$

ここで  $[m, n]$  は  $m$  以上  $n$  以下の整数の集合を表す。なお、外部磁場の値は 0 を許容するが、相互作用の値は 0 を許容しない。

**2.2 シフト法**

シフト法は、元のイジングモデルの相互作用係数や外部磁場係数の下位ビットを削ることでビット幅を削減する手法である。シフト法のアプローチを Algorithm1 に示す。 $b_{\text{org}}$  は、与えられたイジングモデルのすべての係数を表現

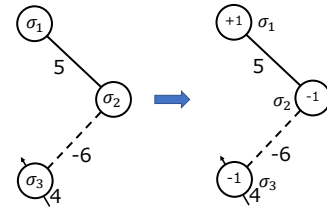


図 3: 相互作用と外部磁場が 4 ビットで表されるイジングモデルの例。

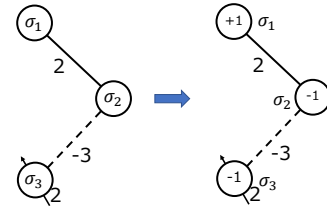
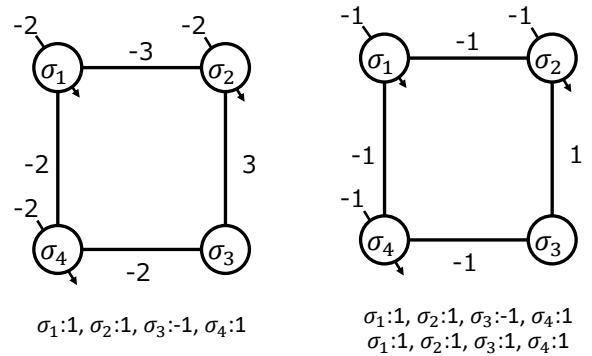


図 4: 図 3 のイジングモデルをシフト法により相互作用と外部磁場が 3 ビットで表されるイジングモデルへ変換した例。



(a) シフト法適用前のイジングモデル (b) シフト法適用後のイジングモデル。

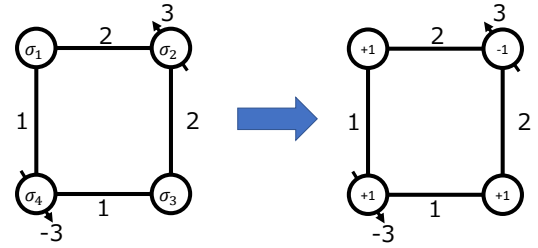
図 5: シフト法適用により基底状態が変化する例。

するために必要なビット数を表す。 $b_{\text{dst}}$  はビット幅削減の目標とするビット数を表す。

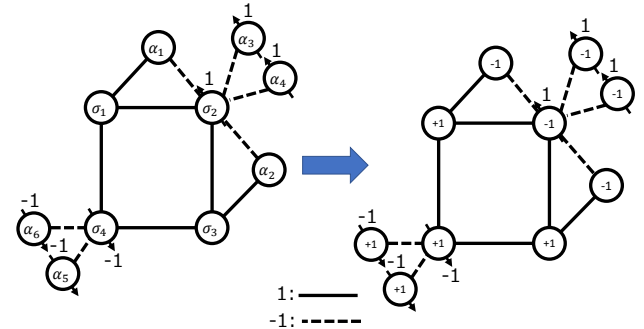
相互作用係数と外部磁場係数が 4 ビットで表されるイジングモデルと基底状態を図 3 に、図 3 のイジングモデルをシフト法により 1 ビット削減したイジングモデルを例を図 4 に示す。図 3 の基底状態のエネルギー値は  $H_1 = -15$  であり、図 4 の基底状態のエネルギー値は  $H_2 = -7$  である。エネルギー値は異なるが、基底状態は一致する。シフト法はスピン数を増やさないが、下位ビットを削除するため、変換後の基底状態が一致しなくなる可能性がある。図 5 にシフト法の適用により基底状態が変化する例を示す。図 5(a) にシフト法適用前のイジングモデルを、図 5(b) にシフト法適用後のイジングモデルを示す。図 5(a) と図 5(b) を比較すると、図 5(b) では図 5(a) の基底状態の他に、もう一つの基底状態が存在する。

**Algorithm 2** 相互作用係数の変換アルゴリズム

**Require:**  $G = (V, E), w_V, w_E$   
**Ensure:**  $G' = (V', E'), w'_V, w'_E$   
 $V' = V, E' = E$   
**for**  $e = (i, j)$  **in**  $E$  **do**  
  **while**  $w_E(e) > r_E^{\text{upper}}$  **do**  
     $w_E(e) = w_E(e) - r_E^{\text{upper}}$   
    新たな頂点  $v'$  を生成し,  $V'$  に  $v'$  を追加  
    新たなエッジ  $e'_1 = (i, v'), e'_2 = (v', j)$  を生成し,  $E'$  に  $e'_1, e'_2$  を追加  
     $w'_E(e'_1) = r_E^{\text{upper}}, w'_E(e'_2) = -r_E^{\text{upper}}$   
  **end while**  
  **while**  $w_E(e) < r_E^{\text{lower}}$  **do**  
     $w_E(e) = w_E(e) - r_E^{\text{lower}}$   
    新たな頂点  $v'$  を生成し,  $V'$  に  $v'$  を追加  
    新たなエッジ  $e'_1 = (i, v'), e'_2 = (v', j)$  を生成し,  $E'$  に  $e'_1, e'_2$  を追加  
     $w'_E(e'_1) = -r_E^{\text{lower}}, w'_E(e'_2) = -r_E^{\text{lower}}$   
  **end while**  
   $w'_E(e) = w_E(e)$   
**end for**



(a) スピン追加法適用前のイジングモデルと基底状態.



(b) スピン追加法適用後のイジングモデルと基底状態.

**Algorithm 3** 外部磁場係数の変換アルゴリズム

**Require:**  $G = (V, E), w_V, w_E$   
**Ensure:**  $G' = (V', E'), w'_V, w'_E$   
 $V' = V, E' = E$   
**for**  $v$  **in**  $V$  **do**  
  **while**  $w_V(v) > r_V^{\text{upper}}$  **do**  
     $w_V(v) = w_V(v) - r_V^{\text{upper}}$   
    新たな頂点  $v'$  を生成し,  $V'$  に  $v'$  を追加  
    新たなエッジ  $e' = (v, v')$  を生成し,  $E'$  に  $e'$  を追加  
     $w'_E(e') = -r_V^{\text{upper}}, w'_V(v') = r_V^{\text{upper}}$   
  **end while**  
  **while**  $w_V(v) < r_V^{\text{lower}}$  **do**  
     $w_V(v) = w_V(v) - r_V^{\text{lower}}$   
    新たな頂点  $v'$  を生成し,  $V'$  に  $v'$  を追加  
    新たなエッジ  $e' = (v, v')$  を生成し,  $E'$  に  $e'$  を追加  
     $w'_E(e') = r_V^{\text{lower}}, w'_V(v') = r_V^{\text{lower}}$   
  **end while**  
   $w'_V(v) = w_V(v)$   
**end for**

**2.3 スピン追加法 [10]**

スピン追加法 [10] は, スピンを追加することでビット幅を削減する. シフト法の欠点である基底状態が変換前後で必ずしも一致しない問題点を解決する. スピン追加法は, 相互作用係数を変換するアルゴリズムと外部磁場係数を変換するアルゴリズムの2つからなる. 相互作用係数を変換するアルゴリズムを Algorithm2 に示し, 外部磁場係数を変換するアルゴリズムを Algorithm3 に示す.

図 6 にスピン追加法による基底状態の例を示す. 相互作用係数, 外部磁場係数が 3 ビットで表すことのできるイジ

図 6: スピン追加法による基底状態変化の例.

ングモデルを図 6(a) に示す. 図 6(a) のイジングモデルから, スピン追加法を適用により, 相互作用係数と外部磁場係数を 1 ビット削減したイジングモデルを図 6(b) に示す. 図 6(b) では, 符号ビットを 1 ビット, 数値ビットを 1 ビットとし, 合わせて 2 ビットで各係数を表現している. すなわち, 図 6(b) では,  $r_E^{\text{upper}} = r_V^{\text{upper}} = 1, r_E^{\text{lower}} = r_V^{\text{lower}} = -1$  としている.

Algorithm2 より  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の間の相互作用  $J_{1,2}$  について, 相互作用係数 2 を 2 ビットまで削減する.  $r_E^{\text{upper}} = 1$  なので, 相互作用係数は  $w_E((1, 2)) = 2 - 1 = 1$  とする. その後スピン  $\alpha_1$  を追加し,  $\sigma_1$  と  $\alpha_1$  を相互作用係数 1 で,  $\sigma_2$  と  $\alpha_1$  を相互作用係数  $-1$  で接続する. 同様のアルゴリズムを  $J_{2,3}$  にも適応する.

Algorithm3 より  $\sigma_4$  の外部磁場  $h_4$  について, 外部磁場計数  $-3$  を 2 ビットまで削減する.  $r_V^{\text{lower}} = -1$  なので, 外部磁場係数は  $w_V(2) = -3 - (-1) - (-1) = -1$  となる. その後, スピン  $\alpha_5$  と  $\alpha_6$  を外部磁場  $-1$  で追加し, 相互作用係数を  $-1$  とする. 同様のアルゴリズムを  $\sigma_1$  に適応する.

以上より, 図 6(a) の状態から図 6(b) の状態へと変換する. 変換しても補助スピンの状態を無視した場合, 図 6(a) と図 6(b) の基底状態は一致する.

**3. シフト法とスピン追加法を組合せた手法**

本章では, シフト法とスピン追加法を組合せた手法を提案する. シフト法は, 相互作用係数と外部磁場係数の下位

ビットが0でない場合に、変換前後で基底状態が変化  
可能性がある。提案手法では、相互作用係数と外部磁  
場係数の値のどれか一つの絶対値が一定の値以下  
になるまでシフト法を逐次的に適用し、次にスピン  
追加法を適用する。提案手法は、スピン追加法と  
比較してスピンの増加を抑えつつ、シフト法と  
比較して基底状態が変化することを防ぐ。

### 3.1 シフト法における基底状態の振る舞い

あるイジングモデルの相互作用係数  $J_{i,j}$  と外部  
磁場係数  $h_i$  の下位 1 ビットを削減する場合を  
考える。今、 $M_1 = (V_1, E_1)$  を相互作用のみで  
構成されたイジングモデル、 $M_2 = (V_2, E_2)$  を  
外部磁場のみに構成されたイジングモデルとする。  
また簡単のため、 $M_1$  の相互作用係数  $J_{i,j}$   
ならびに  $M_2$  の外部磁場係数  $h_i$  はすべて正  
であるとし、すべて 2 の倍数であるとする。

$M_1$  に関して、エネルギー関数  $H_1$  は式 (2) で表  
される。

$$H_1 = \sum_{(i,j) \in E_1} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (J_{i,j} > 0) \quad (2)$$

相互作用  $J_{i,j}$  に対して下位 1 ビットを削除すると  
エネルギー関数は式 (3) で表される。

$$H'_1 = \sum_{(i,j) \in E_1} \left\lfloor \frac{1}{2} J_{i,j} \right\rfloor \sigma_i \sigma_j$$

$$2H'_1 = \sum_{(i,j) \in E_1} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (3)$$

ここで式 (2) で表されるエネルギー関数を最小化  
するようなスピン  $\sigma_i$  ( $i$  は  $M_1$  上の任意の頂点) の  
向き (+1 か -1) は、明らかに式 (3) で表される  
エネルギー関数を最小化する。つまり式 (2) の基底  
状態と式 (3) の基底状態は一致することになる。

また、 $M_2$  に関して、エネルギー関数  $H_2$  は式 (4)  
で表される。

$$H_2 = \sum_{i \in V_2} h_i \sigma_i \quad (h_i > 0) \quad (4)$$

外部磁場  $h_i$  に対して下位 1 ビットを削除すると  
エネルギー関数は式 (5) で表される。

$$H'_2 = \sum_{i \in V_2} \left\lfloor \frac{1}{2} h_i \right\rfloor \sigma_i$$

$$2H'_2 = \sum_{i \in V_2} h_i \sigma_i \quad (5)$$

ここで式 (4) で表されるエネルギー関数を最小化  
するようなスピン  $\sigma_i$  ( $i$  は  $M_2$  上の任意の頂点) の  
向き (+1 か -1) は、明らかに式 (5) で表される  
エネルギー関数を最小化する。つまり式 (4) の基底  
状態と式 (5) の基底状態は一致することになる。

式 (3) と式 (5) より、任意のイジングモデルを  
表す式 (1) は、係数の下位 1 ビットを削除すると式  
(6) となる。

$$H' = \sum_{(i,j) \in E} \left\lfloor \frac{1}{2} J_{i,j} \right\rfloor \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} \left\lfloor \frac{1}{2} h_i \right\rfloor \sigma_i \quad (6)$$

ここで  $[x]$  は小数値の切り捨て、すなわち  $x \geq 0$  の  
とき  $[x]$ 、 $x < 0$  のとき  $\lceil x \rceil$  を表す。式 (6) の  
すべての  $J_{i,j}$ 、 $h_i$  が 2 の倍数の時、式 (6) は式  
(7) に変換できる。

$$2H' = \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} h_i \sigma_i \quad (7)$$

ここで式 (1) で表されるエネルギー関数を最小化  
するようなスピン  $\sigma_i$  ( $i$  は頂点集合  $V$  上の任意の  
頂点) の向き (+1 か -1) は、明らかに式 (7) で表  
されるエネルギー関数を最小化する。つまり式 (1) の  
基底状態と式 (7) の基底状態は一致することになる。

したがって、相互作用係数と外部磁場係数が 2 の  
べき乗であるとき、シフト法の変換前後の基底状態  
は一致すると考えられる。

上記を一般化すると以下ようになる。

**定理 1.** すべての相互作用係数  $J_{i,j}$  とすべての  
外部磁場係数  $h_i$  が整数  $n > 0$  の倍数である場合、  
式 (8) と式 (9) の基底状態は一致する。

$$H = \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} h_i \sigma_i \quad (8)$$

$$H' = \sum_{(i,j) \in E} \left\lfloor \frac{1}{n} J_{i,j} \right\rfloor \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} \left\lfloor \frac{1}{n} h_i \right\rfloor \sigma_i \quad (9)$$

**証明.** イジングモデルのエネルギー関数は式 (10)  
で表される。

$$H = \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} h_i \sigma_i \quad (10)$$

ここで、相互作用係数  $J_{i,j}$  と外部磁場係数  $h_i$  が  
整数  $n$  で割り切れるので、式 (10) の相互作用係  
数と外部磁場係数を  $n$  で割ると式 (11) となる。

$$H' = \sum_{(i,j) \in E} \left\lfloor \frac{1}{n} J_{i,j} \right\rfloor \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} \left\lfloor \frac{1}{n} h_i \right\rfloor \sigma_i$$

$$nH' = \sum_{(i,j) \in E} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} h_i \sigma_i \quad (11)$$

式 (10) と式 (11) の右辺は一致している。よって、  
式 (10) のエネルギー関数を最小化するようなス  
ピン  $\sigma_i$  ( $i \in V$ ) の向き (+1 か -1) は、明  
らかに式 (11) で表されるエネルギー関数を最小  
化する。以上より、式 (10) と式 (11) の基底  
状態は同じになる。□

定理 1 より、相互作用係数  $J_{i,j}$  と外部磁場係  
数  $h_i$  が整数  $n$  の倍数の場合、 $J_{i,j}$  と  $h_i$  を  
 $n$  で除算した前後で基底状態は一致する。一方  
で、相互作用係数  $J_{i,j}$  と外部磁場係数  $h_i$  が  
 $n$  の倍数でない場合、式 (10) から式 (11) へ  
の変形ができないため、除算前後で基底状態が一  
致しない可能性がある。

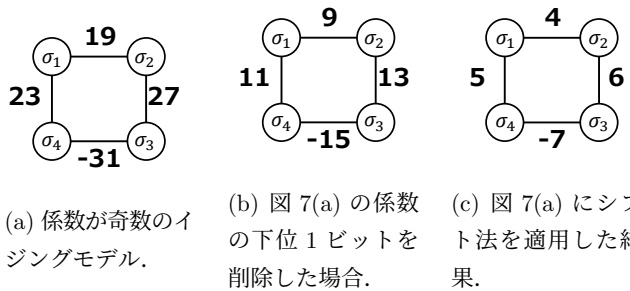


図 7: 係数が奇数の場合 ( $r_V^{\text{lower}} = -7, r_V^{\text{upper}} = 7$ )。

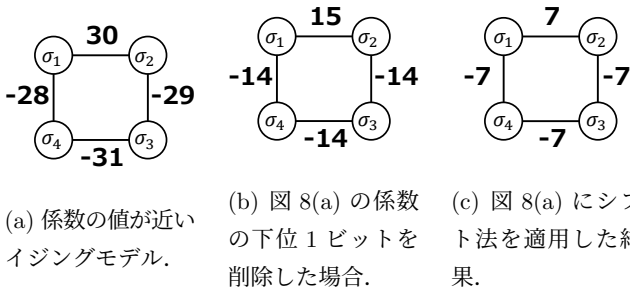


図 8: 係数の値が近い場合 ( $r_V^{\text{lower}} = -7, r_V^{\text{upper}} = 7$ )。

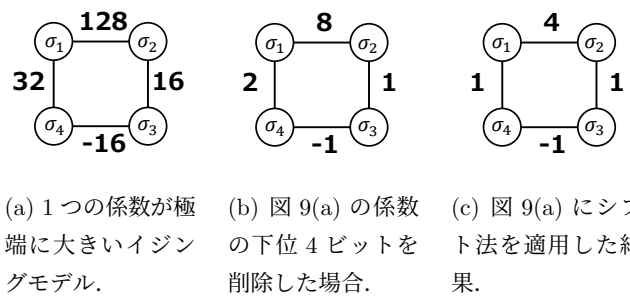


図 9: 1つの係数が極端に大きい場合 ( $r_V^{\text{lower}} = -7, r_V^{\text{upper}} = 7$ )。

ある。シフト法では、下位ビットを削減するため、 $n = 2$  で切り捨て除算を繰り返すのと等価となる。よって、相互作用係数と外部磁場係数が 2 の倍数の場合は変換前後で基底状態が一致するが、相互作用係数と外部磁場係数が 2 の倍数でない場合は変換前後で基底状態が一致しない可能性がある。

上記より、シフト法の適用前後の基底状態が異なる原因は以下の二つが考えられる。

- 原因 1 相互作用係数や外部磁場係数が奇数の場合、係数を 2 で除算した場合、切り捨てが生じるため。
- 原因 2 相互作用係数や外部磁場係数が  $\pm 1$  の場合、これ以上除算ができず、そのまま  $\pm 1$  とするため。

原因 1 に該当する例として、以下の 2 つの係数の組合せが考えられる。

ケース 1 係数がすべて奇数の場合。

ケース 2 2 つの係数  $x, y$  の値が近い場合、2 による除算を行うと、切り捨てにより値の大小が変化する場合。

図 7 にケース 1 の例を示す。図 7(b) のイジングモデルは、図 7(a) のイジングモデルの相互作用係数を 1 ビット削減したものである。さらに図 7(c) のイジングモデルは、図 7(b) のイジングモデルの相互作用係数を 1 ビット削減したものである。図 7(b) の  $J_{1,2}$  の 2 倍は図 7(a) の  $J_{1,2}$  と等しくない。また、図 7(c) のイジングモデルにおいて、図 8(b) の  $J_{1,2}$  の 2 倍は図 7(b) の  $J_{1,2}$  と等しくない。よって、図 7(c) は、図 7(a) に対して、相互作用係数の下位 2 ビットを削減しているが、変換前のイジングモデル (図 7(a)) の係数は、変換後のイジングモデル (図 7(c)) の対応する係数の 4 倍には必ずしもなっていない。

図 8 にケース 2 の例を示す。シフト法適用前の図 8(a) の相互作用係数  $J_{2,3}, J_{3,4}, J_{4,1}$  の値はすべて異なっているが、シフト法適用後の図 8(c) の相互作用係数  $J_{2,3}, J_{3,4}, J_{4,1}$  の値はすべて等しくなっている。よって、図 8 では下位 2 ビットを削除しているが、変換前のイジングモデル (図 8(a)) の係数は、変換後のイジングモデル (図 8(c)) の対応する係数の 4 倍には必ずしもなっていない。

原因 2 に該当する例として、以下の 1 つの係数の組合せが考えられる。

ケース 3 1 つの係数が極端に大きいもしくは小さい場合。

図 9 にケース 3 の例を示す。極端に大きい相互作用係数 (図 9 では 128) が  $r_V^{\text{upper}} = 7$  に収まるまで 2 で除算される (5 回除算される)。この時、図 9(b) の  $J_{2,3}$  と  $J_{3,4}$  に対しては、 $\pm 1$  に対する 2 の除算の結果として、そのまま  $\pm 1$  を出力する (図 9(c) の  $J_{2,3}, J_{3,4}$ )。結果、図 9(b) の  $J_{4,1} = 2$  に対する 2 の除算の結果である図 9(c) の  $J_{4,1} = 1$  と図 9(c) の  $J_{2,3} = 1$  の値が等しくなる。よって、図 9(c) は、図 9(a) に対して、下位 5 ビットを削減しているが、変換前のイジングモデル (図 9(a)) の係数は、変換後のイジングモデル (図 9(c)) の対応する係数の 32 倍には必ずしもなっていない。

### 3.2 シフト法に関する予備実験

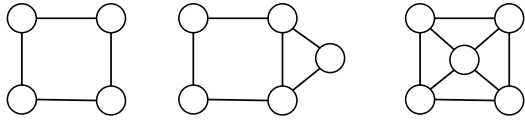
シフト法の基底状態が不一致となる原因を検証した。

#### 3.2.1 実験手順

実験手順を以下に示す。

- (1) 5 種類のイジングモデルを用意する。用意したイジングモデルを図 10 に示す。
- (2) 図 10 のイジングモデルの相互作用係数と外部磁場係数に以下の 3 つのケースで値を設定する。
  - (I) 各相互作用係数と外部磁場係数を  $\pm 8$  から  $\pm 100$  までの奇数とする。ただし、どの 2 つの相互作用係数





(a) モデル 1. (b) モデル 2. (c) モデル 3.



(d) モデル 4. (e) モデル 5.

図 10: 実験に用いたイジングモデル.

表 1: シフト法の変換前後での基底状態の変化に関する実験結果.

| モデル     | ケース 1 | ケース 2 | ケース 3 |
|---------|-------|-------|-------|
| 図 10(a) | 一致    | 不一致   | 不一致   |
| 図 10(b) | 一致    | 不一致   | 一致    |
| 図 10(c) | 不一致   | 不一致   | 不一致   |
| 図 10(d) | 一致    | 不一致   | 不一致   |
| 図 10(e) | 一致    | 不一致   | 一致    |

と外部磁場係数も同じ値を取らない。(ケース 1)

- (II) 各相互作用係数と外部磁場係数を  $\pm 8$  から  $\pm 100$  での整数とする。ただし、どの 2 つの相互作用係数の絶対値と外部磁場係数の絶対値の差は 10 以内とする。(ケース 2)
  - (III) 各相互作用係数と外部磁場係数を  $\pm 8$  から  $\pm 100$  での整数とする。ただし、ただ 1 つの相互作用係数もしくは外部磁場係数を  $\pm 100$  から  $\pm 200$  までの整数とする。(ケース 3)
- (3) イジングモデルの基底状態を総当たりで求める。
  - (4) すべての係数が  $r_V^{\text{lower}} = r_E^{\text{lower}} = -7, r_V^{\text{upper}} = r_E^{\text{upper}} = 7$  の範囲内に収まるようにシフト法でイジングモデルのビット幅を削減する。
  - (5) ビット幅を削減したイジングモデルに対して、総当たりで基底状態を求める。
  - (6) 3 で得られた基底状態と 5 で得られた基底状態を比較する。

組合せ (I) は図 7 の例に対応する。組合せ (II) は図 8 の例に対応する。組合せ (III) は図 9 の例に対応する。

### 3.2.2 実験結果

シフト法を適用してイジングモデルを変換する前後を比較した実験結果を表 1 に示す。

### Algorithm 4 提案手法のアルゴリズム

**Require:**  $G = (V, E), w_V, w_E$

**Ensure:**  $G' = (V', E'), w_{V'}, w_{E'}$

```

while True do
  if すべての  $v$  の内, 1 つ以上の  $v$  が  $r_V^{\text{lower}} \leq w_{V'(v)}$  and  $w_{V'(v)} \leq r_V^{\text{upper}}$  then
    break
  end if
  if すべての  $e$  の内, 1 つ以上の  $e$  が  $r_E^{\text{lower}} \leq w_{E'(e)}$  and  $w_{E'(e)} \leq r_E^{\text{upper}}$  then
    break
  end if
   $V' = V$ 
   $E' = E$ 
  for  $v$  in  $V'$  do
    if  $w_V(v) > 0$  then
       $w_{V'}(v) = \max(\lfloor \frac{w_V(v)}{2} \rfloor, 1)$ 
    else if  $w_V(v) < 0$  then
       $w_{V'}(v) = \min(\lceil \frac{w_V(v)}{2} \rceil, -1)$ 
    end if
  end for
  for  $e$  in  $E'$  do
    if  $w_E(e) > 0$  then
       $w_{E'}(e) = \max(\lfloor \frac{w_E(e)}{2} \rfloor, 1)$ 
    else
       $w_{E'}(e) = \min(\lceil \frac{w_E(e)}{2} \rceil, -1)$ 
    end if
  end for
end while
Algorithm2 の適用
Algorithm3 の適用

```

組合せ (I) の基底状態は変換前後で一致していることから、単純に奇数に対する除算による影響は小さいと考えられる。組合せ (II) の結果より、係数の値が近い場合、切り捨ての除算により値の大小関係が丸められることから、基底状態に影響が出てくると考えられる。組合せ (III) の結果より、 $\pm 1$  に対する除算において、除算の結果をそのまま  $\pm 1$  とすることにより、値の大小関係が丸められることから、基底状態に影響が出てくると考えられる。

### 3.3 提案手法のアルゴリズム

3.2.2 項で説明したように、シフト法は、ケース 1~ケース 3 においてビット削減によって、基底状態を変化させることになる。このうち特にケース 2 とケース 3 では、基底状態が大きく変化する。そこで、シフト法による基底状態の変化を最小限に留めた上で、スピン追加法を適用することを考える。以下のアプローチをとる。

**Step 1:** シフト法を適用することにより、イジングモデル全体の相互作用係数と外部磁場係数のビット幅を削減する。

**Step 2:** Step 1 の結果に対して、すべての相互作用係数

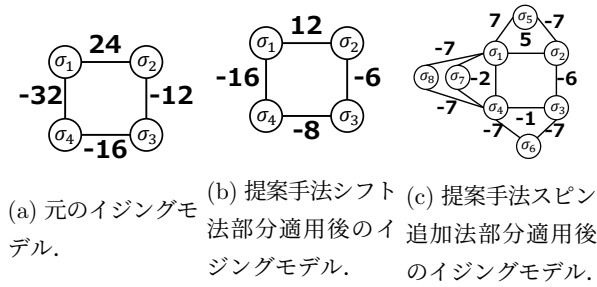


図 11: 提案手法適用の流れ.

が  $r_E^{\text{lower}}$  以上  $r_E^{\text{upper}}$  以下, 外部磁場係数が  $r_V^{\text{lower}}$  以上  $r_V^{\text{upper}}$  以下となるようにビット幅を削減する.

ここで, イジングモデル中の相互作用係数のいずれか1つが  $r_E^{\text{lower}}$  以上  $r_E^{\text{upper}}$  以下になるまで, あるいは外部磁場係数のいずれか1つが  $r_V^{\text{lower}}$  以上  $r_V^{\text{upper}}$  以下になるまでシフト法を適用することを考える. もしここまでシフト法を適用しないと, すべての相互作用係数は  $r_E^{\text{lower}}$  未満あるいは  $r_E^{\text{upper}}$  以上であり, 外部磁場係数は  $r_V^{\text{lower}}$  未満あるいは  $r_V^{\text{upper}}$  以上であり, Step 2 で極めて多くのスピンを追加することとなる. 一方, Step 1 でシフト法をさらに多く適用すると, 3.2.2 項のケース 2 あるいはケース 3 のように, 多くの係数が同じ値になる, あるいは  $\pm 1$  になり, 基底状態の変化が生じる. つまり, Step 1 は, イジングモデル中の相互作用係数のいずれか1つが  $r_E^{\text{lower}}$  以上  $r_E^{\text{upper}}$  以下になるまで, あるいは外部磁場係数が  $r_V^{\text{lower}}$  以上  $r_V^{\text{upper}}$  以下になるまでシフト法を適用することが最も良い. なお, この場合でも, 一部の低位ビットはシフト法により削除されるが, 3.2.2 項のケース 1 の予備実験のように, この影響は大きくないと考える (詳細は, 4 章の実験結果を参照).

提案手法のアルゴリズムを Algorithm4 に示す. 4 スピンのイジングモデルに対し, 提案手法でビット幅を削減した例を図 11 に示す. ただし,  $r_E^{\text{lower}} = -7, r_E^{\text{upper}} = 7$  とする. まず, 相互作用の内どれか1つが  $r_E^{\text{lower}}$  から  $r_E^{\text{upper}}$  の範囲に収まるまで低位ビットの削除をする. 次にスピンの追加法を用いて変換をする. 図 11(b) では,  $J_{2,3} = -12$  を 2 で割ると  $-6$  になるため, シフト法からスピン追加法に変える. スピン追加法を元のイジングモデルに適用すると 10 スピン増えるが, 提案手法では 4 スピン増える.

### 3.4 提案手法における基底状態の振る舞い

図 11 の例において, 元のイジングモデル (図 11(a)) とビット幅削減後のイジングモデル (図 11(c)) の基底状態を考える. まず元のイジングモデルの相互作用係数はすべて 2 の倍数となっている. すべての相互作用係数を 2 で割ると, 図 11(b) のイジングモデルを得る. このとき定理 1 により, 元のイジングモデル (図 11(a)) と図 11(b) のイジングモデルは基底状態が変化しない. また, その後, スピン追加法により図 11(b) のイジングモデルから図 11(c) のイ

ジングモデルを得る. 文献 [10] によれば, スピン追加法により基底状態は変化しない. つまり, 図 11 の例では元のイジングモデル (図 11(a)) とビット幅削減後のイジングモデル (図 11(c)) の基底状態は一致する.

上記を一般化すると以下ようになる.

**定理 2.** あるイジングモデルのエネルギー関数が式 12 で表されるとする.

$$H = \sum 2^{p_{i,j}} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum 2^{q_i} h_i \sigma_i \quad (12)$$

$J_{i,j}, h_i \neq 0$  は任意の奇数 (最下位ビットが 1),  $p_{i,j} \geq 0, q_i \geq 0$  は整数とする.  $p_{i,j}$  と  $q_i$  が最小となるエッジ  $(i,j) \in E$  と頂点  $k \in V$  について,  $r_E^{\text{lower}} \leq J_{i,j} \leq r_E^{\text{upper}}$  または  $r_V^{\text{lower}} \leq h_k \leq r_V^{\text{upper}}$  であれば提案手法の変換前後で基底状態は一致する.

**証明.** イジングモデルのエネルギー関数が式 (13) で表されるとする.

$$H = \sum_{(i,j) \in E} 2^{p_{i,j}} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} 2^{q_i} h_i \sigma_i \quad (13)$$

最小の  $p_{i,j}$  をとるエッジを  $(i_m, j_m) \in E$  とする. 最小の  $q_k$  をとる頂点  $k_m \in V$  とする.

$q_{k_m} \geq p_{i_m, j_m}$  の場合を考える.  $r_E^{\text{lower}} = -|J_{i_m, j_m}|, r_E^{\text{upper}} = |J_{i_m, j_m}|$  とすると, 提案手法ではどれか一つの相互作用係数が  $r_E^{\text{lower}}$  以上  $r_E^{\text{upper}}$  以下, もしくは外部磁場係数が  $r_V^{\text{lower}}$  以上  $r_V^{\text{upper}}$  以下になるまで低位ビットを削減するため, シフト法適用時に削減するビット数は  $p_{i_m, j_m}$  となる. よって, 式 (13) のシフト法適用後のエネルギー関数は式 (14) となる.

$$H = \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2^{p_{i_m, j_m}}} 2^{p_{i,j}} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} \frac{1}{2^{p_{i_m, j_m}}} 2^{q_i} h_i \sigma_i \quad (14)$$

式 (14) に関して,  $q_i \geq q_{k_m} \geq p_{i_m, j_m}$  かつ  $p_{i,j} \geq p_{i_m, j_m}$  であるため, すべての係数は  $2^{p_{i_m, j_m}}$  で割り切れる. よって定理 1 より式 (13) から式 (14) の変形で基底状態は一致する. 以上より, このあとにスピン追加法を適用しても,  $q_{k_m} \geq p_{i_m, j_m}$  の時, 各係数のビット幅を  $[r_E^{\text{lower}}, r_E^{\text{upper}}]$  とすると提案手法の変換前後で基底状態は一致する.

$p_{i_m, j_m} \geq q_{k_m}$  の場合を考える.  $r_V^{\text{lower}} = -|h_{k_m}|, r_V^{\text{upper}} = |h_{k_m}|$  とすると, 提案手法ではどれか一つの相互作用係数が  $r_E^{\text{lower}}$  以上  $r_E^{\text{upper}}$  以下, もしくは外部磁場係数が  $r_V^{\text{lower}}$  以上  $r_V^{\text{upper}}$  以下になるまで低位ビットを削減するため, シフト法適用時に削減するビット数は  $q_{k_m}$  となる. よって式 (13) のシフト法適用後のエネルギー関数は式 (15) となる.

$$H = \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2^{q_{k_m}}} 2^{p_{i,j}} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V} \frac{1}{2^{q_{k_m}}} 2^{q_i} h_i \sigma_i \quad (15)$$



式 (15) に関して,  $p_{i,j} \geq p_{i_m,j_m} \geq q_{k_m}$  かつ  $q_i \geq q_{k_m}$  であるため, すべての係数は  $2^{q_{k_m}}$  で割り切れる. よって定理 1 より式 (13) から式 (14) の変形で基底状態は一致する. 以上より, このあとにスピンの追加法を適用しても,  $p_{i_m,j_m} \geq q_{k_m}$  の時, 各係数のビット幅を  $[r_V^{\text{lower}}, r_V^{\text{upper}}]$  とすると提案手法の変換前後で基底状態は一致する.  $\square$

なお, 相互作用係数  $2^{p_{i,j}} J_{i,j}$  について,  $J_{i,j} < r_E^{\text{lower}}$  あるいは  $J_{i,j} > r_E^{\text{upper}}$  のとき, 提案手法では, シフト法によって  $p_{i,j}$  回以上ビットシフトすることになり,  $J_{i,j}$  の下位ビットが削除されることになる. この場合には, ビット削減前後で基底状態が変化することがある. 同様に, 外部磁場係数  $2^{q_i} h_i$  について,  $h_i < r_V^{\text{lower}}$  あるいは  $h_i > r_V^{\text{upper}}$  のとき, 提案手法では, シフト法によって  $q_i$  回以上ビットシフトすることになり,  $h_i$  の下位ビットが削除されることになる. この場合には, ビット削減前後で基底状態が変化することがある.

#### 4. 提案手法の評価実験

本章では, 提案手法に対する 2 種類の評価実験の結果を示す.

##### 4.1 整数分割問題を用いた提案手法の評価実験

提案手法を整数分割問題に用いて実験した.

###### 4.1.1 整数分割問題

本実験では整数分割問題を用いる. 整数分割問題とは, 与えられた正の整数列を二つの集合に分けた時に, それぞれの集合の和の差が 0 になるかどうかを判定する問題である.  $N$  個の整数  $n_1, n_2, \dots, n_N$  の整数分割問題は, スピン  $\sigma_i$  を用いて式 (16) でイジングモデルに変換する [11].

$$H = \left( \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i \right)^2 \quad (16)$$

###### 4.1.2 実験手順

実験手順を以下に示す.

- (1) 整数分割問題をイジングモデルに変換する.
- (2) イジングモデルの基底状態を総当たりで求める.
- (3) 提案手法でイジングモデルのビット幅を削減する. またこのときの基底状態を求める. 提案手法でイジングモデルのビット幅を削減すると, スピン数が増加し, 総当たりで基底状態を求めることが不可能となる. そこで, 実アニーリングマシン [8] を用いて基底状態を求める. なお, 実アニーリングマシンを利用した場合, 必ずしも基底状態が求まるとは限らないことに注意する.
- (4) シフト法でビット幅削減したイジングモデルの基底

表 2: 各手法で整数分割問題を解いた実験結果 1.

| 分割対象の値                 | 提案手法 | シフト法   |      | スピン追加法 |      |
|------------------------|------|--------|------|--------|------|
|                        |      | 一致/不一致 | スピン数 | 一致/不一致 | スピン数 |
| $\{i i \in [10, 11]\}$ | 一致   |        | 2    | 一致     | 4    |
| $\{i i \in [10, 12]\}$ | 一致   |        | 3    | 一致     | 10   |
| $\{i i \in [10, 13]\}$ | 不一致  |        | 4    | 不一致    | 20   |
| $\{i i \in [10, 14]\}$ | 一致   |        | 7    | 一致     | 35   |
| $\{i i \in [10, 15]\}$ | 不一致  |        | 12   | 不一致    | 56   |
| $\{i i \in [10, 16]\}$ | 一致   |        | 18   | 一致     | 83   |
| $\{i i \in [10, 17]\}$ | 不一致  |        | 26   | 不一致    | 119  |
| $\{i i \in [10, 18]\}$ | 一致   |        | 35   | 不一致    | 164  |
| $\{i i \in [10, 19]\}$ | 不一致  |        | 47   | 不一致    | 221  |
| $\{i i \in [10, 20]\}$ | 不一致  |        | 61   | 不一致    | 287  |

表 3: 各手法で整数分割問題を解いた実験結果 2.

| 分割対象の値                  | 提案手法 | シフト法   |      | スピン追加法 |      |
|-------------------------|------|--------|------|--------|------|
|                         |      | 一致/不一致 | スピン数 | 一致/不一致 | スピン数 |
| $\{10i i \in [1, 2]\}$  | 一致   |        | 2    | 一致     | 6    |
| $\{10i i \in [1, 3]\}$  | 一致   |        | 4    | 一致     | 28   |
| $\{10i i \in [1, 4]\}$  | 一致   |        | 11   | 一致     | 86   |
| $\{10i i \in [1, 5]\}$  | 一致   |        | 26   | 一致     | 209  |
| $\{10i i \in [1, 6]\}$  | 一致   |        | 52   | 不一致    | 430  |
| $\{10i i \in [1, 7]\}$  | 一致   |        | 96   | 不一致    | 794  |
| $\{10i i \in [1, 8]\}$  | 一致   |        | 162  | 不一致    | 1348 |
| $\{10i i \in [1, 9]\}$  | 不一致  |        | 260  | 不一致    | 2153 |
| $\{10i i \in [1, 10]\}$ | 不一致  |        | 397  | 不一致    | 3270 |

状態を総当たりで求める.

- (5) スピン追加法でイジングモデルのビット幅を削減した場合のスピン数を求める.
- (6) (2), (3), (4) で得られた解と (3) と (5) で得られたスピン数を比較する.

上記の問題に対して, 物理イジングモデルの相互作用係数ならびに外部磁場係数の範囲を  $r^{\text{lower}} = -80$  から  $r^{\text{upper}} = +80$  とし, この範囲に収まるようにビット削減した.

###### 4.1.3 実験結果

整数分割問題を提案手法を使いビット幅削減し実アニーリングマシンで解いた実験結果と, シフト法を使いビット幅削減し総当たりで解いた結果とスピンの追加法で変換した場合のスピン数をそれぞれ表 2 と表 3 に示す.

表 2 に関して, シフト法と提案手法の変換前の基底状態の一致数は提案手法が多くなった. 表 3 に関して, シフト法と提案手法の変換前の基底状態の一致数は提案手法が多くなった.

すべての組合せで提案手法で生成したイジングモデルのスピン数はスピンの追加法のスピン数よりも少なく, スピン増加量を抑えられることを確認した.

表 4: 各手法で図 10 のイジングモデルを解いた実験結果.

| イジングモデル            | 手法   | 削減の結果許容するビット幅 |    |    |     |     |     |     |
|--------------------|------|---------------|----|----|-----|-----|-----|-----|
|                    |      | 15            | 13 | 11 | 9   | 7   | 5   | 3   |
| 図 10(a)(提案ビット幅:11) | シフト法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 不一致 | 不一致 |
|                    | 提案手法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
| 図 10(b)(提案ビット幅:11) | シフト法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
|                    | 提案手法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
| 図 10(c)(提案ビット幅:11) | シフト法 | 一致            | 一致 | 一致 | 不一致 | 不一致 | 不一致 | 一致  |
|                    | 提案手法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
| 図 10(d)(提案ビット幅:15) | シフト法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
|                    | 提案手法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
| 図 10(e)(提案ビット幅:11) | シフト法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |
|                    | 提案手法 | 一致            | 一致 | 一致 | 一致  | 一致  | 一致  | 一致  |

## 4.2 定理 2 の検証実験

定理 2 で証明した提案手法の性質を検証した.

### 4.2.1 実験手順

実験手順を以下に示す.

- (1) 図 10 に示した 5 種類のイジングモデルを用意する.
- (2) 各係数を  $z = x \times 2^y$  とする. ただし,  $x$  に  $\pm 11$  から  $\pm 17$  の間の奇数,  $y$  に 2 から 5 のランダムな値を用いた.
- (3) イジングモデルの基底状態を総当たりで求める.
- (4) シフト法でビット幅を削減したイジングモデルの基底状態を総当たりで求める.
- (5) 提案手法でビット幅を削減したイジングモデルの基底状態を実アニーリングマシン [8] で求める.
- (6) (3) と (4) と (5) で得られた基底状態を比較する.

上記の問題に対して, 物理イジングモデルの相互作用係数ならびに外部磁場係数の範囲を  $r^{\text{lower}} = -15, r^{\text{upper}} = 15$  から  $r^{\text{lower}} = -3, r^{\text{upper}} = 3$  へと変化させながら, この範囲に収まるようにビット削減した.

### 4.2.2 実験結果

図 10 のイジングモデルを提案手法を使いビット幅削減し実アニーリングマシンで解いた結果と, シフト法を使いビット幅削減し総当たりで解いた結果を表 4 に示す.

表中の提案ビット幅は定理 2 で求められるビット幅削減の目標とする値を表す. 表 4 より, ビット幅削減の目標とする値が定理 2 で求められるビット幅削減の目標とする値以上の場合, 提案手法変換前後で基底状態が一致することを確認した. また, 定理 2 のビット幅削減の目標とする値未満の場合でも, シフト法と比較して提案手法は基底状態がより一致することを確認した.

## 5. おわりに

本稿では, ビット幅削減手法の新規手法として, シフト法とスピン追加法を組合せた手法を提案した. また, シフト法における基底状態のふるまいと, 提案手法における特定のイジングモデルでの基底状態の振る舞いについて証明, 検証した. 提案手法はシフト法より基底状態が一致しやすく, スピン追加法よりスピン数の増加を抑えられるため, より多くの問題を解くことができる可能性がある. 今後, 提案手法とトポロジ変換を組合せ, 任意の論理イジングモデルから特定の物理イジングモデルに変換する手法を構築する.

## 謝辞

本成果は, 国立研究開発法人新エネルギー・産業技術開発機構 (NEDO) の委託業務の結果得られたものである.

## 参考文献

- [1] Johnson, M. W., Amin, M. H. S., Gildert, S., Lanting, T., Hamze, F., Dickson, N., Harris, R., Berkley, A. J., Johansson, J., Bunyk, P. and et al.: Quantum annealing with manufactured spins, *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 194–198 (online), DOI: 10.1038/nature10012 (2011).
- [2] Bunyk, P. I., Hoskinson, E. M., Johnson, M. W., Tolkacheva, E., Altomare, F., Berkley, A. J., Harris, R., Hilton, J. P., Lanting, T., Przybysz, A. J. and Whittaker, J.: Architectural Considerations in the Design of a Superconducting Quantum Annealing Processor, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 24, No. 4, pp. 1–10 (online), DOI: 10.1109/TASC.2014.2318294 (2014).
- [3] King, A. D., Carrasquilla, J., Raymond, J., Ozfidan, I., Andriyash, E., Berkley, A., Reis, M., Lanting, T., Harris, R., Altomare, F. et al.: Observation of topological phenomena in a programmable lattice of 1,800 qubits, *Nature*, Vol. 560, No. 7719, pp. 456–460 (2018).
- [4] Maezawa, M., Fujii, G., Hidaka, M., Imafuku, K., Kikuchi, K., Koike, H., Makise, K., Nagasawa, S.,

- Nakagawa, H., Ukibe, M. and Kawabata, S.: Toward Practical-Scale Quantum Annealing Machine for Prime Factoring, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 88, No. 6, p. 061012 (online), DOI: 10.7566/JPSJ.88.061012 (2019).
- [5] Yamaoka, M., Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T., Aoki, H. and Mizuno, H.: A 20k-spin Ising chip to solve combinatorial optimization problems with CMOS annealing, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 51, No. 1, pp. 303–309 (online), DOI: 10.1109/JSSC.2015.2498601 (2016).
- [6] Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T. and Yamaoka, M.: Implementation and evaluation of FPGA-based annealing processor for Ising model by use of resource sharing, *International Journal of Networking and Computing*, Vol. 7, No. 2, pp. 154–172 (2017).
- [7] Okuyama, T., Hayashi, M. and Yamaoka, M.: An Ising computer based on simulated quantum annealing by path integral Monte Carlo method, *2017 IEEE International Conference on Rebooting Computing, ICRC 2017 - Proceedings*, Vol. 2017-Janua, pp. 1–6 (online), DOI: 10.1109/ICRC.2017.8123652 (2017).
- [8] Aramon, M., Rosenberg, G., Valiante, E., Miyazawa, T., Tamura, H. and Katzgraber, H. G.: Physics-Inspired Optimization for Quadratic Unconstrained Problems Using a Digital Annealer, *Frontiers in Physics*, Vol. 7, No. 48, pp. 1–14 (online), DOI: 10.3389/fphy.2019.00048 (2019).
- [9] Ising, E.: Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus, *Zeitschrift für Physik*, Vol. 31, No. 1, pp. 253–258 (online), DOI: 10.1007/BF02980577 (1925).
- [10] Oku, D., Tawada, M., Tanaka, S. and Togawa, N.: How to Reduce the Bit-width of an Ising Model by Adding Auxiliary Spins, *IEEE Transactions on Computers*, pp. 1–1 (online), DOI: 10.1109/TC.2020.3045112 (2020).
- [11] Lucas, A.: Ising formulations of many NP problems, *Frontiers in Physics*, Vol. 2, No. 5, pp. 1–15 (online), DOI: 10.3389/fphy.2014.00005 (2014).