

家庭用燃料電池発電計画への量子アニーリングの応用

田中洋一¹ 山城悠² 篠原秀人² 瑞慶覧長空¹

概要: 家庭用燃料電池は高い発電効率とともに、発電の際に発生した熱を使用する事により省エネルギーに貢献できるものとして、その普及が望まれている。私たちは非常に短い時間間隔の緻密な最適運転計画を策定する事により、家庭用燃料電池のエネルギー効率を更に向上させることを考え、それを実現するための量子アニーリングと機械学習を組み合わせた運転計画手法を考案した。この手法は、量子アニーリングを使用できる形に定式化した燃料電池運転最適化問題を、様々な電力・熱需要の条件のもとで解き、得た電力・熱需要と最適解の関係を機械学習モデルに学習させるものである。本研究報告では、開発した手法とその省エネルギー効果を紹介する。

キーワード: 発電計画, 量子アニーリング, 機械学習, 燃料電池

Application of Quantum Annealing to Operation of Residential Fuel Cell CHP systems

YOICHI TANAKA^{†1} YU YAMASHIRO^{†2}
HIDETO SHINOHARA^{†2} CHOKU ZUKERAN^{†1}

Abstract: Residential fuel cell (FC) combined heat and power (CHP) systems are desired to be widespread as they can contribute to energy saving by generating electricity with high efficiency and also using the heat generated during power generation. We think that further improvement of the energy efficiency of FC CHP systems can be achieved by scheduling a precise optimum operation plan with very short time intervals. To realize it, we devised the scheduling method of combining quantum annealing and machine learning. In this method, the FC CHP system operation problem formulated in a form that can be solved by quantum annealing is solved under various power and heat demand conditions, and then the relationship between the obtained optimal solutions and power and heat demand is learned by the machine learning model. In this research report, we will introduce the developed method and its energy saving effect.

Keywords: Power generation optimization, Quantum annealing, Machine learning, Fuel cell

1. はじめに

家庭用燃料電池コージェネレーションシステム(以下、FC-CHP: residential Fuel Cell-Combined Heat and Power system)は高い発電効率とともに、発電の際に発生した熱を使用する事により省エネルギーに貢献できるものとして、その普及が望まれている。FC-CHP を効率的に運用するためには、発生する電気と熱の両方を最大限利用する必要があり、発電計画が重要となる。

FC-CHP の発電計画策定法として、最も信頼できるものは、数理計画法により最適な運用スケジュールを計算する方法である。数理計画法による CHP の最適運転計画は、数十年前から研究されている[1][2][3][4][5][6]。主要なアプローチの1つは、最適運転計画問題を混合整数線形計画問題(Mixed Integer Linear Programming: MILP)として定式化する方法である。伊藤らは、ガスタービン CHP の最適運転計画問題を MILP として定式化して解く手法を提案している

[1]。MILP アプローチは柔軟なモデリングが可能であり、かつ、最適解を保証するため、CHP システムに関する様々な条件を想定した多くの最適化問題に使用されている[2][3][4]。

前述のメリットにもかかわらず、MILP アプローチには課題もある。その一つは、ほとんどの場合、MILP アプローチは、多くの計算リソースを必要するため、時間ステップの幅が広く、時間ステップの数が比較的少ない運転計画しか扱えないことである。また、別の課題として、最適運転計画のために、正確な需要予測が必要なことが挙げられる。これらの課題により、MILP アプローチを FC-CHP の最適運転計画に適用することが困難になっている。

これらの課題の解決策の一つとして、田中らは、エネルギー需要の変動を考慮するための制約条件を付けたモデリング方法を提案した[7]。

しかし、エネルギー需要予測の問題は残されたままであ

¹ 東邦ガス株式会社
Toho Gas Co., Ltd.
² 株式会社 Jij
Jij Inc

り、FC-CHP の運転計画には、主にルールベースのアルゴリズム[8][9]が用いられている。ただし、ルールベースのアルゴリズムの性能は、エネルギー需要の特性に大きく依存する。このため、あらゆる形態のエネルギー需要に対して高性能を発揮するルールベースのアルゴリズムを設計することは困難である。

上記の問題を解決するため、数理最適化の精度と、ルールベースのアルゴリズムの迅速な応答を兼ね備えた新しい運転計画方法を提案する。我々の提案する FC-CHP 運転計画方法は、様々なエネルギー需要に対する大量の最適運転スケジュールによりトレーニングされた機械学習モデルを使用するものである。

本研究報告では、Ising マシンと呼ばれる専用ソルバーを使用して、教師データの生成に必要な多数の最適化計算を実行するためのアルゴリズムを提案する。Ising マシンは、制約なし 2 値変数 2 次計画問題 (Quadratic Unconstrained Binary Optimization: QUBO) [10][11][12][13][14][15][16][17]を解くための特殊なソルバである。Ising マシンは、市販の量子アニーラーである D-Wave [10]の登場以来、積極的に研究開発されている。

Ising マシンにより解ける問題は QUBO に限定されているため、多くの制約付き最適化問題は、ペナルティ法[18]により QUBO に変換する必要がある。これまで、トラフィック最適化[19]、機械学習[20][21][22]、タンパク質フォールディング[23]、ブラックボックス最適化[24]など、特定の組み合わせ最適化問題に Ising マシンを使用する応用例が報告されている。

本研究報告では、機械学習のための教師データを効率的に生成するために Ising マシンが使用されることを想定し、Ising マシンに適した FC-CHP 運転計画最適化問題の数式モデルおよび求解アルゴリズムを示す。次に、本求解アルゴリズムによって求められる運転計画の精度、および、機械学習と組み合わせて EF-CHP 運転計画に適用した場合の有効性について報告する。

2. 開発した運転計画最適化手法

(1) 最適化手法の概要

従来の MILP 最適化手法は、将来のエネルギー需要の正確な予測が必要であったが、我々が新たに開発した運転計画最適化手法は、過去のシステムの状態から直接最適な FC-CHP 発電量を出力する機械学習モデルを採用する事により、将来のエネルギー需要の予測を不要にした。

機械学習モデルは次の手順で作成される。最初に、ある期間のエネルギー需要に対する、FC-CHP 最適運転計画問題を解き、当該期間のエネルギー需要に対する当該期間の最適運転計画を求める。次に、ある期間のシステムの状態とそれより先の時間ステップの発電出力の組を教師データとして、過去のシステムの状態から将来の最適な FC-CHP

の発電量を出力する機械学習モデルをトレーニングする。最適化問題を解く代わりに機械学習モデルによる推論を採用することにより、将来のデータなしで運用計画を出力することができる。

ただし、機械学習モデルをトレーニングするために必要な教師データを生成するには、多数の最適化問題を解く必要がある。FC-CHP 最適運転計画問題を、単に MILP として定式化した場合、解を求めるために大量の計算リソースが必要となることから、機械学習モデルのための教師データを生成するには適さない。このため、MILP を離散変数部分と連続変数部分に分割し、問題の性質を利用して求めた連続変数の近似解を使用しながら、離散変数部分と連続変数部分を順次解く求解アルゴリズムを考案した。

(2) 運転計画最適化問題の定式化

対象とする FC-CHP のシステム構成を図 1 に示す。FC-CHP は、時間 h に都市ガス (燃料) $x(h)$ を消費することにより、電力 $q(h)$ を発電する。このプロセスには熱の発生 $\pi(h)$ が伴い、この熱はお湯の形で利用される。発生した熱 $\pi(h)$ は貯湯タンクに蓄えられる。蓄熱された熱を $Q(h)$ とする。

電力需要 $e(h)$ と熱需要 $\theta(h)$ は、それぞれ、FC-CHP システムの発電 $q(h)$ と貯湯タンクからの出湯 $p(h)$ によってまかなわれ、満たされない需要は、商用電力入力 $z(h)$ とバックアップボイラ出力によって補われる。

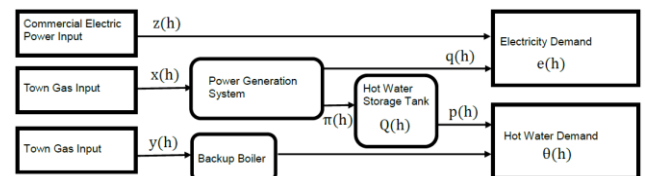


図 1 家庭用 FC-CHP のエネルギーフロー

Figure 1 Energy Flow of residential FC-CHP system

本研究では、先行研究[7]により提案された数学モデルを基礎として、FC-CHP の数式モデルを構築した。

最小化対象は、エネルギー需要を満たすために必要なガスと電気のコスト、FC-CHP の待機コスト、発停コストである。

$$\begin{aligned}
 E = & C_1 \sum_{h=1}^H (x(h) + y(h)) + C_2 \sum_{h=1}^H z(h) \\
 & + C_3 \sum_{h=1}^H \alpha(h) + C_4 \sum_{h=1}^H \beta(h) \\
 & + C_5 \sum_{h=1}^H (1 - \delta(h))
 \end{aligned}$$

(式 1)

ここで、 $\delta(h)$ は、システムが時間 h に起動中の場合は 1、待機中の場合は 0 となる 0/1 変数である。また、 $\alpha(h)$ と $\beta(h)$ は、それぞれ起動時、停止時に 1、それ以外は 0 の値をとる 0/1 変数である。

現実的な FC-CHP の運転計画を策定するため、先行研究 [7] の数式モデルに発電出力の変化量に関する制約を追加した。

$$\Delta q^- \leq q(h+1) - q(h) \leq \Delta q^+ \quad (式 2)$$

ほとんどの場合、FC-CHP が発電した電力は商用電力よりもコストが低い。また、電力需要と熱需要を超えて発電し、バックアップボイラにより給湯する運用計画は、最適運転計画ではないことが多い。このような FC-CHP の特性を考慮して、各時間ステップで電力需要、熱需要を満たす FC-CHP の最小出力を選択することにより、適切な近似解を得ることができると期待できる。

FC-CHP の発電出力の近似解 $q_a(h)$ を、 $q(h)$ が電力需要を超えないという制約、 $x(h)$ の上限値と下限値、先行研究 [7] の $q_{max}(h)$ 、および $q(h)$ の変化量の制約を踏まえて、次式で算出することとした。

$$q_a(h) := \max(\min(e(h), q_{max}(h), bx_{max} + q_0, q(h-1) + \Delta q^+), q(h-1) - \Delta q^-, bx_{min} + q_0) \quad (式 3)$$

同様に、 $x(h)$ 、 $y(h)$ 、 $z(h)$ の近似解を次式のように定める。

$$x_a(h) := \frac{1}{b}(q_a(h) - q_0(h)) \quad (式 4)$$

$$y_a(h) := \frac{1}{c}\theta(h) \quad (式 5)$$

$$z_a(h) := \max(e(h) - q_a(h), 0) \quad (式 6)$$

FC-CHP 最適運転計画問題における連続変数が、FC-CHP が起動している時には式 3 から式 6 に示す近似解の値を取り、起動していない時には 0 とすると、元の問題は 0/1 変数 $\delta(h) \in \{0,1\}$ 、 $\omega \in \{0,1\}$ を用いて次式で表される。

$$\min E(\{\delta(h)\}_{h=1}^H, \{\omega(h)\}_{h=1}^H)$$

$$= C_1 \sum_{h=1}^H (x(h) + y(h)) + C_2 \sum_{h=1}^H z(h) + C_3 \sum_{h=1}^H \alpha(h) + C_4 \sum_{h=1}^H \beta(h) + C_5 \sum_{h=1}^H (1 - \delta(h)) \quad (式 7)$$

制約条件は以下のとおり。

$$q(h) = q_a(h)\delta(h) \quad (式 8)$$

$$x(h) = x_a(h)\delta(h) \quad (式 9)$$

$$y(h) = y_a(h)\omega(h) \quad (式 10)$$

$$z(h) = z_a(h)\delta(h) + e(h)(1 - \delta(h)) \quad (式 11)$$

$$\pi(h) = ax(h) + \pi_0\delta(h) \quad (式 12)$$

$$p(h) = \theta(h) + cy(h) \quad (式 13)$$

$$Q(1) = Q_0 \quad (式 14)$$

$$Q(h+1) = Q(h) + \pi(h) - p(h) - \epsilon(h) \quad (式 15)$$

$$\epsilon(h) = \eta Q(h) \quad (式 16)$$

$$q_{max}(h) = \int_0^{q_{MAX}} \xi \rho_h(\xi) d\xi + q_{MAX} \int_{q_{MAX}}^{+\infty} \rho_h(\xi) d\xi \quad (式 17)$$

$$\alpha(h) = (\delta(h) - \delta(h-1))\delta(h) \quad (式 18)$$

$$\beta(h) = (\delta(h-1) - \delta(h))\delta(h-1) \quad (式 19)$$

$$Q_{min} \leq Q(h) \leq Q_{max} \quad (式 20)$$

ここで、式 20 は不等式制約であるから、このままでは本問題は QUBO として扱えない。そこで、式 20 の代替となるソフト制約を目的関数 式 7 に加える。

$$E_{QUBO} = E(\{\delta(h)\}_{h=1}^H, \{\omega(h)\}_{h=1}^H) + \frac{1}{\gamma \sum_{h=1}^H \theta(h)} \sum_{h=1}^H d(h) \left(Q(h) - \gamma \sum_{h'=h}^H \theta(h') \right)^2 \quad (式 21)$$

本制約条件は、貯湯タンクの蓄熱量を熱需要に近づける

ことを意図している。ここで、 $\gamma \leq 1$ は、貯湯タンクの蓄熱量が熱需要を満たさず割合を示す定数である。また、 $d(h) \leq 1$ は、 h に関して単調減少する定数であり、時間ステップが進むに従い、この制約条件の重要性が小さくなることを示す。

(3) ハイブリッドアルゴリズム

上述の定式化により、FC-CHP 最適運転計画問題の連続変数が 0/1 変数に置き換えられ、Ising マシンで扱える QUBO として定式化される。

本 QUBO を解いた後、0/1 変数を定数とみなし、連続変数を最適化対象とすることで、FC-CHP 最適運転計画問題は、線形計画問題(LP)として扱うことができる。この場合、0/1 変数の値は、QUBO を解いた際の最適値とする。

このようにして構築した LP は、一般的なソルバにより容易に解を得ることができる。我々が考案した求解アルゴリズムをまとめると、以下のとおりとなる。

【ステップ 1】各連続変数の近似解を生成する。

【ステップ 2】ステップ 1 の近似解を使用して QUBO モデルを構築し、Ising 計算を実行する。

【ステップ 3】0/1 変数の値をステップ 2 で得られた QUBO の解に固定し、LP ソルバを用いて元の数式モデルの連続値のみの最適化問題を解く。

(4) 機械学習

FC-CHP の実機に搭載される演算機の計算リソースや要求される運転計画の精度に応じて、様々な機械学習モデルの選択オプションがあるが、本研究では過去の電力・ガス需要データから運転計画を推定するモデルとして Light GBM による回帰を採用した。

現在の時間 h から時間ステップ L までの過去、および、1 週間前の同時間のシステムの状態(表 1)から、1 時間ステップ将来の時間 $h+1$ の FC-GHP の出力 $q_{predict}(h+1)$ を推算するモデルとした。

機械学習モデルのトレーニングのための教師データは、前述のハイブリッドアルゴリズムにより表 1 中の各変数の値、発電量 q を求めることで生成する。

表 1 機械学習モデルの入力

Table 1 Input of the machine learning model

変数名	内容
$x(t)$, $t = h, h-1, \dots, h-L+1, h-T$ T は 1 週間の時間ステップ数	FC-CHP ガス消費量
$y(t)$, $t = h, h-1, \dots, h-L+1, h-T$ T は 1 週間の時間ステップ数	ボイラガス消費量
$z(t)$, $t = h, h-1, \dots, h-L+1, h-T$ T は 1 週間の時間ステップ数	商用電力消費量

$p(t)$, $t = h, h-1, \dots, h-L+1, h-T$ T は 1 週間の時間ステップ数	貯湯タンク出熱
$q(t)$, $t = h, h-1, \dots, h-L+1, h-T$ T は 1 週間の時間ステップ数	FC-CHP 発電量
$\Sigma\alpha(h)$	時間0から h までの $\alpha(h)$ の和
$\Sigma\beta(h)$	時間0から h までの $\beta(h)$ の和
$\Sigma\theta(h)$	時間0から h までの $\theta(h)$ の和

また、機械学習モデルが出力する FC-CHP の発電量の範囲が、システムの有する制約条件を破らないようにするため、機械学習モデルの出力に次式のフィルタをかけたものを FC-CHP の発電出力とした。

$$f(q_{predict}(h+1)) = \max(\min(q_{predict}(h+1), q_{MAX}, bx_{max} + q_0, q(h-1) + \Delta q^+), q(h-1) - \Delta q^-, bx_{min} + q_0) \quad (式 22)$$

3. 結果

先行研究[7]と同じ 2006 年 1 月から 2007 年 3 月までのある住宅の電力需要、熱需要のデータを用いて、最適化計算を実行した。本章で 1 日あたりの結果として記載するのは、すべて当該期間の各日の平均値である。

本研究では、前述のハイブリッドアルゴリズムでの QUBO 部分を解くために、Ising マシンの代わりにオープンソースの Ising マシンシミュレータである OpenJij を使用した。また、LP 部分を解くために、IBM CPLEX Optimizer20.1 を使用した。

(1) ハイブリッドアルゴリズムにて得られる解の評価

表 2 は、MILP として定式化された FC-CHP 運転計画問題を厳密解法で解いた場合の運転コストに対する、前述のハイブリッドアルゴリズム(Hybrid)、ハイブリッドアルゴリズムの QUBO 部分のみのアルゴリズム(QUBO)、現在の時間ステップの情報のみを用いて逐次発電量を決める方法(Local)の、運転コストの比を示したものである。ここで、現在の時間ステップの情報のみを用いて発電量を決める方法(Local)は、電力需要に追従して発電量を決める事を基本としたアルゴリズムで、実際の FC-CHP の発電制御を模擬したものである。

また、本比較実験は、1 日の時間ステップ数 $H=24$ から 1440 の、異なる時間ステップ幅で実施している。

表 2 より、ハイブリッドアルゴリズムで求めた運転計画は、すべての時間ステップ数 H において、従前の FC-CHP の運転計画(Local)よりも、運転コストが小さくなる事が分かる。時間ステップ幅 $\Delta t=1$ 分の場合において、ハイブ

リッドアルゴリズムは、従前の運転計画に対して約 2.5 ポイント運転コストが小さくなる。

表 2 運転コスト比

Table 2 Approximation ratio of operation costs

H	Δt [min]	Hybrid [%]	QUBO(SA) [%]	Local [%]
24	60	101.10	102.01	109.11
48	30	100.90	103.22	108.13
96	15	101.10	102.01	107.92
288	5	101.03	102.10	107.34
720	2	100.86	103.74	105.27
1440	1	100.96	102.02	103.48

(2) ハイブリッドアルゴリズムの計算実行時間の評価

図 1 は、FC-CHP 運転計画問題の求解に必要な計算実行時間と時間ステップ数 H の関係を、MILP として定式化し厳密解法で解く方法(MILP)、ハイブリッドアルゴリズム(Hybrid)、ハイブリッドアルゴリズムの QUBO 部分のみのアルゴリズム(QUBO)について表したものである。

1 日の時間ステップ $H > 1000$ で、ハイブリッドアルゴリズムは MILP の厳密解法に対して 10 倍以上高速であることが分かる。

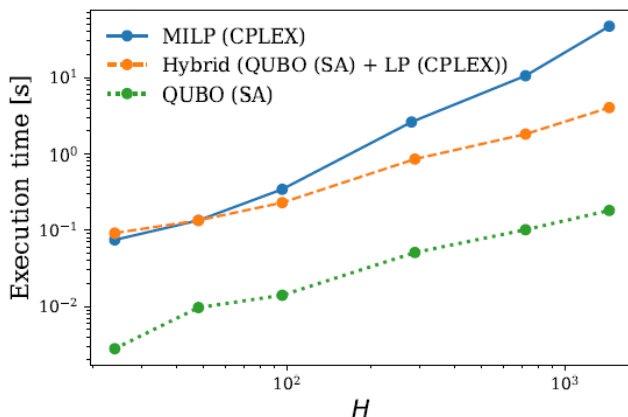


図 1 各ソルバの計算時間

Figure 1 The execution time of each solver.

(3) 機械学習の精度評価

数値実験のため、オープンソースの python パッケージ”lightgbm”および”optuna”を用いた。図 2 に機械学習モデルの出力の決定係数を示す。決定係数の定義は、次式のとおりである。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{h=1}^H (q - \hat{q})^2}{\sum_{h=1}^H (q - \bar{q})^2} \quad (式 23)$$

ここで、 q は前述のハイブリッドアルゴリズムにて計算した発電量である(機械学習モデルにて再現すべき量)、 \hat{q} は q の平均値、 \bar{q} は機械学習モデルの出力(推定値)である。

図 2 より、時間ステップ数 H が大きくなるほど決定係数

が大きくなる事が分かる。これは、時間ステップ数が大きいほど、教師データのサンプル数が多くなる事が原因と考えている。

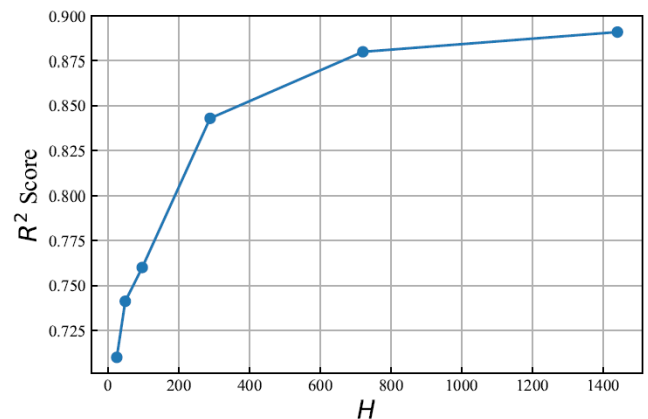


図 2 機械学習モデル出力の決定係数

Figure 2 Coefficient of determination.

(4) 運転計画手法全体での評価

表 3 に、我々の考案した運転計画手法の、従来の逐次発電量を決定する手法に対する、運転コストの比を示す。時間ステップ数 $H=24$ の場合は、我々の運転計画手法は従来法に対して優位性が無いが、H が大きくなるほど優位性が増すことが分かった。

表 3 運転コストの評価

Table 3 Evaluation of the operation cost.

H	24	288	1440
運転コスト比	1.011	0.980	0.978

4. おわりに

- FC-CHP 運転計画最適化のために、将来のエネルギー需要データを使用しない最適化方法を考案した。
- QUBO として定式化した最適化問題と LP として定式化した最適化問題を順次解くハイブリッドアルゴリズムを考案し、考案したハイブリッドアルゴリズムは、時間ステップ数 $H=1440$ の条件で MILP を解いた場合に対して約 10 倍高速であることを示した。
- 考案したハイブリッドアルゴリズムにより生成した教師データを用い、LightGBM 機械学習モデルをトレーニングする事により、過去の状態から将来の発電出力を推定する機械学習モデルを構築した。
- 我々の考案した FC-CHP 運転計画手法が、従来法より運転コストが小さい発電量の計画値を出力できる事を確認した。
- 我々の考案した FC-CHP 運転計画手法は、運転計画を策定する部分を機械学習モデルが受け持つ。これにより、

エネルギー需要の予測が不要になるだけでなく、計算負荷を大幅に小さくできることから、エネルギーシステムの制御のために高性能なコンピュータを設置する必要が無いというメリットも有する。このため、我々の考案した手法は、FC-CHP に限定されず、様々なエネルギーシステムの運転計画に適用できると考えている。

謝辞 エネルギー需要データの提供など、本研究にご協力頂いた皆様に、謹んで感謝の意を表する。

参考文献

- [1] K. Ito, R. Yokoyama, R. Akagi, T. Yamaguchi, and Y. Matsumoto, "Optimal Operational Planning of a Gas Turbine Combined Heat and Power Plant Based on the Mixed-Integer Programming," IFAC Proceedings Volumes, vol. 21, no. 11, pp. 371–377, Sep. 1988.
- [2] A. Parisio and L. Glielmo, "A mixed integer linear formulation for microgrid economic scheduling," in 2011 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm), Oct. 2011, pp. 505–510.
- [3] S. Raffi-Tabrizi, J. Hadji-Minaglou, F. Scholzen, and F. Capitanescu, "Optimal Operation of Nearly Zero Energy Buildings using Mixed Integer Linear Programming," in 2019 International Conference on Smart Energy Systems and Technologies (SEST), Sep. 2019, pp. 1–6.
- [4] E. Gomez-Villalva and A. Ramos, "Optimal energy management of an industrial consumer in liberalized markets," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 2, pp. 716–723, May 2003, conference Name: IEEE Transactions on Power Systems.
- [5] T. Tsukada, T. Tamura, S. Kitagawa, and Y. Fukuyama, "Optimal operational planning for cogeneration system using particle swarm optimization," in Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium. SIS'03 (Cat. No.03EX706), Apr. 2003, pp. 138–143.
- [6] G. K. Purushothama and L. Jenkins, "Simulated Annealing with Local Search: A Hybrid Algorithm for Unit Commitment," IEEE Power Engineering Review, vol. 22, no. 11, pp. 60–60, Nov. 2002, conference Name: IEEE Power Engineering Review.
- [7] Y. Tanaka and M. Fukushima, "Optimal Operation of Residential Fuel Cell System with Rapidly Fluctuating Energy Demand," IEEE Transactions on Power and Energy, vol. 128, no. 12, pp. 1497–1504, 2008.
- [8] Y. Yamagishi, H. Sugihara, O. Saeki, and K. Tsuji, "An operational algorithm for residential cogeneration systems based on the monitored daily-basis energy demand," Electrical Engineering in Japan, vol. 170, no. 2, pp. 37–45, 2010.
- [9] M. Tasdighi, H. Ghasemi, and A. Rahimi-Kian, "Residential Microgrid Scheduling Based on Smart Meters Data and Temperature Dependent Thermal Load Modeling," IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 5, no. 1, pp. 349–357, Jan. 2014, conference Name: IEEE Transactions on Smart Grid.
- [10] M. W. Johnson, M. H. S. Amin, S. Gildert, T. Lanting, F. Hamze, N. Dickson, R. Harris, A. J. Berkley, J. Johansson, P. Bunyk, E. M. Chapple, C. Enderud, J. P. Hilton, K. Karimi, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, T. Oh, I. Perminov, C. Rich, M. C. Thom, E. Tolkacheva, C. J. S. Truncic, S. Uchaikin, J. Wang, B. Wilson, and G. Rose, "Quantum annealing with manufactured spins," Nature, vol. 473, no. 7346, pp. 194–198, May 2011, number: 7346.
- [11] P. I. Bunyk, E. M. Hoskinson, M. W. Johnson, E. Tolkacheva, F. Altomare, A. J. Berkley, R. Harris, J. P. Hilton, T. Lanting, A. J. Przybysz, and J. Whittaker, "Architectural considerations in the design of a superconducting quantum annealing processor," IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 24, no. 4, pp. 1–10, 2014.
- [12] M. Yamaoka, C. Yoshimura, M. Hayashi, T. Okuyama, H. Aoki, and H. Mizuno, "A 20k-spin Ising chip to solve combinatorial optimization problems with CMOS annealing," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 51, no. 1, pp. 303–309, 2016.
- [13] T. Inagaki, Y. Haribara, K. Igarashi, T. Sonobe, S. Tamate, T. Honjo, A. Marandi, P. L. McMahon, T. Umeki, K. Enbutsu, O. Tadanaga, H. Takenouchi, K. Aihara, K.-i. Kawarabayashi, K. Inoue, S. Utsunomiya, and H. Takesue, "A coherent Ising machine for 2000-node optimization problems," Science, vol. 354, no. 6312, pp. 603–606, Nov. 2016, publisher: American Association for the Advancement of Science Section: Report.
- [14] P. L. McMahon, A. Marandi, Y. Haribara, R. Hamerly, C. Langrock, S. Tamate, T. Inagaki, H. Takesue, S. Utsunomiya, K. Aihara, R. L. Byer, M. M. Fejer, H. Mabuchi, and Y. Yamamoto, "A fully programmable 100-spin coherent Ising machine with all-to-all connections," Science, vol. 354, no. 6312, pp. 614–617, Nov. 2016.
- [15] C. Yoshimura, M. Hayashi, T. Okuyama, and M. Yamaoka, "FPGA-based Annealing Processor for Ising Model," in 2016 Fourth International Symposium on Computing and Networking (CANDAR), Nov. 2016, pp. 436–442, ISSN: 2379-1896.
- [16] M. Maezawa, K. Imafuku, M. Hidaka, H. Koike, and S. Kawabata, "Design of quantum annealing machine for prime factoring," in 2017, 16th International Superconductive Electronics Conference (ISEC), 2017, pp. 1–3.
- [17] M. Maezawa, G. Fujii, M. Hidaka, K. Imafuku, K. Kikuchi, H. Koike, K. Makise, S. Nagasawa, H. Nakagawa, M. Ukibe, and S. Kawabata, "Toward Practical-Scale Quantum Annealing Machine for Prime Factoring," Journal of the Physical Society of Japan, vol. 88, no. 6, p. 061012, Apr. 2019, publisher: The Physical Society of Japan. JPSJ.88.061012.
- [18] A. Lucas, "Ising formulations of many NP problems," Frontiers in Physics, vol. 2, 2014, arXiv: 1302.5843.
- [19] F. Neukart, G. Compostella, C. Seidel, D. von Dollen, S. Yarkoni, and B. Parney, "Traffic Flow Optimization Using a Quantum Annealer," Frontiers in ICT, vol. 4, 2017, publisher: Frontiers.
- [20] D. Crawford, A. Levit, N. Ghadermarzy, J. S. Oberoi, and P. Ronagh, "Reinforcement learning using quantum Boltzmann machines," Quantum Information & Computation, vol. 18, no. 1–2, pp. 51–74, Feb. 2018.
- [21] F. Neukart, D. Von Dollen, C. Seidel, and G. Compostella, "Quantum-enhanced reinforcement learning for finite-episode games with discrete state spaces," arXiv:1708.09354, Sep. 2017.
- [22] A. Khoshaman, W. Vinci, B. Denis, E. Andriyash, H. Sadeghi, and M. H. Amin, "Quantum Variational Autoencoder," Quantum Science and Technology, vol. 4, no. 1, p. 014001, Sep. 2018, arXiv:1802.05779.
- [23] A. Perdomo-Ortiz, N. Dickson, M. Drew-Brook, G. Rose, and A. Aspuru-Guzik, "Finding low-energy conformations of lattice protein models by quantum annealing," Scientific Reports, vol. 2, no. 1, p. 571, Aug. 2012, number: 1 Publisher: Nature Publishing Group.
- [24] K. Kitai, J. Guo, S. Ju, S. Tanaka, K. Tsuda, J. Shiomi, and R. Tamura, "Designing metamaterials with quantum annealing and factorization machines," Physical Review Research, vol. 2, no. 1, p. 013319, Mar. 2020, publisher: American Physical Society.