

# ネットワークの局所的な構成と大域的な性質の関係の研究

小木曾 友哉<sup>1,a)</sup> 武藤 敦子<sup>1</sup> 森山 甲一<sup>1</sup> 犬塚 信博<sup>1</sup>

**概要：**数理モデルによって複雑ネットワークを生成し、スモールワールド性やスケールフリー性等の現実のネットワークの性質を分析する研究が盛んに行われている。一方で、各ノードの周囲の局所ネットワークは各ノードの構造的性質を決定する。局所ネットワークとネットワーク全体の性質の関係を探ることは興味深い。小木曾らは各ノードの持つ局所的なネットワークの構成を入力とし、この構成を満たすネットワークを生成する生成アルゴリズムを提案した。本研究ではこのアルゴリズムを用いることで、局所的構成が同じであっても異なる性質のネットワーク生成されることを示す。加えて局所的なネットワークの構成の変化と大域的な性質の関係性について明らかにする。

## 1. はじめに

ソーシャルネットワークを含む複雑ネットワークの分野が注目を集め、様々な方法で研究が行われてきた。近年では WS モデル [2] や BA モデル [3] などの数理モデルによってコンピュータ上で複雑ネットワークを生成し、現実のネットワークに現れる性質を分析することも盛んに行われており、これまでに多くのモデルが提案されている。これらは特定の性質を持つネットワークを生成するモデルであり、各ノードの周囲の関係性を表す局所的なネットワークの構成については考慮されていない。そのため、ネットワークの局所的な構成とネットワーク全体の性質の関係についての研究は行われていない。

ネットワークは各ノードの持つ局所的な関係が組み合わさってできている。そのため、各ノードが持つ局所的な構成は各ノードが持つ周囲との関係性を決定づけているが、同時に局所的な構成がグローバルネットワークになんらかの影響を与えている可能性が高いと考えられる。

小木曾らは各ノードの持つ局所的な構成を入力とし、この構成を満たすネットワークを生成する生成アルゴリズムを提案した [4]。本研究では小木曾らの提案アルゴリズムを用いて、局所的な構成がグローバルネットワークが持つ性質に影響を与えていると仮定した上で、各ノードの持つ局所的な構成が与えるグローバルネットワークへの影響をネットワークの大域的な特徴量の観点から分析する。そして分析結果から仮定の真偽を結論として述べていく。

## 2. エゴセントリックネットワーク

本章では各ノードの持つエゴセントリックネットワークについて説明する。ノードの集合を  $V$  とし、その中の各ノード  $v_i, v_j \in V$  の隣接関係をエッジ  $(v_i, v_j) \in V \times V$  で表した無効グラフ  $G = (V, E) (E \subseteq V \times V)$  を考える。このとき、1つのノード (エゴ) に注目してそれを中心としたローカルなネットワーク、つまり、エゴと隣接したノード群から誘導される部分グラフをエゴセントリックネットワークという。[6] エゴセントリックネットワークは、エゴとそのエゴと結ばれた他ノードのみで誘導される部分グラフを表すが、エゴを含む場合と含まない場合がある。本論文で用いられるエゴセントリックネットワークとは、エゴを取り除いた、つまり、エゴと隣接しているノード群のみで誘導される部分グラフのことを指すこととする。即ち、 $G$  に対する  $c \in V$  のエゴセントリックネットワークとは 3項組  $G_c = (c, V_c, E_c)$  であり、 $V_c = \{v \in V | (c, v) \in E\}$ 、 $E_c = \{(u, v) \in E | u \in V_c \wedge v \in V_c\}$  である。

## 3. ネットワークを決定する特徴量

ネットワークを特徴づける特徴量のうち、局所的なものとは大域的なものとの分類を定義し、局所的な特徴量と大域的な特徴量それぞれについて本論文内で使用するものを記述する。なお、ノード数  $N$ 、エッジ数  $M$  のネットワーク  $G$  をノード集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  と無向なエッジの集合  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  で  $G = (V, E)$  と定義づけることとする。

本論文では局所的な特徴量をノード集合  $V$  の各ノード

<sup>1</sup> 名古屋工業大学大学院工学研究科  
Nagoya Institute of Technology, Aichi 101-0062, Japan  
<sup>a)</sup> t.ogiso.636@nitech.jp

$v_i$  が隣接するノードのみで形成する局所的な構成のみで決定することができる値と定義づける。一方で、大域的な特徴量については、ノード集合  $V$  のすべての要素  $v$  が持つ値、あるいはネットワーク  $G$  が持つ一意な値であり、かつ各ノードが持つ隣接するノードのみで形成する局所的な構成のみでは決定することができない値と定義づける。本論文では唐門らが提案したネットワーク構造を用いた属性生成 [7] の方法を用いながら、いくつかの特徴量を独自に定義した。

#### ・局所的な特徴量

**クラスター係数の平均  $C$**  ネットワーク内に三角形の関係がいくつあるかを表す値の平均

$$C \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, C_i \equiv \frac{\text{number of Clusters with } v_i}{k_i(k_i-1)/2}$$

**局所エッジ数  $e_{local}$**  各ノードのエゴセントリックネットワークのもつエッジ数の合計  $G_c = (c, V_c, E_c), V_c = v \in V | (c, v) \in E, E_c = \{(u, v) \in E | u \in V_c \wedge v \in V_c\}$  とした時の

$$\sum_{c \in V} |E_c|$$

#### ・大域的な特徴量

**平均最短距離  $L$**  2 点のノード間の最短距離の平均:

$$L = \frac{N(N-1)}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} d(v_i, v_j)$$

**媒介中心性の平均  $bet$**  各ノードの橋渡し役となる度合の平均:

$$b_i \equiv \frac{\sum_{i_s=1; i_s \neq i}^N \sum_{i_t=1; i_t \neq i}^{i_s-1} \frac{g^{i_s, i_t}}{N_{i_s, i_t}}}{(N-1)(N-2)/2}$$

$$bet = \frac{\sum_i b_i}{N}$$

**密集度  $crowd$**  媒介中心性  $b_i, b_j$  を持つネットワーク上の二つのノード  $v_i, v_j$  がどれだけの近いに距離  $d(v_i, v_j)$  にあるかを測る指標。中心性が高いノードが近い距離にあるほど、密集度  $crowd$  の値は高くなる。

$$\sum_{i,j} \{(b_i \times b_j) \div d(v_i, v_j)\} \quad (1)$$

**距離 2 の範囲  $dis2$**  最も次数中心性が低いノード群から距離 2 にあるノードの数の平均

$$\frac{\sum_{i \in \{i | \min_i k_i, v_i \in V\}} | \{j | d(v_i, v_j) = 2\} |}{|V_i| \{i | \min_i k_i, v_i \in V\}} \quad (2)$$

## 4. 局所的な構成から導くネットワーク生成アルゴリズム

小木曾らは局所的な構成からネットワークを生成するアルゴリズムを提案した。特定の性質を与えたグローバルネットワークを生成するものとは異なり、各ノードの持つ局所的な構成に注目した生成するものである。そこで小木曾らのアルゴリズムでは、各ノードのエゴセントリックネットワークの構成 (以降エゴパターンとする。) を用いて、各ノードのエゴセントリックネットワークの集合がエゴパターンのみを満たすネットワークを生成する。おおまかなアルゴリズムを図 1 にまとめる。

### アルゴリズム

**input** パターン:  $p_1, p_2, \dots, p_{nnord}, p_i = (V_i, E_i)$

**output**  $G_f$ : 生成したネットワーク

(1) ノード数  $nnord$  のランダムグラフ  $G_f = \{V_f, E_f\}$  を生成する。

エッジ数は  $|E_f| = \sum_i^{nnord} E_i$  である。

(2) 割り当て基準に従って各ノードに近づけるエゴパターンを割り当てる。即ち、全単射  $match$  を求める。

$$match : V_f \rightarrow \{1, 2, \dots, nnord\} \quad (3)$$

(3) エッジの 1 つを移動基準に従って修正する。

(4) ステップ 3 を繰り返し、ステップ 2 の時各ノードのエゴセントリックネットワークが割り当てられたエゴパターンとすべて一致しているか、繰り返し上限回数に達したとき、生成したネットワーク  $G_f$  を出力する。

図 1 提案アルゴリズム

このアルゴリズムではネットワークおよび各ノードのエゴセントリックネットワークをエッジの移動により変化させて、そのノードが一致すべきエゴパターンに近づけていく。そのために、独自にエッジの移動基準と一致させるエゴパターンを割り当てる割り当て基準を設定している。エゴパターンを割り当てるときになるべく構造的に近しいものを割り当てるために、割り当て基準では二つのグラフの類似度を表す評価値を採用している。

次節では小木曾らのアルゴリズムで設定されている割り当て基準と移動基準、ネットワークの類似度の評価値の定義について述べる。

### 4.1 アルゴリズム内の定義

#### 4.1.1 割り当て基準

エゴパターンの割り当てには、評価値を用いる。まず、各ノードのエゴセントリックネットワークとすべてのエゴパターンの評価値を計算し、各ノードごとに評価値の高い順にエゴパターンを割り当てる優先順位をつける。優先順位の高いものから順に各ノードとエゴパターンの割り当てを考える。エゴパターン  $p_i$  の割り当てが同じ優先順位であるノードが複数あり競合を起こした時、競合したノード間で  $p_i$  との評価値が高いものから優先して割り当てられる。  $p_i$  と割り当てられなかったノードは次に優先順位の高いエゴパターンとの割り当てを考える。

#### 4.1.2 移動基準

小木曾らのアルゴリズムはエッジの削除と追加を 1 つずつ行うことでエッジの移動を行う。エッジの移動基準では  $G_f$  のノードのエゴセントリックネットワーク  $q_i$  とそのノードに割り当てられているエゴパターン  $p_j$  のノード数の差を用いる。

まず、エッジを 1 つ削除する。  $q_i$  のノード数と割り当て

られたエゴパターン  $p_j$  のノード数を比べ、その差が最も多いノードを一つ選択する。選択したノードとエッジが結ばれているノードの中から同様に、エゴパターンとのノード数の差が最も多いノードを選択する。選択した2つのノード間のエッジを1つ削除する。

次に、エッジを1つ追加する。エッジの削除と同様に、 $q_i$  のノード数と割り当てられたエゴパターン  $p_j$  のノード数を比べ、その差が最も少ないノードを選択する。選択したノードとエッジが結ばれていないノードの中から、エゴパターンとのノード数の差が最も少ないノードを選択し、選択した2つのノードの間にエッジを追加する。ただし、2つ目のノードを選択するとき、直前に削除したエッジと追加するエッジが一致するようなノードは除外する。

#### 4.1.3 ネットワークの類似度の評価値

ノード  $v_i$  のエゴセントリックネットワークがエゴパターン  $p_j$  とどれほど構造的に似ているかを示す評価値  $eval$  を定義する。評価値  $eval$  は、グラフ  $P = (V_p, E_p)$  に対するグラフ  $Q = (V_q, E_q)$  の類似度を式4で計算する。

$$eval = 1 - (v \times \delta_1 + e \times \delta_2 + d \times \delta_3) \quad (4)$$

$$v = \frac{|V_p - V_q|}{|V_p| + 1}$$

$$e = \frac{|E_p - E_q|}{|E_p| + 1}$$

$$m : S \subseteq V_p \rightarrow T \subseteq V_q$$

$$dc = \min_{S \subseteq V_p, T \subseteq V_q, |S|=|T|, m} |\{(m(x), m(y)) \in E_q | (x, y) \in E_p\}|$$

$$d = \frac{dc}{|E_p| + 1}$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$$

## 5. 局所的な構成が与えるネットワーク決定への影響

### 5.1 ネットワークの局所的な構成が同一なグローバルネットワークの特徴量

ネットワークが各ノードの持つ局所的な構成のみで一意に決定されると仮定するとき、同一の局所的な構成を持つグローバルネットワークの特徴量も同様に一意に決定されるはずである。ネットワークを構成するエゴパターンがネットワークの特徴量に与える影響を分析するために、小木曾らの提案手法を用いて調査を行った。

各ノードのエゴセントリックネットワークの与えるネットワークの特徴量への影響を分析するために、生成されるネットワークの持つ各ノードのエゴセントリックネットワークを同一なものに固定した。この固定したネットワークの局所的な構成をエゴパターン  $conf$  とする。

各ノードのエゴセントリックネットワークがエゴパターン  $conf$  のみを満たすネットワーク  $g_{conf_i}$  を100個生成した。

生成したネットワーク群  $G = \{g_{conf_1}, g_{conf_2}, \dots, g_{conf_{100}}\}$  の各ネットワークが持つ特徴量が複数種類存在するかを調査する。今回の調査では、代表的な特徴量として、平均最短距離  $L$  と媒介中心性の平均  $bet$  を用いる。

エゴパターン  $conf$  から生成したネットワーク群  $G$  から生成された特徴量群  $S_{conf} = (L_{conf}, bet_{conf})$  と局所的な構成を固定していないネットワークの特徴量の分布との比較を行うためにランダムネットワーク  $G_{ram} = (V_{ram}, E_{ram}), |V_{ram}| = 15, |E_{ram}| = 20$  を100個生成し、 $G_{ram}$  から生成される特徴量群  $S_{ram} = (L_{ram}, B_{ram})$  の分布を重ねたものを、図2に示す。

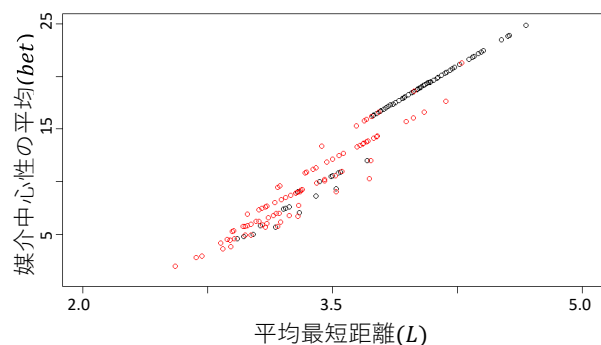


図2 赤:ランダムネットワーク  
黒:局所的な構成が固定されたネットワーク  
 $|V| = 15, |E| = 15$

この結果から、入力として与えるエゴパターンを一つに固定してネットワークを複数生成したとき、複数種類のネットワークが生成されることが明示された。すなわち、ネットワークの持つ各ノードの局所的な構成はネットワークを一意に決定しないことが示される。

また、ランダムネットワークの分布との比較を行った結果、エゴパターンを固定され生成されたネットワークは特徴量の分布がエゴパターンが固定されていないネットワークの特徴量と比べて値域が小さくなる。しかし、ランダムネットワークから生成された特徴量のうち  $L = (3, 4), bet = (15, 25)$  の範囲を取るものが少ないにも関わらず、固定されたエゴパターン  $conf$  より生成されたネットワーク群の特徴量はそのほとんどが  $L = (3, 4), bet = (15, 25)$  の範囲に密集していた。以上の結果から、エゴパターンが同一なネットワークは、エゴパターンが固定されていないネットワークと比べて自由度を損なうが複数種類存在するものがあることが確認された。

### 5.2 ネットワークの密度変化に注目したネットワーク生成

本節ではネットワークの密度変化によるエゴパターン  $conf$  を固定した時に与えるネットワーク決定への影響について比較を行う。生成するネットワークのノード数を

10に固定し、エッジ数  $M$  を  $1 \leq M \leq 18$  の間で各密度のネットワークに対してエゴパターン  $conf_{mj}$  を 30 種類与える。固定されたエゴパターンごとにネットワークを 100 個生成し、生成されたネットワークの種類数について分析を行った。

結果を図 3 に示す。固定された入力のエゴパターン  $conf_{ij}$  によって生成されるネットワークの種類はネットワークの密度が 0.2 ~ 0.5 の範囲で多くなっており、エッジ数 14 の時の 74 種類が最多であった。また各エッジ数ごとの生成されたネットワークの種類数は山なりになっている。ここでランダムネットワークを各ノード数エッジ数で 3000 個生成した時にそれぞれの密度で現れたネットワークの種類数についての分布を見た時、図 4 に示すように、ネットワークの種類数が最大となる密度に違いが現れた。これは、密度が大きくなることで、固定された局所的な構成から生成されるネットワークの種類数が少なくなってしまうからだと考えられる。図 3 の結果から、ネットワークの密度変化はエゴパターンを固定したときのグローバルネットワークの決定に影響を与えることが明示されたが、それと同時にネットワークの密度が同じエゴパターン同士であっても生成されるネットワークの種類数は多様な分布を取っている。この結果より、生成されるネットワークの密度が同一のエゴパターンであっても、ネットワーク決定に与える影響に違いが大きく生じることが示される。

6 章にて、局所的な構成と大域的な性質の関係について分析をする実験を行う。6.1 節では、局所的な構成ごとに生成されたネットワークの大域的特徴量の違いに注目し、6.2 節では、局所的な構成により決定される局所的な特徴量と大域的な特徴量に関係性に注目した実験となっている。

## 6. 実験

### 6.1 局所的な構成が与える大域的な性質の影響

5.2 節より、生成されるネットワークの密度が同一なエゴパターン同士であっても生成されるネットワークの種類に違いがあることが示された。

では、生成されるネットワークのノード数エッジ数が同一であってもエゴパターンによって性質の全く異なるネットワーク群が生成されるのだろうか。エゴパターンによって生成されるネットワークの性質が異なるのであれば、ネットワークに属する各要素の持つ局所的なネットワークの構成がネットワークの持つ性質に大きな影響を与えていることが示される。

#### 6.1.1 実験手順

生成されるネットワークのノード数を 10 で固定する。エッジ数を 5.2 節にて、固定されたエゴパターンから多くの種類のネットワークを生成することが出来た密度帯となる 8 ~ 18 まで変化させることでネットワークの密度を変化させていく。変化するエッジ数ごとにエゴパターンを 31

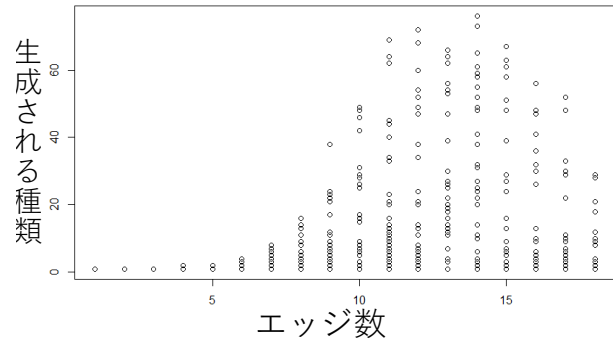


図 3 各エゴパターンのネットワーク生成種類数

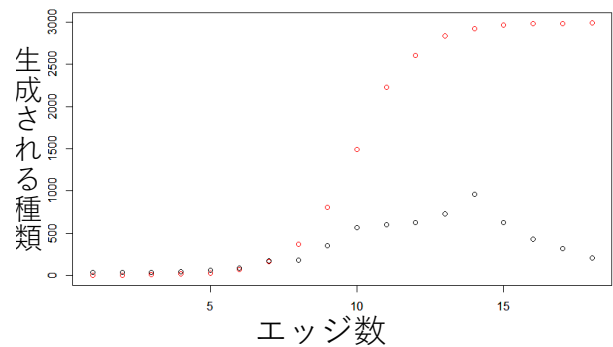


図 4 ランダムネットとのネットワーク生成種類数との比較  
赤：ランダムネットワークを 3000 回生成  
黒：エゴパターン 30 個ごとにネットワーク 100 個を生成した時の総和

個生成し、各エゴパターンで 100 個のネットワークを生成する。即ち、各エッジ数で合計 3100 個のネットワークが生成される。

エゴパターン  $P$  から生成されるネットワーク群  $G$  から注目する大域的な特徴量群  $S$  を抽出する。ノード数エッジ数が同一であり、エゴパターンが異なるネットワーク群  $G_1, G_2, \dots, G_{31}$  から抽出された大域的な特徴量群  $S_1, S_2, \dots, S_{31}$  の分布を比較し、ネットワークのノード数エッジ数が同一であり、かつ各ノードの持つ局所的なネットワークの構成が異なるネットワークの持つ性能の違いを分析する。

#### 6.1.2 実験結果

実験結果を図 5 から図 10 に示す。図 5 の各縦軸に用いられた記号は 3 章で述べた特徴量の記号と対応している。以降の図についても同様である。生成されるネットワークのノード数エッジ数が同一なエゴパターン  $conf_i$  によって生成されたネットワーク群  $G_i$  から抽出される大域的な特徴量群  $S_i$  は、本実験で扱ったどの特徴量においても、エゴセントリックネットワークの構成ごとで異なる分布をしていることを確認することが出来た。しかし、一部を除いて抽出された特徴量群  $S_i$  が他のエゴパターン  $conf_j$  より導き出される特徴量群  $S_j$  と排他的な集合となっているも

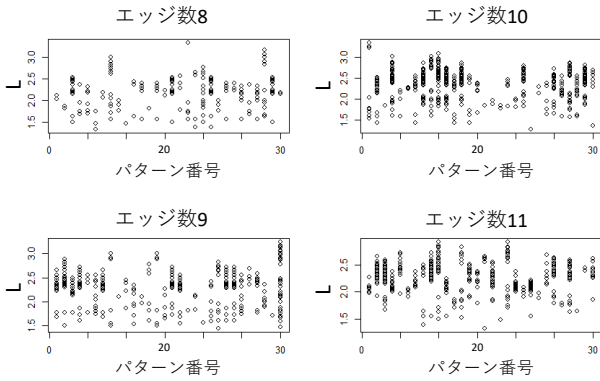


図 5 L1

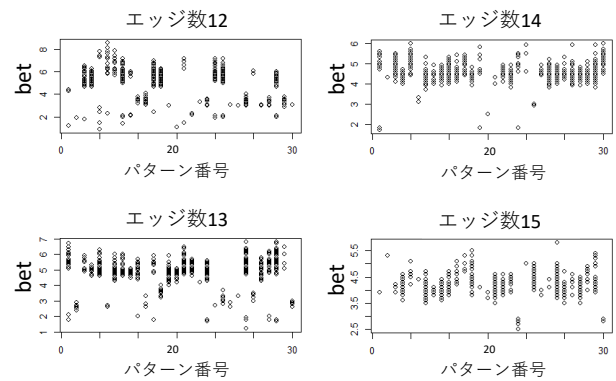


図 9 bet2

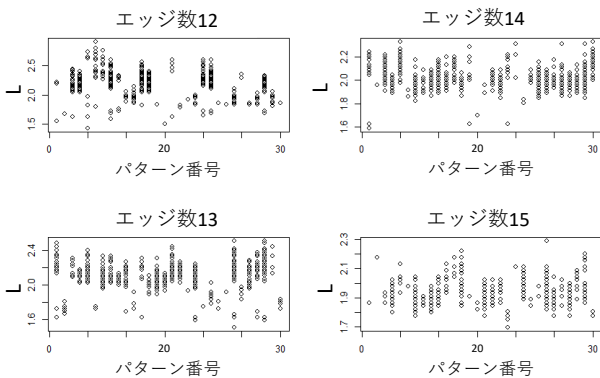


図 6 L2

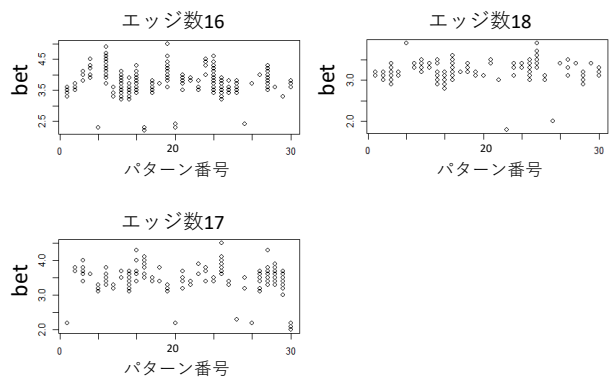


図 10 bet3

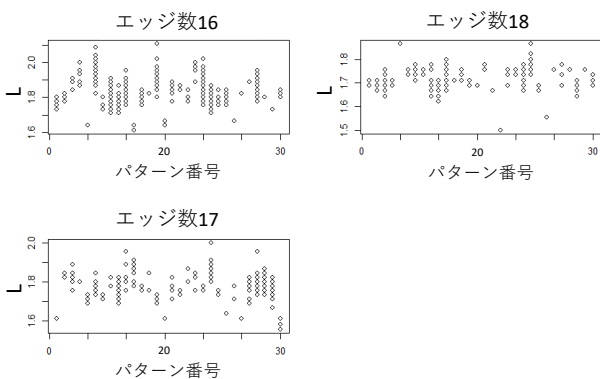


図 7 L3

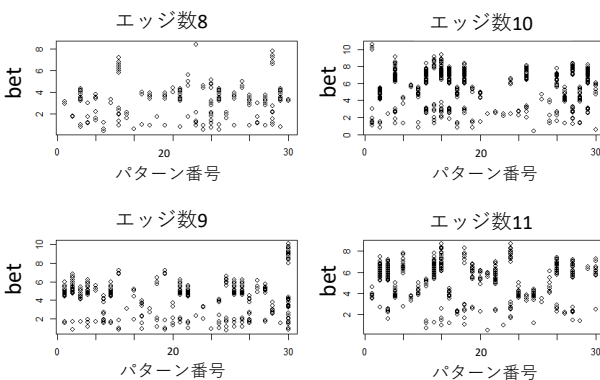


図 8 bet1

ターンの異なるネットワーク群の持つ大域的な特徴量は共通範囲を持つものが多く、排他的なものは少ないことが確認された。

## 6.2 局所的な構成の性質が持つ大域的な性質の決定性

ネットワークの持つ局所的な構成の性質によってグローバルネットワークが持つ性質が決定されるのかを局所的な特徴量  $Sl$  と大域的な特徴量  $Sg$  の関係によって分析する。

### 6.2.1 実験手順

生成されるネットワークのノード数エッジ数が同一となるエゴパターン群  $Conf(|Conf| = 30)$  を用意する。各エゴパターン  $conf_i$  の持つ局所的な特徴量  $sl_i$  を抽出し、局所的な特徴量群  $Sl(|Sl| = 30)$  を生成する。小木曾らの生成アルゴリズムを用いて各エゴパターン  $conf_i$  から局所的な構成が同一のネットワーク群  $G_i(|G_i| = 100)$  を生成する。ネットワーク群  $G_i$  からネットワークの大域的特徴量群  $Sg_i(|Sg_i| = 100)$  を抽出する。

局所的な特徴量群  $Sl$  と大域的な特徴量群  $Sg$  の関係性を分析し、ネットワークの持つ局所的な構成の性質がグローバルネットワークの性質に対して決定性を持っているのかを調査する。なお、現実に現れるネットワークに近いものを分析対象とするために、現実のネットワークの持つ密度に近いノード数10エッジ数15のネットワークを分析対象とし、分析対象の特徴量は3章で述べたものとする。

のは少なく、特徴量群  $S_i$  と  $S_j$  間で共通した要素となる特徴量を持っていることが多かった。この結果から、エゴパ

### 6.2.2 実験結果

実験結果を図 11 から図 14 に示す。各局所的な特徴量の値に対して、大域的な特徴量は多様な分布も持っており、各局所的な特徴量に対する大域的な特徴量の分布は排他的なものではなかった。この結果から、ネットワークの局所的な構成の持つ性質は、グローバルネットワークの持つ性質を一意に決定するものではなく、自由度があることが示された。

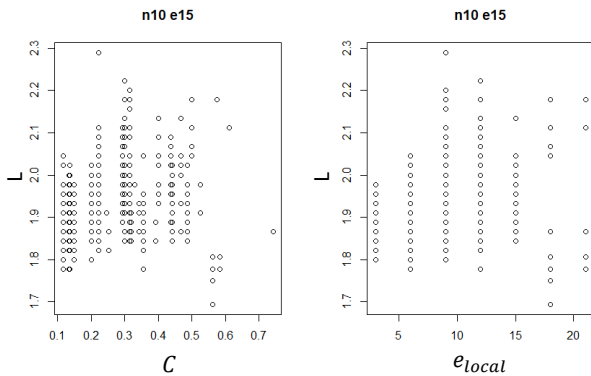


図 11 平均最短距離  $L$

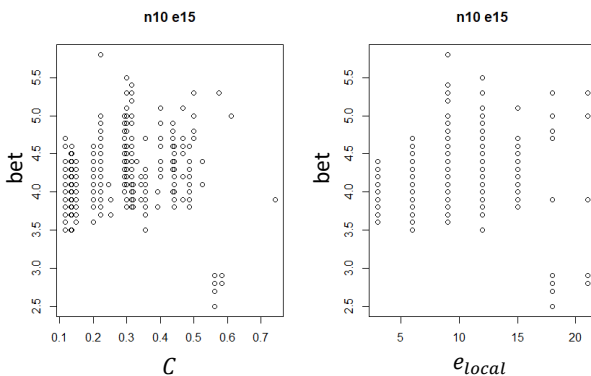


図 12 媒介中心性の平均  $b$

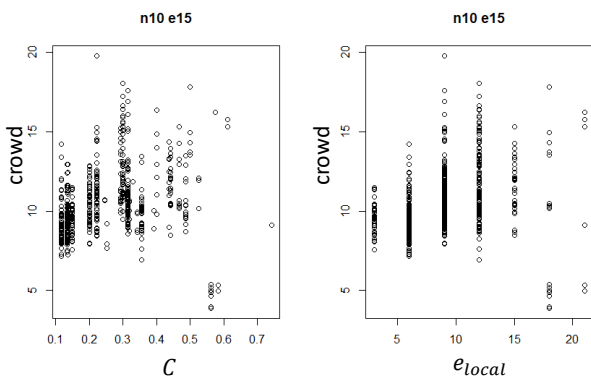


図 13 密集度  $crowd$

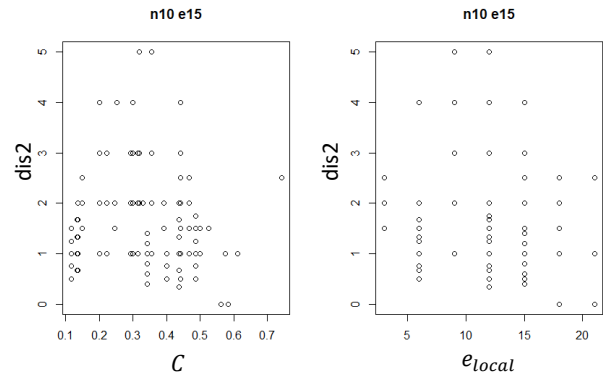


図 14 距離 2 の範囲  $dis2$

構成とグローバルネットワークの持つ性質の関係について、局所的な特徴量と大域的な特徴量の 2 つを定義し、調査や実験を通して分析した。その結果、局所的な構成が決まっても、ネットワークの大域的な性質は一意に決定されず、自由度があることが示された。また、局所的な構成ごとで、取りうる特徴量の範囲はバラバラであり、幅広い値を取るものもあれば、ネットワークの大域的な特徴量がほとんど決定されるものも見られた。

しかし、グローバルネットワークの持つ性質に違いが現れる条件を特定することが出来なかった。また、局所的な構成がネットワークの大域的な特徴量に決定性を持たないことを本研究で示すことはできたが、局所的な構成がグローバルネットワークに対して決定性を持つものがあるのかを明かすことが未だできていないため、更なる調査をする必要がある。

### 参考文献

- [1] Milgram, S. “The small world program”. *Society*, 39, 61-66
- [2] D.J.Watts and S.H.Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”. *Nature*, 393, 440-442, 1998
- [3] Albert-Laszlo Barabasi and Reka Albert, “Emergence of Scaling in Random Networks”. *SCIENCE*, 286, 509-512, 1999
- [4] 小木曾友哉, 武藤敦子, 森山甲一, 松井藤五郎, 犬塚信博, “与えられたエゴセントリックネットワークの構成によるネットワーク生成”. *winf* 2019
- [5] 増田直紀, 中村真由子 “複雑ネットワーク概説-生態学への応用を見据えて”. *日本生体学会誌*, 56, 219-229, 2006
- [6] 竹内晨, 松島裕, 犬塚信博, “エゴセントリックネットワークのパターンマッチング”. *情報処理学会第 73 回全国大会*, 6M-3
- [7] 唐門準, 松尾豊, 石塚満, “リンクに基づく分類のためのネットワーク構造を用いた属性生成”. *情報処理学会論文誌 Vol49 No.6* 2212-2223

## 7. まとめと今後の課題

本研究では、小木曾らの生成アルゴリズムを用いてネットワークに属する各ノードの持つ局所的なネットワークの