従属関係についての再考

田中 譲

（北海道大学・工学部）

1. はじめに

データベースの正規化理論、およびこれに基づく論理設計論に対し、これらが実際のデータベース設計にそぐわないとの現場からの批判が強まっている。一方において、データベースの巨大化に伴って、CADシステムの必要性は一層高まり、論理設計アルゴリズムの確立がますます重要になってきている。CADシステムのヒューマン・インタフェースには図式化されたデータベースモデルが適しているが、データベースにおける属性間の論理的な関連を同じに保ったまま、効率等に関する最適設計を行うためには、論理スキーマの等価変換等が定義され得るような公理論的理論に基づく論理設計論を確立することが望ましい。そのような論理設計論を確立することが、データベースの正規化理論の本来の目的であった。

理論と実際の間のギャップは何に起因するのであろうか。この問に答えるには正規化理論の歩みを振り返って見る必要がある。本来、正規化理論は、与えられた関係に対する更新の手数を減らすため、この関係を分解し、更新の局所性を高めることを目的として提案された。その後、ある時期より、正規化理論をデータベースに適用することが始められ、論理設計論が研究され始めた。関係に対して定義されていた正規化理論がデータベースに適用され始めたのである。その背景には、データベースを1つの関係と見做すという、実際的観点からはとうてい認めることのできない仮定がなされている。

本稿では、関係の定義を拡張し、一部の属性の値が与えられていないタプルをも許し、半関係と名付け、データベースが1つの関係と見做し得ると仮定するかわりに、1つの半関係と見做し得ると仮定する。この仮定は、本質的には対象データベースに何等の制限条件をも課すことにはならない。正規化理論は半関係に対して構築し直す。そのために、従属関係を半関係に即した定義に拡張する。本稿ではこれを自然従属関係と名付けた。

本稿の後半では、こうして構築される半関係の正規化理論に基づき、データベースの論理設計論を展開し、ビューと更新の問題についても触れ、正しく設計されたスキーマ上で正しく定義されたビューに対しては、ビュー更新問題と呼ばれる問題が生じ得ないことを示す。

2. 正規化理論の問題点

正規化理論に基づくスキーマ設計論では、データベースが1つの関係として表現され得ることを仮定する。これを"汎関係存在の仮定"と呼んでいる。この仮定が種々の問題を引き起こすことを例を用いて示す。

関数従属関係 $B \to C$ が成立すると指定された汎関係 $R(A, B, C)$ が図1（a）のような関係であるとする。独立成分法にしろ、分解法にしろ、この場合のスキーマは

$$\{(AB\ ;\ \phi)\ ,\ (BC\ ;\ \{B \to C\})\}$$

となり、Rは図1（b）に示すように、R_1 と R_2 に分解される。問題は、このスキーマに対して更新を行う際に生じる。

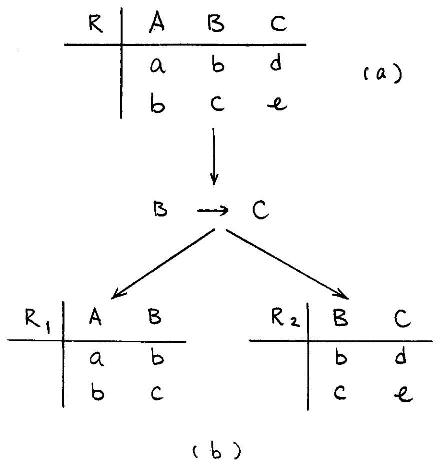
例として2つの更新要求を考える。

（1） B＝'c' で C＝'e' なる情報の削除。

（2） Bの値 'c' の消去。

データベースに対する更新を，スキーマを構成する成分関係の1つに対する更新へと局所化することを目的とする独立成分法の主旨からすれば，(1)の更新の結果は図1 (c)のようになり，(2)の結果は(f)のようになる。

(1)のような更新では，実行結果(c)に対応する{A, B, C}上の関係はもはや存在しない。A, B, Cを列とする表の形に表現すると図1 (d)のようになり，一部のタプルの一部の属性の値が与えられていないような拡張された関係としてしか表現できない。このような項目は，値"⊥"が与えられているものと見做して，以下では(d)を(e)のように表現する。この更新例では，もともと汎関係の存在を満足していたデータベースでも，極めて単純な更新によってさえも，汎関係を持たなくなり得ることが示されている。



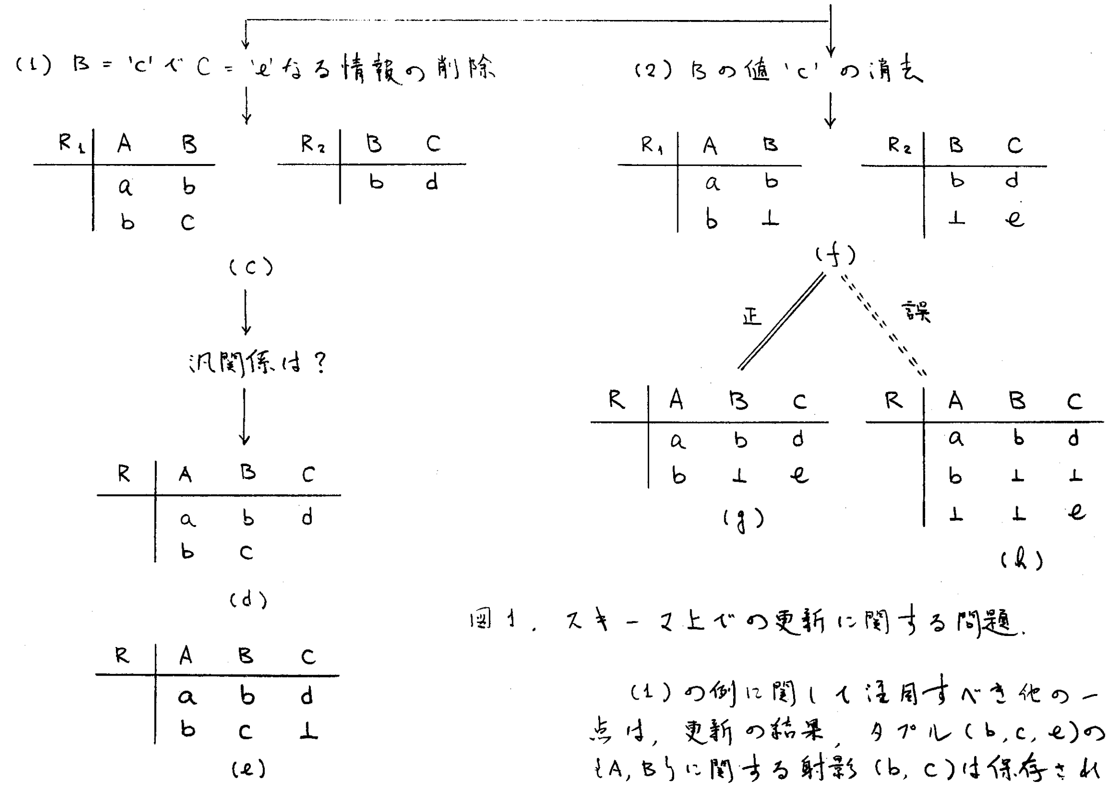


図1. スキーマ上での更新に関する問題.

(1)の例に関して注目すべき他の一点は，更新の結果，タプル(b, c, e)の{A, B}に関する射影(b, c)は保存されているが，{A, C}に関する射影(b, e)は消失している点である。関数従属関係B→Cを考慮して設計されたスキーマ上での(1)の更新の結果が(c)であるとする背景には，

"Bの値が定義されることなくCの値が定義されることはない"

という暗黙の了解が，B→Cの定義に

付加され，含意されているように思われる。

(2)の更新例では，更新結果は(f)のようになり，これではデータベースが(g)となるのか(h)となるのかがわからない。(a)に直接(2)の更新を行った結果は(g)となるので，(h)は正しくない。スキーマ上で(2)のような更新を行うと，正しい更新と正しくない更新の区別ができなくなる。これは，(f)のR_2が，キー部の値が不定となるようなタプルを含む関係を許してはいけないという，Coddが関係（厳密に言えば後に定義する半関係）に対して課した基本条件に抵触していることに起因する。

(1)の更新例は，汎関係に未定義値が含まれても良いとすべきであることを示唆しており，(1)について注目すべき第2点と(2)の更新例は，未定義値の現われ方と，データベースの分解に用いる従属関係とは，独立に取り扱うべき性格のものではないことを示唆していると見るべきであろう。

一方，比較的現場に受け入れられているE-Rモデル等では，属性にロールとプロパティの区別があり，ロールのみからなるような属性集合Xに対してのみ$X \to Y$や$X \twoheadrightarrow Y$といった従属関係が考えられる。このような従属関係では，Yがプロパティのみの場合には，

"あるタプルにおいて，$A \in Y$が存在して，このタプルのA属性の値が未定義でなければ，このタプルのX部に未定義値が現われることはない"

という条件が成立している。Yにロールが含まれる場合には，エンティティの間の存在従属関係を考慮し，この場合にも上述の条件が成立するようにしようとするのが最近のE-Rモデルの研究の動きである。

本稿でも，半関係に即した従属関係を定義するのに，上述の条件を従来の定義に付加して考えることにする。このような拡張を行うため，次章では半関係を定義する。

3．半関係

Dを対象世界の可能な値の集合，Ωを属性集合と呼ばれる有限集合とする。集合X，Yに対して，$(X \to Y)$でXからYへのすべての全関数の集合を表し，$P(X \to Y)$でXからYへのすべての半関数の集合を表す。$\mu \in (\Omega \to D)$を(Ω, D)上のタプルと呼び，$\mu \in P(\Omega \to D)$を(Ω, D)上の半タプルと呼ぶ。$\perp \notin D$とし，$\underline{D} = D \cup \{\perp\}$とする。$\mu \in P(\Omega \to D)$に対し，$(\Omega, \underline{D})$上のタプル$\underline{\mu} \in (\Omega \to \underline{D})$を

$$\begin{aligned}\underline{\mu} = \lambda x.\ (&x \notin \Omega \to \text{undefined},\\ &\mu(x) \neq \text{undefined} \to \mu(x),\\ &T \to \perp)\end{aligned}$$

と定義する。$R \subset (\Omega \to D)$なるRを(Ω, D)上の関係と呼び，$r \subset P(\Omega \to D)$なる$r$を$(\Omega, D)$上の半関係と呼ぶ。$r \subset P(\Omega \to D)$に対して，$\underline{r} \subset (\Omega \to \underline{D})$を

$$\underline{r} = \{\underline{\mu} \mid \mu \in r\}$$

と定義する。(Ω, D)上の関係Rに対し，

$$\omega(R) = \Omega$$

と定義し，半関係rに対しては，

$$\omega(r) = \omega(\underline{r})$$

と定義する。

$\mu \in (\Omega \to \underline{D})$と$X \subset \Omega$に対し，

$$\begin{aligned}\mu|_X = \lambda x.\ (&x \in X \to \mu(x),\\ &T \to \text{undefined})\end{aligned}$$

と定義し，$r \subset P(\Omega \to D)$に対して，

$$\begin{aligned}[X]\underline{r} = (&X \not\subset \Omega \to \phi,\\ &T \to \{\mu|_X \mid \mu \in \underline{r}\})\end{aligned}$$

と定義する。

半関係 r, s に対して，r から s への結合 $\underline{r} \triangleright \underline{s}$ を

$$\underline{r} \triangleright \underline{s} = \{ \mu \mid \mu \in (\omega(r) \cup \omega(s) \to \underline{D})$$
$$\wedge (\mu|_{\omega(r)} \in r) \wedge (\mu|_{\omega(s)} \in s)$$
$$\wedge \ {}^{\forall}A \in \omega(s) - \omega(r) \ {}^{\forall}B \in \omega(s) \cap \omega(r)$$
$$(\mu(A) \neq \bot \supset \mu(B) \neq \bot) \}$$

と定義し，関係 R, S の自然結合は，$R * S$ で表わすことにする。

補題 3.1.

$$[\omega(S)](\underline{r} \triangleright \underline{S}) \subset \underline{S}$$

（証明）

$\underline{r} \triangleright \underline{S}$ の定義より明らかである。

$\mathbb{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ を $A_i \in \Omega$ なる属性ベクトルとし，$\mathbb{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を $v_i \in \underline{D}$ なる値ベクトルとする。Ω 上の半関係 r に対して，

$$[\mathbb{A} = \mathbb{V}]\underline{r} = \{ \mu \mid \mu \in \underline{r} \wedge {}^{\forall}i \ \mu(A_i) = v_i \}$$

と定義する。ベクトル $\mathbb{V} = (V_1, V_2, \cdots, V_n)$, $\mathbb{V}' = (V_1', V_2', \cdots, V_m')$ に対し，$\mathbb{V} \cdot \mathbb{V}' = (V_1, V_2, \cdots, V_n, V_1', V_2', \cdots, V_m')$ と定義する。$\underline{r}$, $\underline{S}$ は関係と見做すことにより，次の補題が成立することは明らかである。

補題 3.2

$\mathbb{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, $\mathbb{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_m)$ を $A_i \in \omega(r)$, $B_i \in \omega(S)$ なる属性ベクトルとし，$\mathbb{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, $\mathbb{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ を $v_i \in \underline{D}$, $w_i \in \underline{D}$ なる値ベクトルとする。これらに対し，

$$[\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{V} \cdot \mathbb{W}](\underline{r} \triangleright \underline{S})$$
$$= ([\mathbb{A} = \mathbb{V}]\underline{r}) \triangleright ([\mathbb{B} = \mathbb{W}]\underline{S})$$

が成立する。

（証明）

明らかである。

4. 自然従属関係

半関係に対して，関係に対する関数従属関係（FD）$X \to Y$ に相当する従属関係 $X \Rightarrow Y$ と，多値従属関係（MVD）$X \twoheadrightarrow Y$ に相当する従属関係 $X \ggg Y$ とを以下のように定義し，各々，自然関数従属関係（nFD），自然多値従属関係（nMVD）と呼ぶ。

定義 4.1.

半関係 r, $X, Y \subset \omega(r)$ に対して，X から Y への存在従属関係 $X \xrightarrow{e} Y$ を，

$$\underline{r} \ \mathit{sat} \ X \xrightarrow{e} Y$$
$$\text{iff} \quad {}^{\forall}B \in Y, {}^{\exists}A \in X, {}^{\forall}\mu \in \underline{r}$$
$$\mu(A) \neq \bot \supset \mu(B) \neq \bot$$

と定義する。

定義 4.2.

半関係 r と X, $Y \subset \omega(r)$ に対して，

$$r \ \mathit{sat} \ X \Rightarrow Y$$
$$\text{iff} \quad (\underline{r} \ \mathit{sat} \ X \to Y)$$
$$\wedge ({}^{\forall}A \in Y \quad \underline{r} \ \mathit{sat} \ A \xrightarrow{e} X)$$

と定義する。

定義 4.3

半関係 r と X, $Y \subset \omega(r)$ に対して，

$$r \ \mathit{sat} \ X \ggg Y$$
$$\text{iff} \quad (\underline{r} \ \mathit{sat} \ X \twoheadrightarrow Y)$$
$$\wedge ({}^{\forall}A \in Y \quad \underline{r} \ \mathit{sat} \ A \xrightarrow{e} X)$$

と定義する。

(Ω, D) 上の関係 R に対して，

$$R \ \mathit{sat} \ X \twoheadrightarrow Y$$
$$\text{iff} \quad R = [XY]R * [X(\Omega - Y)]R$$

となるように，自然従属関係について

が次の定理が成立する。

定理4.1.（分解定理）
(Ω, D)上の半関係 r と $X, Y \subset \Omega$ に対して、

$$r \ \mathrm{sat}\ X \twoheadrightarrow Y$$

$$\mathrm{iff} \quad \underline{r} = [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} \triangleright [XY]\,\underline{r}$$

が成立する。

この定理を証明するために、次の補題を用いる。

補題4.2.
半関係 r, s に対して、

$$\underline{r} \triangleright \underline{s} = \underline{r} * \underline{s}$$

となる必要十分条件は、

$$\forall A \in \omega(s) - \omega(r) \quad \underline{r} * \underline{s}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} \omega(s) \cap \omega(r)$$

となることである。
（証明）
$\underline{r} \triangleright \underline{s}$ の定義より、

$$\forall A \in \omega(s) - \omega(r) \quad \underline{r} \triangleright \underline{s}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} \omega(s) \cap \omega(r)$$

がいえ、$\underline{r} \triangleright \underline{s} = \underline{r} * \underline{s}$ であれば

$$\forall A \in \omega(s) - \omega(r) \quad \underline{r} * \underline{s}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} \omega(s) \cap \omega(r)$$

がいえる。逆に

$$\forall A \in \omega(s) - \omega(r) \quad \underline{r} * \underline{s}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} \omega(s) \cap \omega(r)$$

であれば、

$$\begin{aligned}
\underline{r} * \underline{s} &= \{\mu \mid \mu \in (\omega(r) \cup \omega(s) \to D) \\
&\qquad \wedge (\mu|_{\omega(r)} \in r) \wedge (\mu|_{\omega(s)} \in s)\} \\
&= \{\mu \mid \mu \in (\omega(r) \cup \omega(s) \to D) \\
&\qquad \wedge (\mu|_{\omega(r)} \in r) \wedge (\mu|_{\omega(s)} \in s) \\
&\qquad \wedge \forall A \in \omega(s) - \omega(r)\ \forall B \in \omega(s) \cap \omega(r) \\
&\qquad\quad (\mu(A) \neq \bot \supset \mu(B) \neq \bot)\} \\
&= \underline{r} \triangleright \underline{s}
\end{aligned}$$

がいえる。（証明終り）

補題4.2を用いて定理4.1を証明する。

（定理4.1の証明）
r sat $X \twoheadrightarrow Y$ とする。定義より、

$$\underline{r}\ \mathrm{sat}\ X \twoheadrightarrow Y$$
$$\wedge (\forall A \in Y \quad \underline{r}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} X)$$

が成立する。$\underline{r}$ sat $X \twoheadrightarrow Y$ を用い、$\underline{r}$ を $(\omega(r), \underline{D})$ 上の関係と見做すことにより、

$$\underline{r} = [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} * [XY]\,\underline{r}$$

となる。$[X(\Omega - Y)]\,\underline{r} = \underline{t}$, $[XY]\,\underline{r} = \underline{s}$ と置くと、$\forall A \in Y$ $\underline{r}$ sat $A \xrightarrow{e} X$ より、

$$\forall A \in \omega(s) - \omega(t) \quad \underline{t} * \underline{s}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} \omega(t) \cap \omega(s)$$

がいえ、補題より、

$$\underline{r} = \underline{t} * \underline{s} = \underline{t} \triangleright \underline{s} = [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} \triangleright [XY]\,\underline{r}$$

がいえる。
逆に、$\underline{r} = [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} \triangleright [XY]\,\underline{r}$ とすると、結合演算 $\triangleright$ の定義より、

$$\forall A \in Y \quad \underline{r}\ \mathrm{sat}\ A \xrightarrow{e} X$$

がいえ、補題4.2より、

$$\begin{aligned}
\underline{r} &= [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} \triangleright [XY]\,\underline{r} \\
&= [X(\Omega - Y)]\,\underline{r} * [XY]\,\underline{r}
\end{aligned}$$

となり、$\underline{r}$ を $(\omega(r), \underline{D})$ 上の関係と見做すことにより、

$$\underline{r}\ \mathrm{sat}\ X \twoheadrightarrow Y$$

がいえる。$X \twoheadrightarrow Y$ の定義より、

$$r\ \mathrm{sat}\ X \twoheadrightarrow Y$$

となる。（証明終り）

FD、MVD は、よく知られているように、以下の FD1〜3、MVD0〜2、FD-MVD1〜2 の公理系を満足し、この

公理系の完全性は Beeri 等によって証明されている [BEER77]。

FD 1 (Reflexivity)
 if $Y \subseteq X$ then $X \rightarrow Y$.
FD 2. (Augmentation)
 if $Z \subseteq W$ and $X \rightarrow Y$ then $XW \rightarrow YZ$.
FD 3. (Transitivity)
 if $X \rightarrow Y$ and $Y \rightarrow Z$ then $X \rightarrow Z$.
MVD 0. (Complementation)
 if $X \twoheadrightarrow Y$ then $X \twoheadrightarrow \Omega - Y$.
MVD 1. (Augmentation)
 if $Z \subseteq W$ and $X \twoheadrightarrow Y$ then $XW \twoheadrightarrow YZ$.
MVD 2. (Transitivity)
 if $X \twoheadrightarrow Y$ and $Y \twoheadrightarrow Z$ then $X \twoheadrightarrow Z - Y$.
FD-MVD 1.
 if $X \rightarrow Y$ then $X \twoheadrightarrow Y$.
FD-MVD 2.
 if $X \twoheadrightarrow Y$ and $(\Omega - Y) \rightarrow Y$ then $X \rightarrow Y$.

存在従属関係 (ED) は以下の公理系を満足する。

ED 1. (Reflexivity)
 if $Y \subseteq X$ then $X \overset{e}{\rightarrow} Y$.
ED 2. (Augmentation)
 if $Z \subseteq W$ and $X \overset{e}{\rightarrow} Y$ then $XW \overset{e}{\rightarrow} YZ$.
ED 3. (Transitivity)
 if $X \overset{e}{\rightarrow} Y$ and $Y \overset{e}{\rightarrow} Z$ then $X \overset{e}{\rightarrow} Z$.

要するに，ED は FD と同じ公理系を満足する。これらの証明は ED の定義より明らかなので省略する。

<u>定理 4.3.</u>
ED に対する公理系 ED1〜3 は完全である。
(証明)
$\Omega = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ とし，$\mathcal{E}$ を Ω における ED の任意の集合とし，ED1〜3 を用いて $\mathcal{E}$ より推論される ED の集合を $\mathcal{E}^+$ で表す。$\mathcal{E}^+$ は $\mathcal{E}$ の閉包と呼ばれる。公理系の完全性は，任意の $\mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{E}^+$ に含まれるすべての ED を満足し，$f \notin \mathcal{E}^+$ なるいかなる ED: f をも満足しないような $(\Omega, \underline{D})$ 上の関係の例 $\underline{r}$ が常に構成可能であることを示すことによって証明される。

各 $A \in \Omega$ に対して，

$$A^* = \{B \mid A \overset{e}{\rightarrow} B \in \mathcal{E}^+\}$$

と定義する。$\underline{D} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \perp\}$ とし，$\underline{r}$ を，i 番目のタプル μ_i が以下のように定義されるような n 個のタプルからなる $(\Omega, \underline{D})$ 上の関係と定義する。

$$\mu_i(A) = \begin{cases} a_i & \text{if } A \in A_i^* \\ \perp & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\underline{r}$ は $\mathcal{E}^+$ を満足する。$f : X \overset{e}{\rightarrow} Y \notin \mathcal{E}^+$ とし，$\underline{r}$ が $X \overset{e}{\rightarrow} Y$ を満足すると仮定する。X^* を

$$X^* = \{B \mid X \overset{e}{\rightarrow} B \in \mathcal{E}^+\}$$

とすると，$X \overset{e}{\rightarrow} X^* \in \mathcal{E}^+$ であるから，$Y - X^* \neq \phi$ である。$B \in Y - X^*$ とする。$\underline{r}$ が $X \overset{e}{\rightarrow} Y$ を満足するなら，$X \overset{e}{\rightarrow} B$ も満足する。よって

$$\exists A \in X, \forall \mu \in \underline{r} \quad \mu(A) \neq \perp \supset \mu(B) \neq \perp$$

が成立する。これを書き換えると，

$$\exists A \in X, \forall \mu \in \underline{r} \quad \mu(B) = \perp \supset \mu(A) = \perp \qquad (4\text{-}1)$$

となる。ところが，各 $A_i \in X$ に対して，μ_i は

$$\mu_i(B) = \perp \wedge \mu_i(A_i) = a_i \neq \perp$$

となり，

$$\forall A \in X, \exists \mu \in \underline{r} \quad \mu(B) = \perp \wedge \mu(A) \neq \perp$$

となる。これは，(4-1)に矛盾する。よって，$\underline{r}$ は f を満足しない。

(証明終り)

自然従属関係は，以上のFD1〜3，MVD 0〜2，FD-MVD 1〜2，ED 1〜3 に公理 nFD，nMVD を付加した公理系を満足する。

nFD　$X \Rightarrow Y$

$$\text{iff } (X \to Y) \wedge (\forall A \in Y \quad A \xrightarrow{e} X)$$

nMVD　$X \Rrightarrow Y$

$$\text{iff } (X \twoheadrightarrow Y) \wedge (\forall A \in Y \quad A \xrightarrow{e} X)$$

定理 4.4

FD 1〜3，MVD 0〜2，FD-MVD 1〜2，ED 1〜3，nFD，nMVDからなる公理系は，自然従属関係に関する完全な公理系である。

（証明）

Γ をΩにおける nFD，nMVD の任意の集合とし，Γ_0，Γ_1を

$$\Gamma_0 = \{X \to Y \mid X \Rightarrow Y \in \Gamma\} \cup \{X \twoheadrightarrow Y \mid X \Rrightarrow Y \in \Gamma\},$$

$$\Gamma_1 = \{A \xrightarrow{e} X \mid (X \Rightarrow Y \in \Gamma \vee X \Rrightarrow Y \in \Gamma) \wedge A \in Y\}$$

と定義する。ED 1〜3を用いてΓ_1より推論されるEDをΓ_1^+で表し，残りの公理を用いてΓ_0より推論されるFD，MVDの集合をΓ_0^+で表す。Γから推論されるすべての自然従属関係をΓ^+で表す。公理系の完全性は，Γ^+に含まれるすべてのnFD，nMVDを満足し，$f \notin \Gamma^+$なるいかなる自然従属関係f：$X \Rightarrow Y$（or $X \Rrightarrow Y$）に対しても，$X \to Y$（or $X \twoheadrightarrow Y$）が成り立たないか，$B \in Y$が存在して$B \not\xrightarrow{e} X$となるような$(\Omega, \underline{D})$上の関係$\underline{r}$が常に構成可能であることを示すことによって証明される。FD 1〜3，MVD 0〜2，FD-MVD 1〜2 が FD，MVD についての完全な公理系であることはBeeri等によって既に証明されている[BEER77]。

よって，$\Omega = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$上の任意の$\Gamma$に対して，$\Gamma_0^+$に含まれるすべてのFD，MVDを満足し，$f \notin \Gamma_0^+$なるいかなる従属関係$f$も満足しない関係の例$R_0$を構成することができる。この構成に用いたすべての値の集合をD_0で表わす。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$をD_0に含まれない値とし，$\underline{D}_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \perp\}$として，$(\Omega, \underline{D}_1)$上の関係$\underline{r}_1$を定理4.3の証明中に示された構成手続きに従って構成する。

$\underline{D} = D_0 \cup \underline{D}_1$とし，$(\Omega, \underline{D})$上の関係$\underline{r}$を

$$\underline{r} = R_0 \cup \underline{r}_1$$

と定義する。

$X \Rightarrow Y$ $(X \Rrightarrow Y) \in \Gamma^+$ のとき

$$R_0 \text{ sat } X \to Y \ (X \twoheadrightarrow Y)$$

は明らかであり，$X \Rightarrow Y (X \Rrightarrow Y) \in \Gamma^+$より，

$$\forall A \in Y \quad A \xrightarrow{e} X \in \Gamma_1^+$$

となり，

$$\forall A \in Y \quad X \subset A^*$$

が成り立ち，

$$\underline{r}_1 \text{ sat } X \to Y$$

がいえる。R_0には$\perp$が現われないので

$$\forall A \in Y \quad R_0 \text{ sat } A \xrightarrow{e} X$$

がいえ，$\underline{r}_1$はその構成法より，

$$\forall A \in Y \quad \underline{r}_1 \text{ sat } A \xrightarrow{e} X$$

を満足する。$D_0 \cap \underline{D}_1 = \phi$より，

$$\underline{r} \text{ sat } X \to Y \ (X \twoheadrightarrow Y)$$

かつ

$$\forall A \in Y \quad \underline{r} \text{ sat } A \xrightarrow{e} X$$

がいえ，よって，$\underline{r}$ sat $X \Rightarrow Y$ $(X \Rrightarrow Y)$ がいえる。

逆に，$X \Rightarrow Y$ ($X \Rightarrow\!\!\Rightarrow Y$) $\notin \Gamma^+$ に対しては，$X \to Y$ ($X \twoheadrightarrow Y$) $\notin \Gamma_0^+$ か，$\exists A \in Y \;\; A \overset{e}{\Rightarrow} X \notin \Gamma_1^+$ である。$X \to Y$ ($X \twoheadrightarrow Y$) $\notin \Gamma_0^+$ であれば，R_0の構成法より，

$$\neg(R_0 \text{ sat } X \to Y \ (X \twoheadrightarrow Y))$$

となり，$\exists A \in Y \;\; A \overset{e}{\Rightarrow} X \notin \Gamma_1^+$ であれば $X \not\supseteq A^*$ となり，$\underline{r}_1$の構成法から，

$$\neg(\forall A \in Y \;\; \underline{r}_1 \text{ sat } A \overset{e}{\Rightarrow} X)$$

となる。よって，

$$\neg(\underline{r} \text{ sat } X \to Y \ (X \twoheadrightarrow Y))$$

$$\vee \neg(\forall A \in Y \;\; \underline{r} \text{ sat } A \overset{e}{\Rightarrow} X)$$

となり，

$$\neg(\underline{r} \text{ sat } X \Rightarrow Y \ (X \Rightarrow\!\!\Rightarrow Y))$$

がいえる。よって，公理系は自然従属関係に関して完全である。

（証明終り）

この定理の証明は，自然従属関係の集合Γが与えられたとき，Γ^+を求める手続きを示唆している。

Algorithm.

(1) Γより，Γ_0，Γ_1を求める。
(2) FD, MVD に関する公理系を用いてΓ_0^+を求める。
(3) ED に関する公理系を用いてΓ_1^+を求める。
(4) Γ^+ を

$$\Gamma^+ = \{X \Rightarrow Y \mid (X \to Y \in \Gamma_0^+) \wedge (\forall A \in Y \;\; A \overset{e}{\Rightarrow} X \in \Gamma_1^+)\}$$
$$\cup \{X \Rightarrow\!\!\Rightarrow Y \mid (X \twoheadrightarrow Y \in \Gamma_1^+) \wedge (\forall A \in Y \;\; A \overset{e}{\Rightarrow} X \in \Gamma_1^+)\}$$

によって求める。

ステップ(2)は，従来の従属関係に関する研究の1つとして，既に多くの研究者によって研究されているが，たとえば，Γ_0^+の正準表現を用いる著者の方法[TANA79]を用いればよい。ステップ(3)のΓ_1^+の計算は，FDの閉包の計算に他ならないから，たとえば[TANA77]で示した著者の方法を用いればよい。

[TANA79]の方法を以下に示す。

$\{X, Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\}$が$\Omega$の分割であるとき，

$$X : [Y_0]\, Y_1 \mid Y_2 \mid \cdots \mid Y_n$$

で集合

$$\{\forall A \in Y_0 \;\; X \to A,\ X \twoheadrightarrow Y_1, \cdots, X \twoheadrightarrow Y_n\}$$

を表す。集合 $\widetilde{\Gamma_0^+}$ を

$$X : [Y_0]\, Y_1 \mid Y_2 \mid \cdots \mid Y_n \in \widetilde{\Gamma_0^+}$$

iff $\Gamma_0 \vdash X : [Y_0]\, Y_1 \mid Y_2 \mid \cdots \mid Y_n$
and
$\neg \exists V : [V_0]\, V_1 \mid V_2 \mid \cdots \mid V_m$
s.t. $\Gamma \vdash V : [V_0]\, V_1 \mid \cdots \mid V_m$
and
$V : [V_0]\, V_1 \mid \cdots \mid V_m \vdash X : [Y_0]\, Y_1 \mid \cdots \mid Y_n$

と定義する。

このような$\widetilde{\Gamma_0^+}$ はΓ_0^+の最小表現になる訳であるが，$\widetilde{\Gamma_0^+}$ は以下の推論規則

rule: $X : [Y_0]\, Y_1 \mid \cdots \mid Y_n,\ V : [V_0]\, V_1 \mid \cdots \mid V_m$
$\vdash W : [Z_0]\, Z_1 \mid \cdots \mid Z_m \mid Z_{m+1}$

where
$W = X \cup (Y_i \cap V)$
$Z_0 = Y_0 \cup (Y_i \cap V_0) - W$
$Z_j = Y_i \cap V_j$ for $1 \le j \le m$
$Z_{m+1} = \Omega - W - \cup_{0 \le j \le m} Z_j$

と，次の性質

property:
$\Gamma \vdash V : [V_0]\, V_1 \mid \cdots \mid V_m \vdash X : [Y_0]\, Y_1 \mid \cdots \mid Y_n$

iff $(U \subseteq X) \wedge (V_0 \supseteq Y_0)$
$\wedge (\forall i \ \exists I \subset \{0, 1, \cdots, m\}$
$X \cup Y_i = U \cup (\cup_{j \in I} V_j))$

を用いればよい。

例題 4.1.

$\Omega = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q\}$

$\Gamma = \{G \Rightarrow DK, AC \Rightarrow OP, H \Rightarrow AB, AB \twoheadrightarrow CDEFGKLM, C \twoheadrightarrow DEFGKN, D \twoheadrightarrow AHKLN, F \twoheadrightarrow ABG, I \twoheadrightarrow JQ\}$

に対し、Γ_0, Γ_1, $\widetilde{\Gamma_0}^+$, Γ_1^+, Γ^+ を求める。

$\Gamma_0 = \{G \to DK, AC \to OP, H \to AB, AB \twoheadrightarrow CDEFGKLM, C \twoheadrightarrow DEFGKN, D \twoheadrightarrow AHKLN, F \twoheadrightarrow ABG, I \twoheadrightarrow JQ\}$

$\Gamma_1 = \{D \xrightarrow{e} G, K \xrightarrow{e} G, O \xrightarrow{e} AC, P \xrightarrow{e} AC,$
$A \xrightarrow{e} H, B \xrightarrow{e} H, C \xrightarrow{e} AB, D \xrightarrow{e} AB,$
$E \xrightarrow{e} AB, F \xrightarrow{e} AB, G \xrightarrow{e} AB, K \xrightarrow{e} AB,$
$L \xrightarrow{e} AB, M \xrightarrow{e} AB, D \xrightarrow{e} C, E \xrightarrow{e} C$
$F \xrightarrow{e} C, G \xrightarrow{e} C, K \xrightarrow{e} C, N \xrightarrow{e} C,$
$A \xrightarrow{e} D, H \xrightarrow{e} D, K \xrightarrow{e} D, L \xrightarrow{e} D,$
$N \xrightarrow{e} D, A \xrightarrow{e} F, B \xrightarrow{e} F, G \xrightarrow{e} F,$
$J \xrightarrow{e} I, Q \xrightarrow{e} I\}$

$\widetilde{\Gamma_0}^+$:
G : [ABDKOP] H | L | N | IJQ | CEFM
H : [ABOP] N | IJQ | CDEFGKLM
AB : [OP] H | N | IJQ | CDEFGKLM
C : [ABOP] H | N | IJQ | DEFGK | L | M
D : [ABKOP] H | L | N | IJQ | CEFGM
F : [ABDKOP] G | H | L | N | IJQ | CEM
I : JQ | ABCDEFGHKLMNOP

Γ_1^+ : $A^* = B^* = C^* = D^* = F^* = G^* = H^*$
$= ABCDFGH$
$E^* = ABCDEFGH$
$I^* = I$
$J^* = IJ$
$K^* = ABCDFGHK$
$L^* = ABCDFGHL$
$M^* = ABCDFGHM$
$N^* = ABCDFGHN$
$O^* = ABCDFGHO$
$P^* = ABCDFGHP$
$Q^* = IQ$

Γ^+ : $G \Rightarrow ABDKOP$, $G \twoheadrightarrow H$, $G \twoheadrightarrow L$, $G \twoheadrightarrow N$
$G \twoheadrightarrow CEFM$
$H \Rightarrow ABOP$, $H \twoheadrightarrow N$, $H \twoheadrightarrow CDEFGKLM$
$AB \Rightarrow OP$, $AB \twoheadrightarrow H$, $AB \twoheadrightarrow N$,
$AB \twoheadrightarrow CDEFGKLM$,
$C \Rightarrow ABOP$, $C \twoheadrightarrow H$, $C \twoheadrightarrow N$, $C \twoheadrightarrow DEFGK$,
$C \twoheadrightarrow L$, $C \twoheadrightarrow M$
$D \Rightarrow ABKOP$, $D \twoheadrightarrow H$, $D \twoheadrightarrow L$, $D \twoheadrightarrow N$,
$D \twoheadrightarrow CEFGM$,
$F \twoheadrightarrow ABDKOP$, $F \twoheadrightarrow G$, $F \twoheadrightarrow H$, $F \twoheadrightarrow L$,
$F \twoheadrightarrow N$, $F \twoheadrightarrow CEM$,
$I \twoheadrightarrow JQ$

別の興味ある例を示す。

例題 4.2.

$\Omega = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$\Gamma = \{A \Rightarrow B, AC \Rightarrow DE, DF \Rightarrow G, G \Rightarrow F, D \Rightarrow H\}$

$\Gamma_0^+ = \{A \to AB, AC \to ABCDEH, DF \to DFGH, G \to GF, D \to DH\}$

$\Gamma_1^+ = \{A \xrightarrow{e} A, B \xrightarrow{e} AB, C \xrightarrow{e} C, D \xrightarrow{e} ACD, E \xrightarrow{e} ACE, F \xrightarrow{e} ACDFG, G \xrightarrow{e} ACDFG, H \xrightarrow{e} ACHD\}$

$\Gamma^+ = \{A \Rightarrow AB, AC \Rightarrow DEH, DF \Rightarrow FG, G \Rightarrow GF, D \Rightarrow DH\}$

この例では $AC \to ABC$ であるが、$AC \not\Rightarrow A$, $AC \not\Rightarrow B$, $AC \not\Rightarrow C$ である。

例題 4.3.

$\Omega = \{$emp, secretary, driver, salary, type-speed, licence #$\}$

とする。secretary も driver も emp であるので、意味的な包含関係が存在する。自然従属関係を用いた解析では、このような意味的包含関係が nFD を用いて、

emp $\Rightarrow$ secretary, emp $\Rightarrow$ driver

と考えればよい。よって、この場合の自然従属関係は、

emp ⇒ salary, secretary, driver,

secretary ⇒ type-speed,

driver ⇒ licence #

となる。

5. 分解と更新

(Ω, D)上の半関係 r が，$X, Y \subset \Omega$ に対して

$$r \text{ sat } X \Rightarrow Y$$

or

$$r \text{ sat } X \twoheadrightarrow Y$$

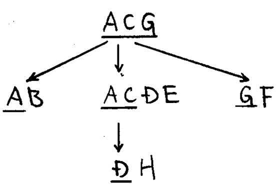
ならば，定理4.1により，r は，$[X(\Omega - Y)]r$ と $[XY]r$ の2つの半関係に分解でき，

$$\underline{r} = [X(\Omega - Y)]\underline{r} \rhd [XY]\underline{r}$$

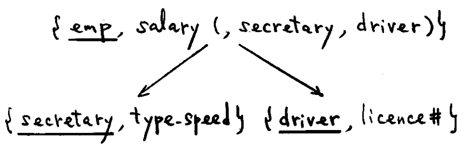
が成り立つ。与えられた Γ に対し，Γ^+ を求め，自然従属関係について正規形の半関係への分解を行うことができる。

例題5.1

例題4.2に対しては，



のように分解できる。例題4.3は，



と分解できる。

従来，スキーマの分解を行うと，図1に示したように，更新の際に種々の問題が生じた。図1において，B→C のかわりに B⇒C が指定されているとすると，"B='c'でC='e'なる情報の削除"は同図(c)のようになり，"Bの値'c'の消去"は，それに対応するCの値も消去しないとB⇒Cの条件に抵触する。よって，同図(f)のような更新は生じ得ない。

図1のようなデータベース $r(A, B, C)$ を，B→C や B↠C によって，$r_1(A, B)$ と $r_2(B, C)$ に分解すると，ビュー更新の問題と呼ばれる別の問題が生じる。たとえば，この場合に，ビューとして，AとCの間の関係のみを考え，このビューに，A='a'，C='c' なる情報を付加する場合を考えてみよう。これは，ビューに対する更新であるが，この更新を基底関係である r_1，r_2 に対するどのような更新に写像すればよいかという問題がビュー更新の問題である。データベースにおける困難な問題の1つとして，理論家の興味をひいている問題であるが，設計が正しく行われていれば，ビュー更新の問題は生じない。この例の場合，自然従属関係のみを用いて設計がなされているならば，B⇒C か B↠C が成立しており，したがって，C ⇏ B となり，A='a'，C='c' なる情報が新しく与えられる場合には，それに対するBの値も同時に与えられる筈であり，したがって，r_1，r_2 に対する更新は一意に定まる筈である。

6. おわりに

本稿では，データベースの設計論における理論と実際のギャップが，汎関係の存在を仮定する点にあることを示し，汎関係のかわりに汎半関係を考え，この拡張に伴って，従属関係も自然従属関係へと拡張し，これらに対する理論を整備した。

[BEER77] C. Beeri et al, SIGMOD 1977, pp 47-61

[TANA77] Y. Tanaka et al, VLDB 1977, pp 454-461

[TANA79] Y. Tanaka, in "Data Base Architecture" North-Holland, 1979, pp 297-316.