抽象関係データベースモデルについて

加藤昭彦（富士通（株）国際情報研）

要旨
データベースモデルのひとつのメタモデルである抽象関係モデルを提案する。このメタモデルは関係データベースモデルをカテゴリ論的に抽象化して得られる。抽象関係モデルの例として関係モデル，ネットワークモデルおよび階層モデルの数学的形式化のひとつの方法が示される。次に抽象関係モデルにおいて，射影が関手として定義されていることを使い，自然結合を射影から作られた分解関手の右随伴関手として，データモデルから独立に定義する。応用としてデータベースモデルが自然結合を持つ為の条件を調べる。

1. はじめに

関係データベースモデル[2,3]はそれまでのデータモデルに対し単純で厳密な形式化や高いデータ独立性，集合処理などを持ち込んだ。特に関係代数の射影と自然結合は関係の分解・合成を行う重要な集合処理である。

ところで，このような関係モデルにおける概念を他のモデルに使えないだろうか？その為には種々のデータモデルを統一的に扱う方法が必要となってくる。事象関連モデル[1]などのようにいくつかのデータモデルを統合したモデルはあるが，それらは新しいデータモデルを提案しているのであってこの目的の為には不適当である。

この報告の目的はデータベースのメタモデルをカテゴリ論的方法で作るひとつの方法を提案することである。カテゴリ論は種々の分野に於いていろいろな対象を統一的見通しのもとに扱うことができる特徴を持ち，コンピュータ科学やシステム理論にも応用されている[6]。ここで提案する抽象関係モデルも関係モデル，ネットワークモデル，階層モデルなどを特別な場合としてあらわすことができ，これらの個々のデータモデルの細部に立ち入ることなしにデータモデルの概念を扱える可能性を持つ（データモデル独立性）。

例えば，著者は以前に集合のカテゴリ上で関係モデルを考えると自然結合は射影による分解の右随伴関手と見なせることに気がついた[5]。そこで抽象関係モデルでは射影を関手としてモデル内に組み込み（普通，データベースモデルではユーザや応用プログラムは「部分スキーマ」を扱うことが許されており，このことを射影の一種と考えることができる），自然結合を射影からつくられる分解関手の右随伴関手として定義する。この方法によって個々のデータモデルとは独立にデータベースの分解・合成を一般的に論じることができる。ここではデータモデルが自然結合を持つ為のひとつの十分条件を指摘する。

2. 抽象関係モデル

この節の目的は種々のデータベースモデル――関係モデル，ネットワークモデル，階層モデルなどを総体として同時に扱うメタモデル，抽象関係モデルを提案することである。

このメタモデルは関係データベースモデルをカテゴリ論的に抽象化して得られたもので，データモデルをスキーマ，型（領域），実現値に分け，それぞれの間に射を定義してカテゴリを作っている。

［定義2.1］抽象関係モデルとは4つ組

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{O}, T \rangle$$

である．ここで，$\mathcal{S}$はスキーマのカテゴリであり，$\mathcal{S}$の各対象（スキーマ）Sに対して型（あるいは領域）のカテゴリ$\mathcal{T}^S$とS上の実現値のカテゴリ$\mathcal{O}^S$および関手$T^S: \mathcal{O}^S \to \mathcal{T}^S$が割り当てられている．さらに，$\mathcal{S}$の射（スキーマ射）$s: R \to S$に対して型射影関手$s^*: \mathcal{T}^S \to \mathcal{T}^R$と実現値射影関手$s^\oplus: \mathcal{O}^S \to \mathcal{O}^R$が割り当てられ，次の条件を満たす（Fig.1 参照）：

1) $id_S{}^* \cong Id_{\mathcal{T}^S}$

1') $id_S{}^\oplus \cong Id_{\mathcal{O}^S}$ $\Big\}$ $(S \in Ob\,\mathcal{S})$

2) $(s \circ r)^* \cong r^* \circ s^*$

2') $(s \circ r)^\oplus \cong r^\oplus \circ s^\oplus$ $\Big\}$ （$s \circ r$が$\mathcal{S}$で定義されるとき）

3) $s^* \circ T^S \cong T^R \circ s^\oplus$ $\quad (s: R \to S \text{ in } \mathcal{S})$

4) s^*は右随伴関手s_*を持つ．

$$\begin{tikzcd} S & \mathcal{O}^S \arrow[r, "T^S"] \arrow[d, "s^\oplus"] & \mathcal{T}^S \arrow[d, shift right, "s^*"'] \\ R \arrow[u, "s"] & \mathcal{O}^R \arrow[r, "T^R"] \arrow[d, "r^\oplus"] & \mathcal{T}^R \arrow[u, shift right, "s_*"'] \arrow[d, shift right, "r^*"'] \\ Q \arrow[u, "r"] & \mathcal{O}^Q \arrow[r, "T^Q"] & \mathcal{T}^Q \arrow[u, shift right, "r_*"'] \end{tikzcd}$$

Fig.1

ここで簡単に随伴関手の説明をすると，2つの関手$F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$と$G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$があったとき$F$が$G$の左随伴関手，あるいは$G$が$F$の右随伴関手であるとは，任意の対象$D \in Ob\,\mathcal{D}$と$C \in Ob\,\mathcal{C}$に対して$\mathcal{C}$の射$FD \to C$と$\mathcal{D}$の射$D \to GC$との間に自然な1対1対応

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, leftarrow, "F"'] \arrow[r, shift left, "G"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$\wedge: \mathcal{C}(FD, C) \cong \mathcal{D}(D, GC) : (f: FD \to C) \mapsto (\hat{f}: D \to GC)$があることである．ここで，"自然な"とは$d: D' \to D$ (in $\mathcal{D}$)と$c: C \to C'$ (in $\mathcal{C}$)に対して$(c \circ f \circ Fd)^\wedge = Gc \circ \hat{f} \circ d$となること。

$$\begin{tikzcd} FD \arrow[r, "f"] & C \arrow[d, "c"] \\ FD' \arrow[u, "Fd"] \arrow[r, "c \circ f \circ Fd"'] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\hat{f}"] & GC \arrow[d, "Gc"] \\ D' \arrow[u, "d"] \arrow[r, "(c \circ f \circ Fd)^\wedge"'] & GC' \end{tikzcd}$$

特に$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$が順序集合でF, Gが単調写像の場合，$G(c) = \max\{d \in D \mid Fd < c\}$ $(c \in \mathcal{C})$となる．

また，$id_{FD}: FD \to FD$に対応する射$\eta_D: D \to GFD$は単因子と呼ばれる自然変換$\eta: Id_{\mathcal{D}} \to GF$をなす．

抽象関係モデルではスキーマ$S \in Ob\,\mathcal{S}$と型$D \in Ob\,\mathcal{T}^S$とを決めることによってひとつのデータベースが決まると考える．すなわち，$\mathcal{O}[D]$を$\mathcal{O}^S$の中で$T^S X \cong D$なる対象（実現値）$X \in Ob\,\mathcal{O}^S$と$T^S g: T^S X \xrightarrow{\cong} T^S Y \cong D$なる射（実現値射）$g \in Mor\,\mathcal{O}^S$からなる部分カテゴリとすれば，$\mathcal{O}[D]$はスキーマ$S$を持つあるデータベースの状態全体をあらわすと考えられる．

（例1）　関係モデル

$\mathcal{S}$を集合と写像のカテゴリSet（あるいはその適当な部分カテゴリ）とする．$\mathcal{S}$の対象A（これを属性集合とみる）に対し$\mathcal{T}^A$はAを添字集合とする集合族$D = \{D_a\}_{a \in A}$と写像族$f = \{f_a: D_a \to D'_a\}: D \to D'$からなるカテゴリとする．また$\mathcal{O}^A$は次のようなカテゴリである．$\mathcal{O}^A$の対象（$A$上の関係）は3つ組$R = \langle A, D, V \rangle$である．ここで$D = \{D_a\}_{a \in A}$は集合族（領域の族），$V$は$D$のデカルト積$\prod_{i \in A} D_i = \{t: A \to \bigcup_{i \in A} D_i \mid (\forall i \in A)\ t(i) \in D_i\}$の部分集合である．$V$の元をタプルと呼ぶ．また，$\mathcal{O}^A$の射$f: R \to R'$ ($R = \langle A, D, V \rangle$, $R' = \langle A', D', V' \rangle$)は写像族$f = \{f_i: D_i \to D'_i\}_{i \in A}$であって

$$(\prod_{i \in A} f_i)(V) \subset V'$$

を満たすものである．ただし，$\Pi_{i\in A} f_i : \Pi_{i\in A} D_i \longrightarrow \Pi_{i\in A} D_i' : t \mapsto t'$ ($t'(i)=f_i t(i)$, $i\in A$) である．

A上の関係とそれらの間の射はFig.2のような図であらわすことができる．

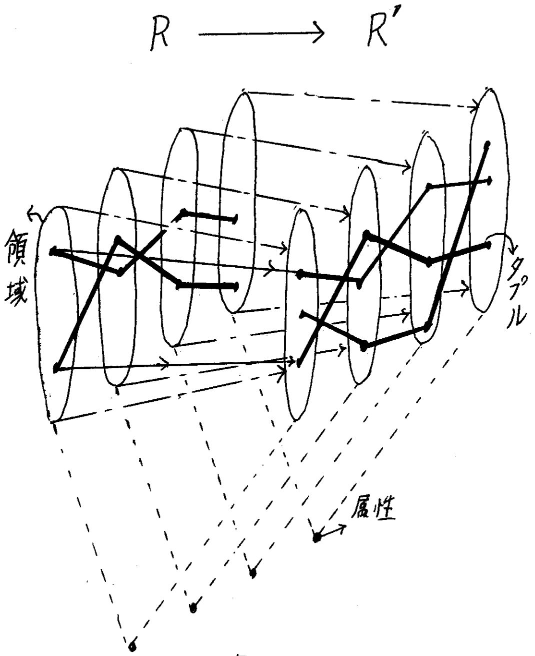


Fig. 2.

$a: A \to B$ を属性集合間の写像とするとき，a^*とa_*は次のように定義される：

$$
\begin{array}{ccc}
a^*: \mathcal{T}^B & \longrightarrow & \mathcal{T}^A \\
\{D_j\}_{j\in B} & & \{D_{a(i)}\}_{i\in A} \\
\{f_j\}_{j\in B}\downarrow & \mapsto & \downarrow\{f_{a(i)}\}_{i\in A} \\
\{D'_j\}_{j\in B} & & \{D'_{a(i)}\}_{i\in A}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
a_*: \mathcal{T}^A & \longrightarrow & \mathcal{T}^B \\
\{D_i\}_{i\in A} & & \{\Pi_{a(i)=j} D_i\}_{j\in B} \\
\{g_i\}_{i\in A}\downarrow & \mapsto & \downarrow\{\Pi_{a(i)=j} g_i\}_{j\in B} \\
\{D'_i\}_{i\in A} & & \{\Pi_{a(i)=j} D'_i\}_{j\in B}.
\end{array}
$$

また，$a^\circledast$ は次のように作られる：

$$
\begin{array}{ccc}
a^\circledast: \mathcal{O}^B & \longrightarrow & \mathcal{O}^A \\
\langle B,\{D_j\}_{j\in B},V\rangle & & \langle A,\{D_{a(i)}\}_{i\in A},W\rangle \\
\downarrow\{f_j\}_{j\in B} & \mapsto & \downarrow\{f_{a(i)}\}_{i\in A} \\
\langle B,\{D'_j\}_{j\in B},V'\rangle & & \langle A,\{D'_{a(i)}\}_{i\in A},W'\rangle
\end{array}
$$

ここで，$W=\{t \mid (\exists s\in V)(\forall i\in A)\, t(i)=s(a(i))\}$（$W'$も同様）である．

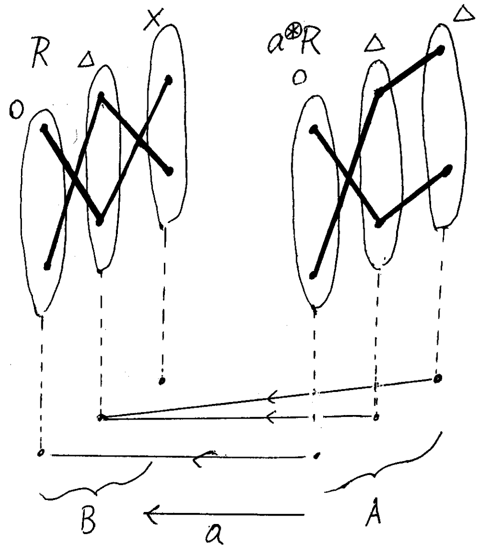


Fig. 3.

Fig. 3 は実現値射影 $a^\circledast$ の働きをあらわしている．

T^Aは$\mathcal{O}^A$の対象$R=\langle A,\{D_i\}_{i\in A},V\rangle$から領域の族$\{D_i\}_{i\in A}$のみを取り出す忘却関手である．

（例2）　ネットワークモデル

ここでは単純化したネットワークモデルを抽象関係モデルとして数学的に形式化してみる．

$\mathcal{S}$の対象（スキーマ）は（多辺）グラフ $G=\langle S,R,own,mem\rangle$，すなわちバックマン図である．ここで，$S$は親子集合型名の集合，$R$はレコード型名の集合，$own, mem: S\to R$ は親子集合型名にそれぞれその親レコード型名，子レコード型名を割り当てる結合写像

である (Fig. 4).

スキーマ射 f: $\langle S, R, own, mem\rangle \to \langle S', R', own', mem'\rangle$ はグラフ準同型，すなわち対 $f = \langle f^S : S \to S',\ f^R : R \to R'\rangle$ で下図を可換にするものである

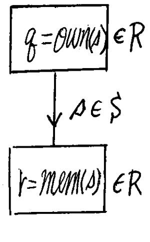


Fig. 4.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f^S} & S' \\ {\scriptstyle own}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle own'} \\ R & \xrightarrow[f^R]{} & R' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f^S} & S' \\ {\scriptstyle mem}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle mem'} \\ R & \xrightarrow[f^R]{} & R' \end{array}$$

スキーマ $G=\langle S, R, own, mem\rangle$ に対する $\mathcal{V}G$ は Set^R，すなわち各レコード型名 $r \in R$ にそのレコード型の取りうる値の集合 V_r を割り当てる集合族 $\{V_r\}_{r\in R}$ を対象とするカテゴリであって射は写像族 $f = \{f_r : V_r \to V'_r\}_{r\in R} : V \to V'$ である.

また，実現値のカテゴリ $\mathcal{O}G$ は次のように定義される.

対象（実現値）は4つ組 $N = \langle V, X, v, \theta\rangle$ ($V = \{V_r\}_{r\in R}$, $X = \{X_r\}_{r\in R}$, $v = \{v_r : X_r \to V_r\}_{r\in R}$, $\theta = \{\theta_s : X_{mem(s)} \to X_{own(s)}\}_{s\in S}$) である. ここで，V_r, X_r, $v_r : X_r \to V_r$ ($r \in R$) はそれぞれレコード型名 r に対する値集合，レコードの集合および各レコードにその値を対応させる写像である. また，θ_s ($s \in S$) はレコード $x \in X_{mem(s)}$ にその親レコード $\theta_s(x)$ を対応させる写像である.

Fig. 5 にひとつの実現値の例を示した. ここではレコードを円であらわしており，円の間の矢は子→親対応をあらわしている. ひとつの親レコードに対応する子レコード間の順序（ポインタ）が書かれていないのは，この例における形式化に子レコードの順序の概念を含めていないからである. 子レコードの順序を含めて形式化しようとするならば，例えば各 X_r を全順序集合とし，各 θ_s を単調写像とすればよい.

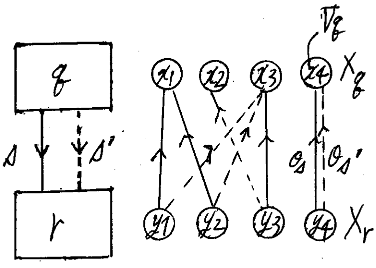
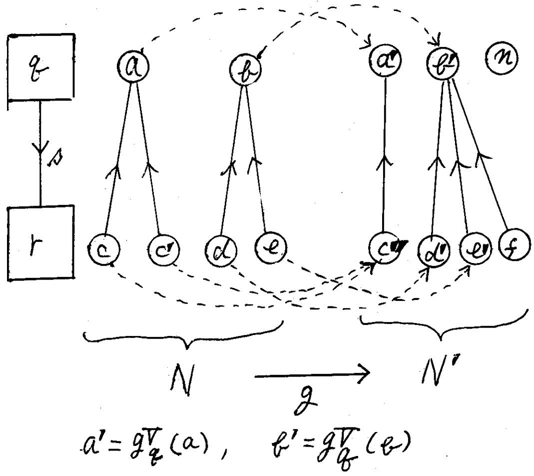


Fig. 5.

実現値射 $g : N \to N'$ ($N = \langle V, X, v, \theta\rangle$, $N' = \langle V', X', v', \theta'\rangle$) は対 $g = \langle g^V, g^X\rangle$ ($g^V = \{g^V_r : V_r \to V'_r\}_{r\in R}$, $g^X = \{g^X_r : X_r \to X'_r\}_{r\in R}$) であって

$$\begin{array}{ccc} X_r & \xrightarrow{g^X_r} & X'_r \\ {\scriptstyle v_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'_r} \\ V_r & \xrightarrow{g^V_r} & V'_r \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_{own(s)} & \xrightarrow{g^X_{own(s)}} & X'_{own(s)} \\ {\scriptstyle \theta_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta'_s} \\ X_{mem(s)} & \xrightarrow{g^X_{mem(s)}} & X'_{mem(s)} \end{array}$$

を可換にするものである.



$a' = g^V_q(a)$, $b' = g^V_q(b)$

$c'' = g^V_r(c) = g^V_r(c')$, $d' = g^V_r(d)$

$e' = g^V_r(e)$

Fig. 6.

Fig. 6 は実現値射の様子を示している。

$f: G \longrightarrow G'$ ($G = \langle S, R, own, mem \rangle$, $G' = \langle S', R', own', mem' \rangle$) がスキーマ射であるとする。$f^*: \mathfrak{J}^{G'} \longrightarrow \mathfrak{J}^{G}$ と $f_*: \mathfrak{J}^{G} \longrightarrow \mathfrak{J}^{G'}$ は例1と同様に定義される。すなわち，f^*, f_* はそれぞれ例1の定義における $(f^R)^*$, $(f^R)_*$ と等しい。実現値射影 $f^{\circledast}: \Theta^{G'} \longrightarrow \Theta^{G}$ は次のように定義される。実現値 $N' = \langle V', X', v', \theta' \rangle \in Ob\,\Theta^{G'}$ に対し $f^{\circledast}N' = \langle \{V'_{f^R(r)}\}_{r \in R}, \{X'_{f^R(r)}\}_{r \in R}, \{v'_{f^R(r)}\}_{r \in R}, \{\theta'_{f^S(s)}\}_{s \in S} \rangle$ と定義され，実現値射 $g = \langle \{g^V_{r'}\}_{r' \in R'}, \{g^X_{r'}\}_{r' \in R'} \rangle \in Mor\,\Theta^{G'}$ に対し $f^{\circledast}g = \langle \{g^V_{f^R(r)}\}_{r \in R}, \{g^X_{f^R(r)}\}_{r \in R} \rangle$ で定義される。

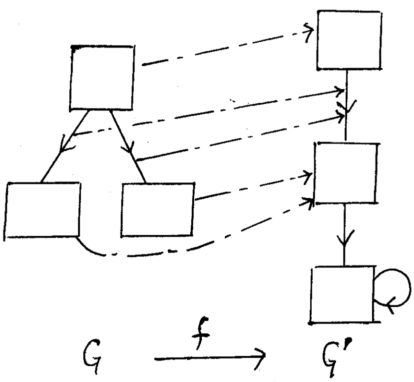


Fig. 7.

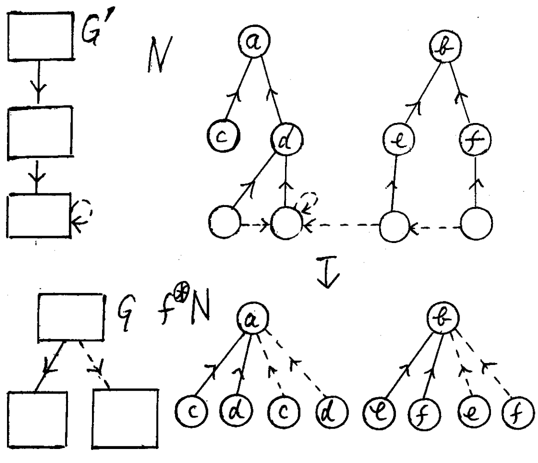


Fig. 8.

Fig. 8 は Fig. 7 の形をしたスキーマ射 $f: G \rightarrow G'$ による実現値射影の例を示している（ここでは Fig. 7 の G' のようにバックマン図にループを持つ場合の問題点については議論しない）。

T^G は実現値 $N = \langle V, X, v, \theta \rangle$ から V を取り出し，$g = \langle g^R, g^X \rangle$ から g^R を取り出す関手である。

（例3）　階層モデル

階層モデルは例2のネットワークモデルにおけるスキーマ G を木であるもののみに制限することによって得られる。

3. 分解と自然結合

関係データベースモデルにおいて2つの関係を自然結合する場合，結合させられる属性に対してこの2つの関係は両立（領域が同じ）しなければならない。一方，ひとつの関係を射影によって分解すると，その結果の関係は常に両立する。

従って関係の分解と自然結合はひとつの関係と両立する2つの関係の間の互いに逆向きの演算である。ただし良く知られているようにこれらは逆演算ではない。それでは分解と自然結合の間にどのような関係があるのだろうか？

実は自然結合は次のように射影と関係の包含関係であらわせる。すなわち，P と Q との自然結合 $P \bowtie Q$ は関係 R で，P（の属性）方向への射影が P に含まれ，Q 方向への射影が Q に含まれるようなもののうち最大のものである（例1での形式化では包含関係のかわりに関係間の射を使っているため，さらに一般的なことがいえるが，本質的にはほとんど同じである）。

以上の関連は随伴関手の特別の場合である。

すなわち，抽象関係モデルでは自然結合は分解の右随伴関手と定義される。この定義によって自然結合を個々のデ

モデルとは独立に考えることができる。
以下ではまず両立する実現値のカテゴリをつくり，次に分解と自然結合を定義する．
これ以後スキーマの図（Fig.9）を簡単の為常に

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "b"'] & & C \arrow[dl, "c"] \\
& A & \text{(in } \mathcal{S}\text{)}
\end{tikzcd}$$

Fig. 9.

仮定しておく，
抽象関係モデル$\mathcal{M}=\langle \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{O}, T\rangle$における$(b,c)$－両立関係を定義する．

［定義 3.1］ (b,c)－両立する実現値のカテゴリ $\mathcal{O}^{b;c}$ は次のように定義される。

(i) 対象は3つ組$\langle D, P, Q\rangle$である．ここで，$D \in Ob\,\mathcal{T}^A$, $P \in Ob\,\mathcal{O}^B$, $Q \in Ob\,\mathcal{O}^C$ で $T^B P \cong b^* D$ かつ $T^C Q \cong c_* Q$ を満たす．

(ii) 射 $f: \langle D, P, Q\rangle \to \langle D', P', Q'\rangle$ は3つ組$f=\langle g, h, k\rangle$である．ここで，$g: D \to D' \in Mor\,\mathcal{T}^A$, $h: P \to P' \in Mor\,\mathcal{O}^B$, $k: Q \to Q' \in Mor\,\mathcal{O}^C$ であって

$$\begin{tikzcd}
T^B P \arrow[r, "T^B h"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & T^B P' \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & T^C Q \arrow[r, "T^C k"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & T^C Q' \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
b^* D \arrow[r, "b^* g"'] & b^* D' & c^* D \arrow[r, "c^* g"'] & c^* D'
\end{tikzcd}$$

が可換。
分解関手は射影関手から容易に定義できる．
［定義 3.2］ (b,c)－分解関手とは

$$\mathrm{Dec}^{b;c}: \mathcal{O}^A \longrightarrow \mathcal{O}^{b;c}$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "f"] & \langle T^A R, b^{\circledast} R, c^{\circledast} R\rangle \arrow[d, "{\langle T^A f, b^{\circledast} f, c^{\circledast} f\rangle}"] \\
R' \arrow[r, phantom, "\mapsto"] & \langle T^A R', b^{\circledast} R', c^{\circledast} R'\rangle
\end{tikzcd}$$

で定義される$\mathrm{Dec}^{b;c}$のことである．
［定義 3.3］ (b,c)－分解関手$\mathrm{Dec}^{b;c}$：$\mathcal{O}^A \to \mathcal{O}^{b;c}$が右随伴関手を持つときその関手を$(b,c)$-自然結合関手といって$\mathrm{Join}^{b;c}: \mathcal{O}^{b;c} \longrightarrow \mathcal{O}^A$ とかく．
すなわち，

$$\mathcal{O}^{b;c}(\langle T^A R, b^{\circledast} R, c^{\circledast} R\rangle, \langle D, P, Q\rangle)$$

$$\cong \mathcal{O}^A(R, \mathrm{Join}^{b;c}\langle D, P, Q\rangle).$$

(例1)の関係モデルの場合，これがどのような意味を持つか考える．簡単のため定義3.1の"≅"はすべて"="と思う．
すると Fig.9. の b, c は属性集合間の写像となり，$\mathcal{O}^{b;c}$ の対象は$\langle D, P, Q\rangle$ （$P=\langle B, b^* D, \mathcal{V}\rangle$，$Q=\langle C, c^* D, \mathcal{W}\rangle$）の形である。そこでA上の関係
$P \bowtie Q = \langle A, D, \{t \mid t' \in \mathcal{V} \wedge t'' \in \mathcal{W}\}\rangle$
$(t'(j)=t(b(j)), j \in B; t''(j2)=t(c(j2)), j2 \in C)$ とすると，任意のA上の関係Rに対して

$$g: R \longrightarrow P \bowtie Q$$

が$\mathcal{O}^A$の射になることと，

$$g' \langle T^A g, b^{\circledast} g, c^{\circledast} g\rangle : \mathrm{Dec}^{b;c}(R) \longrightarrow \langle D, P, Q\rangle$$

が$\mathcal{O}^{b;c}$の射になることは同等になる．ところが$g=T^A g$であることと$b^{\circledast} g$，$c^{\circledast} g$ の部分が一意に決まることから対応 $g \leftrightarrow g'$ は同型対応である．すなわち，$P \bowtie Q = \mathrm{Join}^{b;c}\langle D, P, Q\rangle$ (Fig.10)．
以後，$\mathrm{Join}^{b;c}\langle D, P, Q\rangle$ を$P \bowtie Q$と略記する．
あるデータベースモデルが自然結合を持つ為のひとつの十分条件が次のように与えられる．
［命題］ 抽象関係モデル$\mathcal{M}=\langle \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{O}, T\rangle$がもし次の条件を満たしたならばこの$\mathcal{M}$は自然結合を常に持つ．
(i) 各$S \in Ob\,\mathcal{S}$に対して，$T^S: \mathcal{O}^S \to \mathcal{T}^S$ は右随伴関手を持つ．また，$\mathcal{O}^S$ は pullbackを持つ．

$$\begin{tikzcd}
B=\{i_1, i_2, i_3\} \arrow[dr, "b"'] & & C=\{j_1, j_2\} \arrow[dl, "c"] \\
& A=\{l_1, l_2, l_3\} &
\end{tikzcd}$$

P	i_1	i_2	i_3
	x_1	y_1	z_1
	x_2	x_2	z_2
	x_3	y_3	z_3

Q	j_1	j_2
	z_1	u_1
	z_2	u_2
	z_2	u_3

$P\bowtie Q$	l_1	l_2	l_3
	x_1	z_2	u_2
	x_1	z_2	u_3

(b,c)－自然結合の例(関係モデル)

Fig. 10.

(ii) 各スキーマ射 $s: S \to S' \in Mor\,\mathcal{S}$ に対し、$s^{\circledast}: \mathcal{O}^{S'} \to \mathcal{O}^{S}$ は右随伴関手を持つ。

T^S, $s^{\circledast}$ の右随伴関手をそれぞれ $Fill^S: \mathcal{T}^S \to \mathcal{O}^S$, $s_{\circledast}: \mathcal{O}^S \to \mathcal{O}^{S'}$ とかく。

［証明］ $\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & A & C \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd}$ を$\mathcal{S}$の図とする。$\langle D, P, Q\rangle \in Ob\,\mathcal{O}^{b:c}$ に対して$P\bowtie Q$ をFig.11. の図の極限(pullbackの組合せで作れる)とする(Fig.12)。ここで、$\eta^B, \eta^C, \epsilon^B, \epsilon^C$ はそれぞれ随伴対 $(T^B, Fill^B)$, $(T^C, Fill^C)$, (b^*, b_*), (c^*, c_*) の単因子である。また、$Fill^A b_* b^* D \cong b_{\circledast} Fill^B T^B P$ は $b^* T^A \cong T^B b^{\circledast}$ から $Fill^A b_* \cong b_{\circledast} Fill^B$ が随伴関手の性質により得られることと $b^* D \cong T^B P$

$$\begin{tikzcd}
& & & c_{\circledast} D \arrow[d, "c_{\circledast}\eta^C_Q"'] \\
& Fill^A D \arrow[r, "Fill^A \epsilon^C_D"] \arrow[d, "Fill^A \epsilon^B_D"] & Fill^A c_* c^* D \arrow[r, phantom, "\cong"] & c_{\circledast} Fill^C T^C Q \\
& Fill^A b_* b^* D \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
b_{\circledast} P \arrow[r, "b_{\circledast}\eta^B_P"'] & b_{\circledast} Fill^B T^B P & &
\end{tikzcd}$$

Fig. 11.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] & P\bowtie Q \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & c_{\circledast} D \arrow[d] \\
& & Fill^A D \arrow[r] \arrow[d] & Fill^A c_* c^* D \arrow[r, phantom, "\cong"] & c_{\circledast} Fill^C T^C Q \\
& & Fill^A b_* b^* D \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
& b_{\circledast} P \arrow[r] & b_{\circledast} Fill^B T^B P & &
\end{tikzcd}$$

Fig. 12.

により出る。$Fill^A c_* c^* D \cong c_{\circledast} Fill^C T^C Q$ も同様。

A上の関係RからP⋈Qへの射f: $R \to P\bowtie Q$ はP⋈Qの定義により

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rrr, "n"] \arrow[dr, "l"] \arrow[ddd, "m"'] & & & c_{\circledast} D \arrow[d] \\
& Fill^A D \arrow[r] \arrow[d] & Fill^A c_* c^* D \arrow[r, phantom, "\cong"] & c_{\circledast} Fill^C T^C Q \\
& Fill^A b_* b^* D \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
b_{\circledast} P \arrow[r] & b_{\circledast} Fill^B T^B P & &
\end{tikzcd}$$

Fig. 13

Fig. 13を可換にする３つ組 $\langle l, m, n\rangle$ と1対1の対応がある。そこでこのような３つ組と射 $\langle g, h, k\rangle: Dec^{b:c} R \to \langle D, P, Q\rangle$ との間の1対1対応を $l=\hat{g}$, $m=\hat{h}$, $n=\hat{k}$ でつくる (Fig.14)。この対応関係がうまくつくことを示す為

に⟨l, m, n⟩がFig. 13を可換にすることと⟨g, h, k⟩が射となることが同等であることを示せばよい。以下ではFig. 13の左の四角が可換であることと

$$\begin{tikzcd} T^B k^{\circledast} R \arrow[r, "T^B h"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & T^B P \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\ k^* T^A R \arrow[r, "n", "k^* g"'] & k^* D \end{tikzcd}$$

との同等関係のみを示す（残りも同様に示せる）。ここでは概略のみ示すが、

$$\begin{tikzcd} T^B k^{\circledast} R \arrow[r, "T^B h"] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & T^B P \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\ k^* T^A R \arrow[r, "k^* g"'] & k^* D \end{tikzcd}$$

から

$$\begin{tikzcd} & k_{\circledast} \mathrm{Fill}^B T^B P \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\ R \arrow[ur, "(T^B h)^{\wedge\wedge}"] \arrow[dr, "(k^* g)^{\wedge\wedge}"'] & \\ & \mathrm{Fill}^A k_* k^* D \end{tikzcd}$$

がつくれることと、単因子の性質により

$$\begin{tikzcd} k^{\circledast} R \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "(T^B h)^{\wedge}"] & \\ P \arrow[r, "\eta^B_P"'] & \mathrm{Fill}^B T^B P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^A R \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "(k^* g)^{\wedge}"] & \\ D \arrow[r, "e^k_D"'] & k_* k^* D \end{tikzcd}$$

が常に可換。従って

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\hat{h}=m"'] \arrow[dr, "(T^B h)^{\wedge\wedge}"] & \\ k_{\circledast} P \arrow[r, "k_{\circledast} \eta^B_P"'] & k_{\circledast} \mathrm{Fill}^B T^B P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[d, "\hat{g}=l"'] \arrow[dr, "(k^* g)^{\wedge\wedge}"] & \\ \mathrm{Fill}^A \arrow[r, "\mathrm{Fill}\, e^k_D"'] & \mathrm{Fill}^A k_* k^* D \end{tikzcd}$$

が可換であることによって得られる。

(q.e.d.)

ここで、前の例1における関係モデルにおいて上の命題の条件がどうなっているかを結果のみ示す。

(1) (Θ^A上でのpullback)

$g: P \to R$, $h: Q \to R$, $P = \langle A, D^1, V \rangle$, $Q = \langle A, D^2, W \rangle$, $R = \langle A, D^3, U \rangle$ (in Θ^A) のとき $P \times_R Q = \langle A, D, X \rangle$ とする。

ここで、$D_i = \{\langle d_1, d_2 \rangle \in D_i^1 \times D_i^2 \mid g_i(d_1) = h_i(d_2)\}$ $(i \in A)$, $X \ni t \Leftrightarrow \exists t_1 \in V \wedge \exists t_2 \in W \wedge (\forall i \in A)$ $g_i(t_1(i)) = h_i(t_2(i)) \wedge t(i) = \langle t_1(i), t_2(i) \rangle)$ である。$\pi^1 = \{\pi_i^1 : D_i \to D_i^1 : \langle d_1, d_2 \rangle \mapsto d_1\}_{i \in A}$ と $\pi^2 = \{\pi_i^2 : D_i \to D_i^2 : \langle d_1, d_2 \rangle \mapsto d_2\}_{i \in A}$ は射 $P \times_R Q \to P$, $P \times_R Q \to Q$ をなし、

$$\begin{tikzcd} P \times_R Q \arrow[r, "\pi^2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Q \arrow[d, "h"] \\ P \arrow[r, "g"'] & R \end{tikzcd}$$

はpullback.

(2) (Fill^A)

Fill^A は次のように関係にあらゆるタプルを入れることによってつくられる。

$$\mathrm{Fill}^A : \mathcal{T}^A \longrightarrow \Theta^A$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \langle A, D, \Pi_{i \in A} D_i \rangle \arrow[d, "f"] \\ D' & & \langle A, D', \Pi_{i \in A} D'_i \rangle \end{tikzcd}$$

(3) ($a : A \to B$ (in $\mathcal{S}$) に対する $a_{\circledast}$)

$a_{\circledast}$ は次のようにしてできる。

$$a_{\circledast} : \Theta^A \longrightarrow \Theta^B$$

$$\begin{tikzcd} \langle A, D, V \rangle \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \langle B, a_* D, V_* \rangle \arrow[d, "f'"] \\ \langle A, D', V' \rangle & & \langle B, a_* D', V'_* \rangle \end{tikzcd}$$

ここで、$V_* = \{t \in \Pi_{j \in B}(\Pi_{a(i)=j} D_i) \mid$ $(\exists s \in V)(\forall i \in A)(s(i) = t(a(i))(i))\}$.

謝辞

激励と有益な助言を与えて下さった国際情報社会科学研究所の北川敏男所長をはじめとする研究員諸氏に感謝いたします。

参考文献：

[1] P.P.S. Chen: The Entity-Relationship Model—Toward a Unified View of Data, ACM TODS, Vol. 1, No. 1, (1976) pp. 9–36

[2] E.F. Codd: Relational Model of Data for Large Shared Data Banks, CACM, Vol. 13, No. 6 (1970), pp. 377–387.

[3] E.F. Codd: Relational Completeness of Data Base Sub-languages, Courant Science Symposia 6 (1971), pp. 65–98.

[4] C.J. Date: An Introduction to Database Systems, Addison-Wesley (1975).

[5] 加藤昭彦: 射の導入による関係データモデルの表現独立性への検証と従属性への応用, 数理解析研講究録 423 (1981) pp. 275–293.

[6] E.G. Manes ed.: Category Theory Applied to Computation and Control, Lec. Notes in Comp. Sci. 25, Springer-Verlag (1975).