

# ダム放流計画の自動作成のための 「プログレッシブ動的計画法」の開発

山口悟史<sup>1,a)</sup> 金多仁<sup>1</sup>

**概要:** ダムの放流計画を自動作成するための数理最適化手法「プログレッシブ動的計画法」を提案する。近年の水害の頻発を受け、従来にない放流計画が求められている。ダム放流量を急激に変化させない「放流の原則」を満たしつつ、大雨に先立ってダムの容量を空けておく「事前放流」、下流の河川流量を小さく抑えるために複数のダムからタイミングをずらして放流する「ダム群連携操作」を実現するために、提案手法は離散微分動的計画法を繰り返すことで段階的に解像度を向上させる。これにより提案手法は放流量を高い解像度 (1 m<sup>3</sup>/s) で探索する。N川ダム群を対象にシミュレーション実験を行った結果、現在のダム操作規則では3ダムとも緊急放流に至るケースであっても、提案手法では緊急放流を避け、かつ下流河川のピーク流量を41%下げた解を見つけた。対象期間1.5日の最適化に要した時間は191秒であった。提案手法がダムの放流計画の自動作成に有用であると結論する。

**キーワード:** ダム放流計画, ダム群連携操作, プログレッシブ動的計画法

## Development of Progressive Dynamic Programming Method for reservoir operation

SATOSHI YAMAGUCHI<sup>†1</sup> DAIN KIM<sup>†1</sup>

**Abstract:** We propose Progressive Dynamic Planning Method to automate reservoir operation planning. To mitigate flood damage, unprecedented discharge plans are required. While satisfying the "principle of discharge" that slowly change the discharge, "pre-release" to keep the capacity of the reservoir prior to heavy rain, and "reservoir group cooperation" that shifts the timing of discharge peak in order to reduce the peak discharge of the lower river is considered by the proposed method, which optimizes the discharge at a high resolution (1 m<sup>3</sup>/s). The proposed method progressively improves resolution by repeating discrete differential dynamic programming. Simulation experiment results on N river reservoir group showed that the proposed method avoided emergency release and found a solution to lower the peak discharge of the lower river by 41% against given inflow timeseries which cause emergency release at all three reservoirs by obeying the actual reservoir operation rules. The computational time was 191 seconds to optimize the target period of 1.5 days. We conclude that the proposed method is useful to reservoir operation planning.

**Keywords:** reservoir operation planning, reservoir group cooperation, progressive dynamic programming

### 1. はじめに

近年、これまで経験したことのないような大雨が毎年のように発生しており、深刻な水害が発生している。気候変動により、水害はより深刻になると考えられている。気候変動対策の国際的な目標として、産業革命以前と比較して世界の平均気温上昇を2度未満に抑えることが掲げられている(パリ協定「2度目標」)。しかし、この目標が達成されたとしても、日本の降雨量が1.1倍、洪水の発生頻度が約2倍になると推定されている[1]。

水害の被害最小化のため、これまでになかったダムの運用が求められている。緊急時にはダムを治水のために最大限活用する方針が、政府により2019年に決められた[2]。この方針では、大雨に先立ってダム流入量を予測しその分だけダムの容量を空けておき(事前放流)、大雨により増水した分を貯める(洪水調節)よう求めている。従来、一つのダムの貯水容量は、洪水調節、水力発電、農業用水などの目的ごと

に分割され、操作規則に基づきそれぞれ運用されてきた。新しい方針は、水力発電や農業用水などの容量も事前放流の対象にすることを求めるなど、ダムの貯水容量を統合的に運用するよう求めるものである。

今後はさらに、上下流の複数のダムを統合的に運用すること(ダム群連携操作)への期待が高まっている。上流の複数のダムからタイミングをずらして放流すれば、ダム下流の河川のピーク流量を小さく抑えられる。たとえば、三重県・奈良県にある名張川上流ダム群は、3つのダムが並列に接続された水系である。この水系では2009年台風18号来襲時に1つのダムが満杯となることが予想されたため、余裕のあった他の2つのダムに水を貯め、ダム群下流の河川流量を小さく抑えた[3]。このダム群においてダム群連携操作はたびたび実施されている[4]。ただし、ダム群連携操作は多くの要素を考慮する必要がある複雑な操作であり、現在は限られたダム群でのみ実施されている。

<sup>1</sup> 株式会社 日立製作所  
Hitachi, Ltd.

様々なダムで事前放流が適切になされ、かつダム群連携操作が広く実施されるようになるためには、使い勝手の良い、放流計画自動作成ソフトウェアが必要だと著者らは考える。本研究の目的は、放流計画の自動作成アルゴリズムを開発することである。

## 2. 関連研究

### 2.1 既往研究

動的計画法 (Dynamic Programming; DP) により放流計画を作成できることが知られている[5]。たとえば野原ら[6]は、洪水の防止を目的としてダムの1日ごとの放流計画をDPで求めた。同様に川村ら[7]は2つのダムの1日ごとの放流計画をDPで求めた。大江ら[8]は、発電量の最大化を目的としてダムの6時間ごとの放流計画をDPにより作成するシステムを開発した。佐山ら[9]は、洪水時の下流河川の流量の最小化を目的として5つのダムの1時間ごとの放流計画をDPで作成するシステムを開発した。Zhaoら[10]は、洪水防止を目的として、中国中部の丹江口ダムの10日ごとの放流計画をDPで求めた。Saadatら[11]は、利水効率向上を目的として、イランのザヤンデルードダムの1か月ごとの放流計画をDPで求めた。本研究では、DPとその近似解法を改良するアプローチをとることとした。

ダム放流計画の自動作成における未解決の課題の一つに、放流量を急激に変化させない放流計画を求めることがあると著者らは考える。ダムの放流により下流に急激な水位の変動を生じさせないよう努めることは、ダム管理において「放流の原則」と呼ばれる。放流の原則では、放流量の増加の割合を、あらかじめ決めた値以下にすることが求められる。あるダムの放流の原則を図1に示す。前述した既往の研究においては、時間解像度が粗い[6][7][8]、あるいは事前放流を許可しない制約条件を設ける[9]などにより、放流の原則を考慮しなくても、現実的な放流計画を得ている。しかし、放流計画の時間解像度が細かく、かつ事前放流、すなわち現在のダム放流量が小さい状態から放流を開始することを考慮する場合、放流の原則を考慮しないと、現実的な放流計画にならない。

### 2.2 DPによるダム放流計画の自動作成

DPの概念図を図2に示す。たとえば貯水量を3段階に離散化した場合、3時間先まで1時間ごとにダムの貯水量を決める問題は、3個の選択肢が3個連続していることに相当する(図2a)。この場合、1時間先なら3通り、2時間先なら $3^2$ 通り、と、時間の経過とともに、検討すべき貯水量がべき乗で増えていく。これに対しDPでは、現在時間 $t$ の選択肢0,1,2に至るまでの選択がそれぞれ最適である(最適性の原理)とし、現在時間 $t$ の選択肢0,1,2から時間 $t+1$ の選択肢0,1,2に至る $3^2$ 通り(図2b点線)の状態遷移を検討し、そのうちの最適な3通り(図2b実線)を記憶する。この場

合、検討すべき貯水量の数は、1時間先でも $3^2$ 通り、2時間先でも $3^2$ 通り、と、時間に対して一定の数となる。

DPは、ダムの数のべき乗、および貯水量の段階数のべき乗で計算量が增大する。DPの計算量を減らす近似解法の一つに、離散微分動的計画法 (Discrete Differential Dynamic Programming; DDDP) が挙げられる[9]。DDDPは、状態変数の段階数 $K$ を小さな値 $dK$ (たとえば3)に制約して準最適解を求める処理を繰り返すものである。DDDPの概念図を図3bに示す。DDDPでは、適当な貯水量時系列を初期トラジェクトリとして与え、この貯水量を数段階だけ増減する範囲(コリドー)のみで最適解を探索し、次の初期トラジェクトリとする。この計算を繰り返すことによって、最終的に最適解を求める。

DDDPで最適解を得るには、初期トラジェクトリから最適解に至るまで目的関数が凸である必要がある。下流河川流量の大きさの程度と、放流の原則を満たす程度を目的関数で表現した場合、その目的関数は多峰になり、DDDPで最適解が得られないおそれがある。

また、状態変数の段階数 $K$ が大きな値の場合、DDDPは、最適解に到達するまでに多数回の繰り返しが必要である。

すなわちDDDPは、放流の原則を満たすダム放流計画を作成する上で、2つの課題があるといえる。1つ目の課題は多峰の目的関数にも適用可能にすることである。2つ目の課題は、状態変数の段階数 $K$ が大きな値でも短時間で解けるようにすることである。

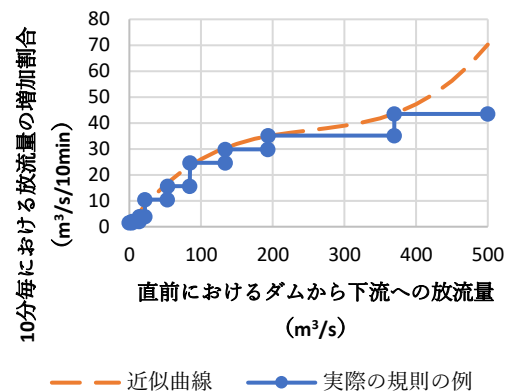


図1 あるダムの「下流に急激な水位の変動を生じさせない放流量」として定められた値

Figure 1 A sample of upper limit of discharge which assumed not to cause rapid water level change

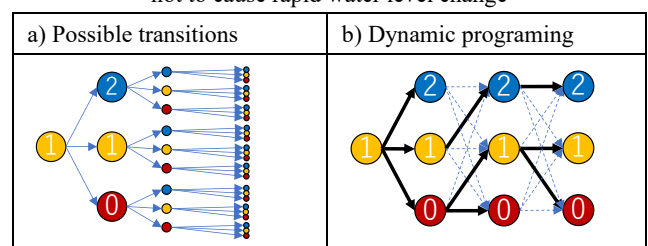


図2 DPの概念図

Figure 2 Illustration of dynamic programming.

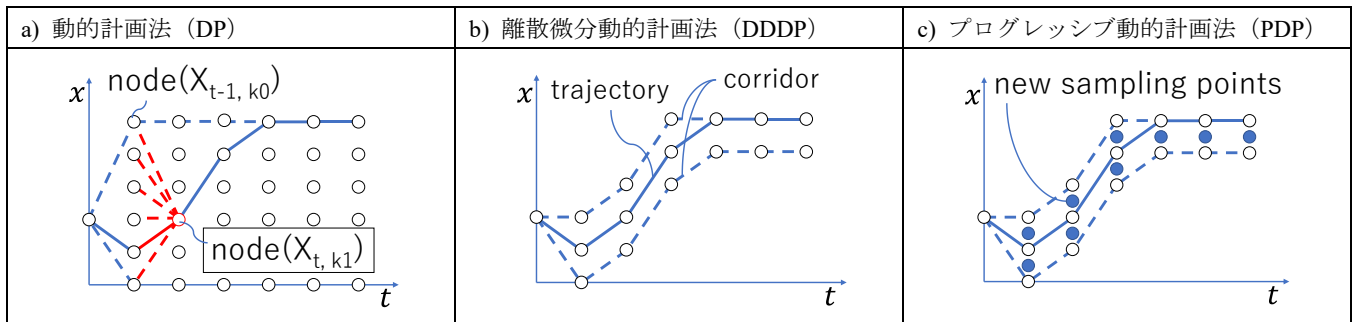


図 3 DP, DDDP, および PDP の概念図  
Figure 3 Illustration of DP, DDDP and PDP

### 3. 提案手法

本研究では、DP の近似解法「プログレッシブ動的計画法」(Progressive Dynamic Programming, PDP) を提案する。PDP の概念図を図 3c に、PDP のフローチャートを図 4 に示す。PDP では、DP を用いて初期トラジェクトリを得る (ステップ 1)。この際の状態変数の段階数を  $K_0$  とする。続いて初期トラジェクトリの近傍で状態変数の段階数  $K$  を 2 倍、コリドーの幅を 5 にして DDDP を行い、新たなトラジェクトリを得る (ステップ 2)。ステップ 2 を  $M$  回繰り返す (ステップ 3) ことで状態変数の段階数は  $2^M K_0$  となる。

前述の 1 つ目の課題である多峰の目的関数にも適用可能にすることに対し、PDP は初期トラジェクトリを DP で求めること、および解像度を漸進的に上げていくことで、局所解を避け、大域解を見つけ出す可能性を高めるようにする。もちろん、PDP は多峰の目的関数に対し常に最適解を出すとは言えない。ダム放流計画の自動作成に適用可能であるかは、4 章の実例に基づいて 5 章で議論する。

2 つ目の課題である状態変数の段階数  $K$  が大きな値でも適用可能とすることに対し、PDP は漸進的に段階数を増加させることで解決を図る。

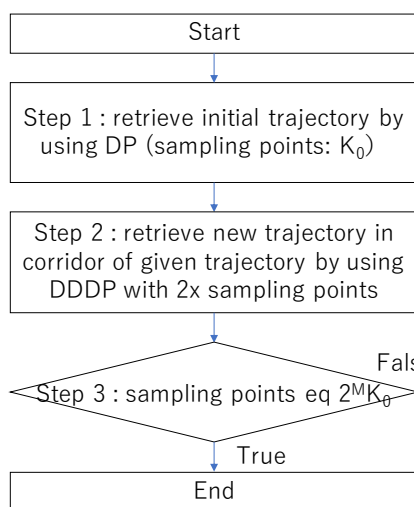


図 4 プログレッシブ DP のフローチャート

Figure 4 Flow chart of progressive Dynamic Programming

### 4. 実験と結果

#### 4.1 実験の設定

実験対象を N 川上流域にある 3 つのダムとした。対象のダム・河川ネットワーク構造を図 5 に示す。ダム下流には河川水位計が 3 か所ある。河川の流下時間は、流下速度を  $5 \text{ m/s}$  と仮定して算出した。

これらのダムの現行の操作規程は「一定量方式」、すなわち、流入量が一定量未満の場合は流入量と同じだけ放流し、流入量が一定量以上の場合は流入量から一定量を引いた分を放流する。ダム A, B, C の一定量はそれぞれ  $300, 450, 300 \text{ m}^3/\text{s}$  である。また、ダムが満杯になった場合 (ダムの貯水量が有効貯水容量に達した場合) は、緊急放流、すなわち、流入量と同じだけ放流する。ただし放流ゲートの物理的な制約から、設計洪水流量を超える量は放流できない。

洪水調整の目的を放流の原則を満たしつつ、下流河川の流量を小さくすることとし、目的関数を以下の式とした。

$$\text{Cost}(t) = \sum_i \left( \frac{Q_i(t)}{Q_{i \text{ design}}} \right)^2 + \sum_j \left( \frac{O_j(t) - O_j(t-1)}{O_j \text{ limit}(O_j(t))} \right)^2 \quad (1)$$

ただし  $Q_i$ : 水位計  $i$  における河川流量,  $Q_{i \text{ design}}$ : 水位計  $i$  における計画高水流量,  $O_j(t)$ : ダム  $j$  の放流量,  $O_j \text{ limit}$ : 放流の原則を 3 次式で近似した値 (図 1 近似曲線) である。

ダムの貯水量の離散化について、時間解像度を 1 時間と

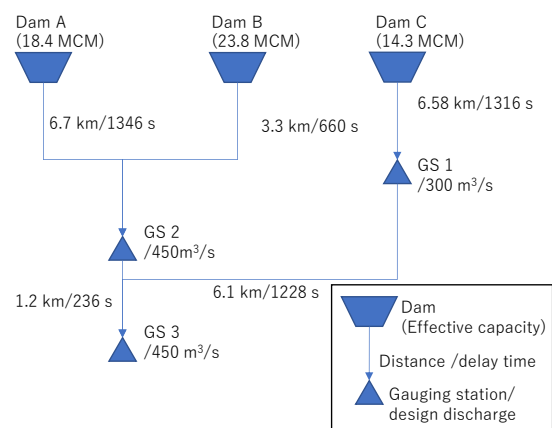


図 5 対象とするダム・河川ネットワーク構造

Figure 5 Network structure of target reservoirs and rivers

し、PDP のステップ 1 では 1 段階を貯水量 1 MCM (MCM=10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>) とした。これはダム放流量を 278 m<sup>3</sup>/s 単位で増減させることに相当する。PDP のステップ 2 を 8 回繰り返し、最終的に 1 段階を貯水量 1/256 MCM、ダム放流量を 1 m<sup>3</sup>/s 単位にした (解像度 1/256)。

制約条件として、ダムの貯水量に上下限值 (0 以上かつ有効貯水容量以下) を与えた。また、ダムが満杯になった場合のダム放流量は設計洪水流量以下、それ以外の場合は計画洪水調整流量以下とした。ダムの貯水量の初期値は洪水調整容量の空きがある状態 (常時満水位に相当) とした。

#### 4.2 ケース 1: 正弦波の流入量

ダム流入量時系列として、1 つのピークを持つ正弦波を、ピークをダムごとにずらして与えた。正弦波の周期を 48 時間とし、正の値のみとした。ピークは、ダム A、B、C それぞれに対し 600, 800, 600 m<sup>3</sup>/s である。放流計画の対象期間を 1.5 日とした。PDP により得られたダム貯水率・放流量時系列を図 6 に示す。PDP の結果では、いずれのダムにおいても、流入が始まる前から放流が始まった (事前放流)。

現行のダム操作規則通りに放流した場合のダム貯水率・放流量時系列を図 7 に示す。事前放流がなされず、いずれのダムも満杯になり、緊急放流により放流量が急増する。

ダム下流河川の流量を図 8 に示す。PDP の結果には、流量が最大となる最下流の水位計 GS3 においても明確なピークが見られない。最下流の水位計 GS3 において、ピーク流量は 905 m<sup>3</sup>/s であった。一方、操作規則通りの結果ではピーク流量 1537 m<sup>3</sup>/s が発生する。PDP によってピーク流量を 632 m<sup>3</sup>/s (41%) 下げること成功したといえる。PDP では、ダム C が 26 時間目以降放流量を増やし、28 時間目で 409 m<sup>3</sup>/s の放流を行った。その影響は水位計 GS1 に 29 時間目のピークとして現れるが、GS2 および GS3 にはピークが見られない。これは、ダム A が 27 時間目以降に放流量を減らしているためである。

対象期間 1.5 日の最適化に 191 秒を要した。計算機の仕様は、CPU: Intel Core i7-9700, メモリ: 32 GB であった。

#### 4.3 ケース 2: 過去の降雨をもとにした流入量

ケース 2 として、過去に観測された降雨時系列 5 事例をもとにした実験を行った。対象とする降雨イベントは、N 川流域に顕著な出水が観測された、2000 年以降の 6 つのイベントとした。ただし、これらの降雨イベントでは実際には水害が発生しなかった。そこでこれらの降雨イベントの降雨量を、この流域で年超過確率 1/100 の降雨量とされる量 (262 mm/9 時間) に相当するよう引き伸ばし、実際の降雨よりも強い降雨にした。降雨データとして気象庁解析雨量 (解像度: 空間 1 km, 時間 30 分) を用いた。降雨量をダム流入量にする際には、株式会社日立パワーソリューションズのソフトウェア製品 DioVISTA Flood の分布型流出モデルを用いた。放流計画の対象期間の開始時刻は、ダム流

入量が 200 m<sup>3</sup>/s を超える時刻の 24 時間前とした。対象期間の長さは、2 つの降雨ピークがある 1 イベントについては 4.5 日、それ以外は 2.5 日とした。

結果 (図示しない) によれば、操作規則通りに放流した場合、最下流の水位計 GS3 において、ピーク流量はおおむね 1,000 m<sup>3</sup>/s であった。一方、PDP による結果では、215~634 m<sup>3</sup>/s となり、ピーク流量を 40~79% 減らすことに成功した。また、いずれのダムにおいてもピーク流入量よりもピーク流出量の方が小さく、緊急放流を防ぐことができた。

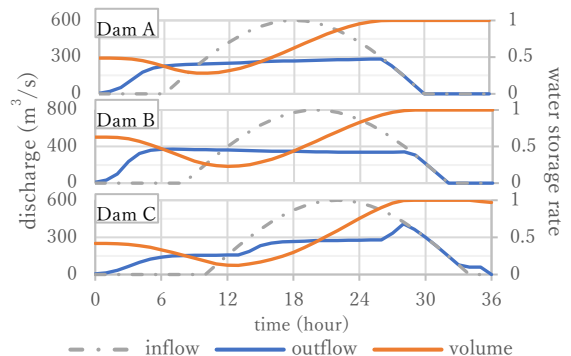


図 6 PDP によるダム貯水率・放流量時系列  
Figure 6 Reservoir discharge optimized by PDP

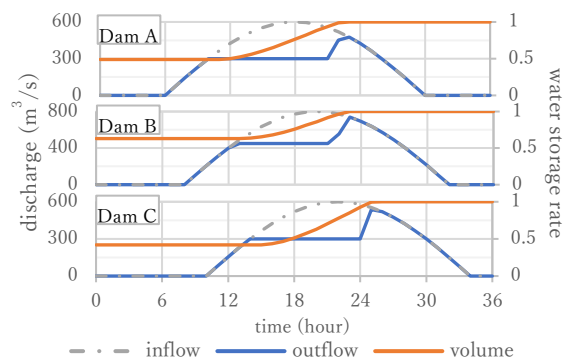


図 7 現行の操作規則によるダム貯水率・放流量時系列  
Figure 7 Reservoir discharge by rule

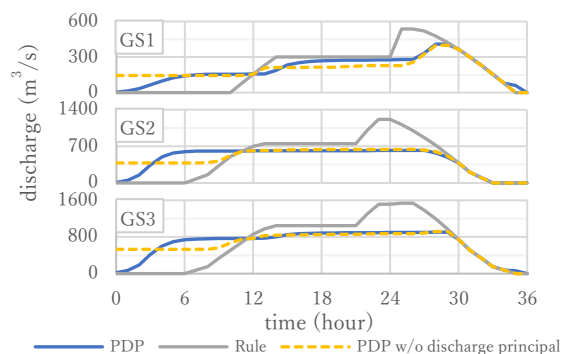


図 8 PDP によるダム下流河川の流量  
Figure 8 River discharge optimized by PDP

最適化に要した時間は最適化期間が 2.5 日の場合は 79 ~ 623 秒, 4.5 日の場合は 869 秒であった. 計算機の仕様はケース 1 と同じである.

## 5. 考察

放流の原則の効果を評価関数について考察する. 実験ケース 1 について, 評価関数から放流の原則 (式(1)第 2 項) を削除し, PDP で最適化した. 最下流の水位計 GS3 における流量を図 8 に示す. 時刻 0 から 531 m<sup>3</sup>/s の流量が観測され, 明確なピークが見られない. ピーク流量は放流の原則を有効にした場合とほぼ同じであり, 920 m<sup>3</sup>/s であった. しかし, 最適化の対象外である時刻 0 の前の時刻の放流量は 0 m<sup>3</sup>/s であることを考えると, 時刻 0 までの 1 時間で放流量を 531 m<sup>3</sup>/s 増加させることになる. 放流の原則を無視したこのような放流計画は許容されない. 実用上, 評価関数から放流の原則を削除することはできないといえる.

なお, 実験ケース 1 について, 放流の原則を制約条件とした場合, PDP で解を得ることはできなかった. PDP の初期は解像度が粗いため (278 m<sup>3</sup>/s 単位), 放流の原則を満たす解が存在しなかったと考えられる. また, 実用上の観点からも, 放流の原則を制約条件とすべきではない. 急激な豪雨など放流の原則を満たすことができない事態は実際に発生しているためである.

PDP の有効性を, DDDP との比較により考察する. 実験ケース 1 について, DDDP で最適化を行った. 最下流の水位計 GS3 における流量を図 9 に示す. 図示した解像度 1/64, 1/128, 1/256 のいずれの結果も, PDP よりもピーク流量が大きい. たとえば解像度 1/256 のピーク流量は 1025 m<sup>3</sup>/s であり, これは PDP のピーク流量 905 m<sup>3</sup>/s よりも 13% 大きい. 解像度 1/16, 1/32 の結果 (図示しない) も同様であり, ピーク流量はそれぞれ 980 m<sup>3</sup>/s, および 994 m<sup>3</sup>/s であった. PDP と DDDP とは異なる解に到達した. また, PDP の方がよい解を求めることができた.

PDP と DDDP とが, 異なる解に到達した原因を考察する. PDP, DDDP とともに繰り返し処理により局所解を漸進的に改善していく手法である. この繰り返し回数により評価関数の値が下がっていく過程を, 評価関数の第 1 項 (ダム下流の流量の小ささを評価) および第 2 項 (放流の原則を満たす程度を評価) に分けて図化した. PDP について図 10 に, DDDP (解像度 1/256) について図 11 に示す. PDP では, 解像度が細くなるごとに評価関数第 2 項に起因するコスト (放流の原則コスト) が急減する. 一方, 評価関数第 1 項に起因するコスト (河川流量コスト) はほぼ変わらないため, 放流の原則コストが全コストに占める割合は急減する. 解像度 1/4 まで, 同一の解像度において放流の原則コストはほぼ同一の値をとる. 解像度 1/32 以降, 放流の原則コストは小さくなり (5 以下), かつ変化が小さくなる. その間, 河川流量コストが徐々に下がっていく. 繰り返し

数 136 回で最適化が完了し, その時のコストは 172.7 であった. 一方, DDDP (解像度 1/256) では繰り返しの初期に放流の原則コストが急減する. 以降, 放流の原則コストと河川流量コストが徐々に下がっていく. 繰り返し数 480 回で最適化が完了し, その時のコストは 188.7 であった. PDP は, 繰り返しの初期は河川流量を減らす解を探し, その後は放流の原則を満たしつつ河川流量を減らす解を探す傾向がある. 一方, DDDP は, 繰り返しの初期は放流の原則を満たす解を探し, その後は放流の原則を満たしつつ河川流

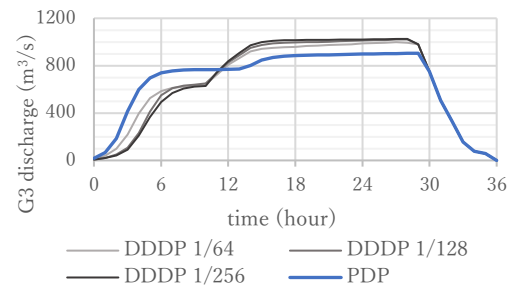


図 9 PDP による G3 の流量

Figure 9 G3 discharge optimized by PDP

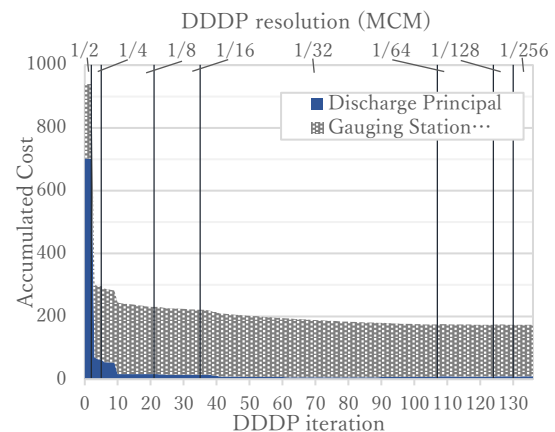


図 10 PDP のコストの推移

Figure 10 Cost transition curve of PDP

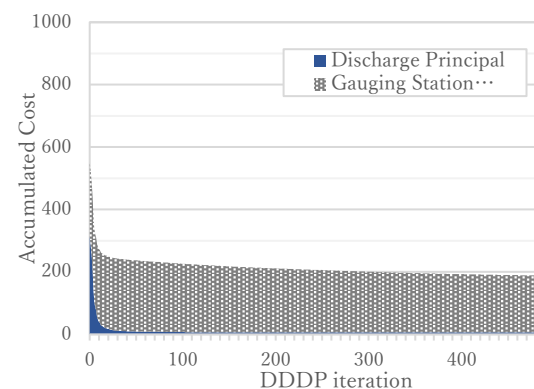


図 11 DDDP のコストの推移

Figure 11 Cost transition curve of DDDP

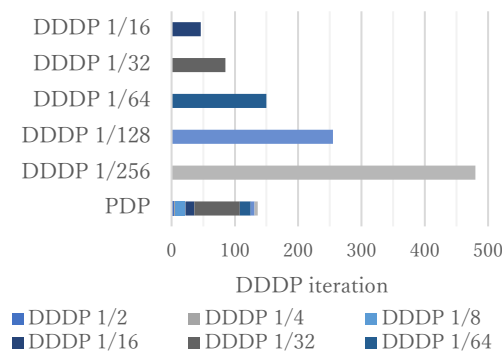


図 12 PDP の DDDP の反復回数

Figure 12 Number of DDDP iteration of PDP

量を減らす解を探す傾向がある。解像度が粗い場合、放流の原則コストを下げる選択肢は極めて少なく、全体のコストを下げるには河川流量コストを下げる必要がある。解像度が細かい場合、河川流量コストは少しずつしか変化しないため、事前放流の初期のように放流量の小さい時間帯で放流量を変化させることによる放流の原則コストの低下が、全体のコストに相対的に大きく影響する。河川流量コストを十分に下げる前に細かい解像度で解を探すと、全体最適とは大きく異なる解を見つけることになる。PDP は DDDP に比べ、放流の原則に起因する局所解を避け、大域解を見つける可能性が高い。

PDP と DDDP とで、繰り返し回数が異なる原因について考察する。図 12 に、DDDP および PDP の解像度ごとの繰り返し回数を示す。PDP については、各解像度における繰り返し回数を示す。いずれの解像度においても、PDP の繰り返し回数の方が同じか小さかった。DDDP は、繰り返しの初期から解像度が細かく、繰り返し回数 1 回で変更できる流量が小さいため、繰り返し回数が多いと考えられる。繰り返し回数と計算量とは比例関係にある。PDP は計算量の点で DDDP よりも有利であるといえる。

## 6. 結言

ダムの放流計画の自動作成のための数理最適化手法として、プログレッシブ動的計画法 (PDP) を提案する。水害の被害最小化のため、事前放流やダム群連携操作など、従来の操作規則とは異なるダム放流計画が求められている。事前放流では、ダム放流量を急激に変化させないことが重要である(「放流の原則」)。従来の動的計画法 (DP) やその近似解法である離散微分動的計画法 (DDDP) では、出力される放流量時系列の離散解像度が粗く、放流の原則が満たされないという課題があった。提案手法は、粗い解像度で DP を行い、続いてその近傍で、前回の 2 倍の解像度で DDDP を繰り返し実施する。これにより、初回の DP の  $2n$  倍の解像度を実現する。

N 川上流の 3 つのダムを対象にシミュレーション実験を行った。現在のダム操作規則では 3 ダムとも緊急放流に至るケースであっても、提案手法では緊急放流を避け、かつ下流河川のピーク流量を 41% 下げた。対象期間 1.5 日の最適化に要した時間は 191 秒であった。過去の降雨をもとにした年超過確率 1/100 の降雨に対しても、同様の放流計画を作成した。提案手法は有用なダムの放流計画を作成できたといえる。

提案手法は、繰り返しの初期は河川流量を減らす解を探し、その後は放流の原則を満たしつつ河川流量を減らす解を探すと考えられる。提案手法は DDDP に比べ、放流の原則に起因する局所解を避け大域解を見つける可能性が高い。

今後の課題として、予測誤差への対応が挙げられる。本研究では、流入量には誤差がないと仮定したが、実運用の際には降雨予測の誤差が無視できない。さらには、たとえば 10 個を超えるダムが連結されたような大規模な水系への適用、放流の原則と洪水調節に加え発電なども考慮したより多目的な目的関数への拡張なども求められる。こうした課題に応える数理最適化手法の開発が課題である。

## 参考文献

- [1] 国土交通省: 国土交通省気候変動を踏まえた治水計画に係る技術検討会, 気候変動を踏まえた治水計画のあり方 提言 (2019).
- [2] 首相官邸: 既存ダムの洪水調節機能の強化に向けた基本方針 (2019).
- [3] 井川智博: ダム群の洪水時統管指示操作の実施に向けた取り組み, 平成 24 年度国土交通省国土技術研究会 (2012).
- [4] 独立行政法人水資源機構 関西・吉野川支社 木津川ダム総合管理所: 平成 30 年度 比奈知ダム定期報告書 (2019).
- [5] Lin, N. M., and Rutten, M.: Optimal Operation of a network of multi-purpose reservoir: a review, *Procedia Engineering*, Vol.154, pp.1376-1384 (2016).
- [6] 野原大督, 坪井亜美, 堀智晴: 長期貯水池操作へのアンサンブル降水予報導入時における最適化モデルの放流決定過程に関する一考察, 京都大学防災研究所年報, Vo.52B, pp.753-764 (2009).
- [7] 川村一人, 中津川誠, 杉原幸樹: 気候変動による利水への影響を踏まえたダム貯水池群の最適操作に関する研究, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.68, No.4, pp.I\_1477-I\_1482 (2012).
- [8] 大江隆二, 小野宏昭, 川上万由佳: 貯水池の短期および長期運用支援システムの開発, エネルギー総研レビュー, No. 17, p. 20-23 (2009).
- [9] 佐山敬洋, 立川康人, 菅野浩樹, 寶馨: 分布型流出モデルと動的計画法の統合による貯水池制御最適化シミュレータの開発, 水工学論文集, Vol.54, pp.547-552 (2010).
- [10] Zhao, T., Cai, X., Lei, X., and Wang, H.: Improved dynamic programming for reservoir operation optimization with a concave objective function, *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol.138, No.6, pp.590-596 (2012).
- [11] Saadat, M. and Asghari, K.: Reliability Improved stochastic dynamic programming for reservoir operation optimization, *Water Resource Management*, Vol.31, pp.1795-1807 (2017).