

G-04

星形ナンプレの必要最少ヒント数

後藤 彬文 奥野 伊展 河島 来実 清水 麻衣

要旨

一般的な、 9×9 の正方形で構成されたナンバープレースの必要最少ヒント数は17個であると証明されているので、本研究では星形ナンプレの必要最少ヒント数を求める。まず、ヒント数が9個である星形ナンプレを発見した。次に、多数の完成盤面から3つの定理を発見して、その定理の証明を行った。その後、定理と制限盤面を用いた方法で、ヒント数8の盤面がないことの論理的に証明をすることで、星形ナンプレの必要最少ヒント数が9個であることを証明した。

1. 序論

通常の 9×9 のナンプレは、Gary McGuireにより、必要最少ヒント数は17個であることが証明されている。その一例が図1である。しかし、ナンプレには様々なルールを付け加えたものも存在しているのである。本研究では、図2で示されているような、星形ナンプレの必要最少ヒント数について調べた。

1	3				4			
	7		9 8					
				1	3			
	8							2
6 9								8
5				4				
			2				7	

図1 通常ナンプレ 例

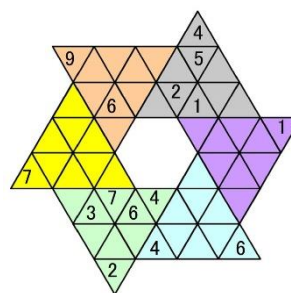


図2 星形ナンプレ 例

2. 基礎

2.1 星形ナンプレのルール

星形ナンプレは、横の列、右斜めの列、左斜めの列、9個の三角形のマスからなる大三角形のブロックに1~9の整数を重複せず入れる。ただし、中央の空間は無視する。

図3の赤線は横の列を、図4の赤線は右斜めの列を、図5の赤線は左斜めの列を表す。また、マスが同色のグループはブロックを表す。

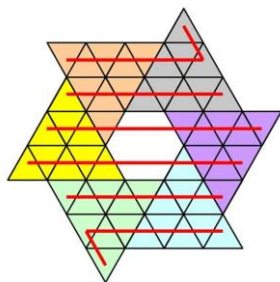


図3 横

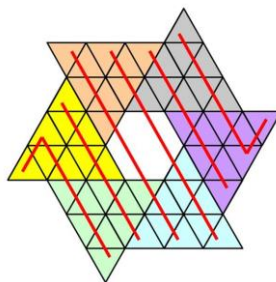


図4 右斜め

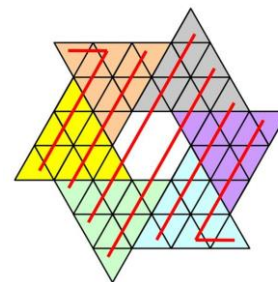


図5 左斜め

2.2 基本用語

本研究において、以下のように単語を定義した。

星形ナンプレ

5 4 マスの正三角形で構成された星形のナンバープレース。

マス

1 つの数字が入る、星形ナンプレで最も小さい三角形。

列

横 9 マス、右斜め 9 マス、左斜め 9 マスのそれぞれのこと。

ブロック

1 辺が 3 の同色の正三角形にある 9 マスのこと。盤面に 6 つ存在する。

ヒント

各盤面に最初から配置されている数字。

完成盤面

すべてのマスに数字が入っていて、かつ星形ナンプレのルールを満たす盤面。

図 6 も完成盤面の一つである。

問題盤面

完成盤面を たった 1 つしか作成できない盤面(図 7)

置換

盤面の 2 種の数字をすべて入れ替えること。

図 8 と図 9 は {7, 9} を置換している。

探索

盤面が問題盤面か確かめること。

本質的同一盤面

盤面の回転や置換により他の盤面と一致する盤面

3. 研究手法

※前段階として、作成した全自動プログラムでヒント数 9 の盤面を作成した。

1. 盤面の観察から、定理を発見する。
2. ヒント数 8 以下の盤面については、問題盤面でないことの論理的証明を行う。

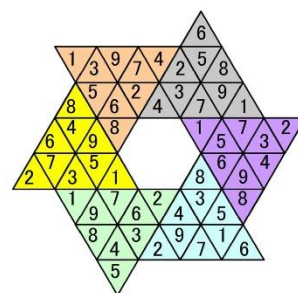


図 6 完成盤面

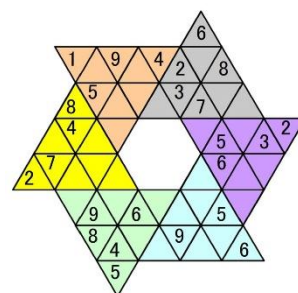


図 7 問題盤面

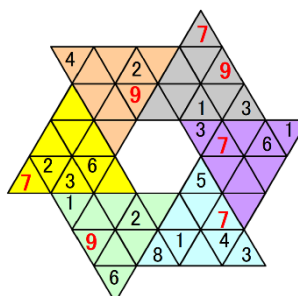


図 8 置換前

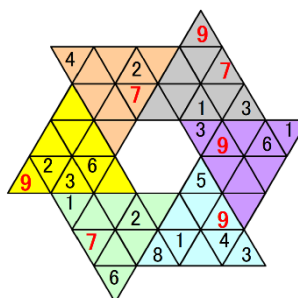


図 9 置換後

4. 研究結果

4.1 星形ナンプレの定理

(1) 定理 1

1) 定理 1 の概要

図 1 0 の同色マスは必ず同じ数字が入る。

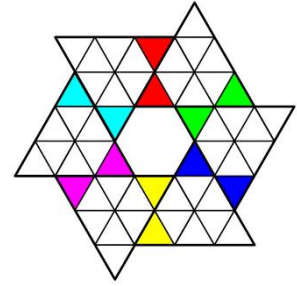


図 1 0 定理 1 該当箇所

2) 定理 1 の証明

まず、図 1 1 の紫マスが示す左下 4 マスの集合を [A] とする。すると、列とブロックから図 1 1 が示す、[A] 以外の数字の入る、図 1 1 の黄色マスが示す集合 [B] を定めることが出来る。右下のブロックを見ると、ブロックから図 1 1 の青枠部分に [A] が入ることがわかる。また列から、図 1 1 の赤枠部分にも [A] が入ることがわかる。このことから、橙色斜線部分が重なっているため、重なっていない緑色斜線部分に同じ数字が入る。これは回転させても成り立つため、他の 6 か所でも成り立つ。

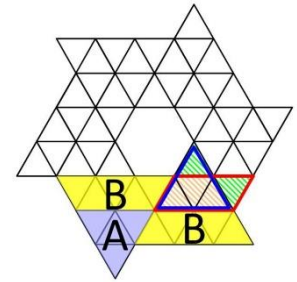


図 1 1 定理 1 証明

(2) 定理 2

1) 定理 2 の概要

図 1 2 で同じ色で指定されている 2 マスについて、必ずそのどちらかには、ヒントが入る。また、この同色の 2 マスの数字を入れ替えた盤面も完成盤面となるため、端を入れ替えた盤面も、もとの盤面と本質的同一盤面であると新たに定義する。

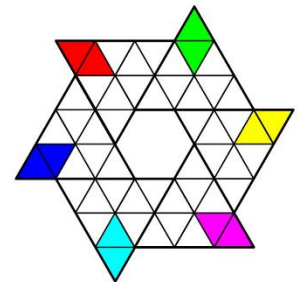


図 1 2 定理 2 該当箇所

2) 定理 2 の証明

完成盤面(図 1 3)で右下の端にある赤文字の {8, 9} について、その二つのマスを入れ替えたもの(図 1 4)も、別の完成盤面として成り立つ。つまり、このどちらかにヒントが入っていない盤面(図 1 5)は、完成盤面が 2 つ以上存在することになり、問題盤面にはならないため、この定理が成り立つ。

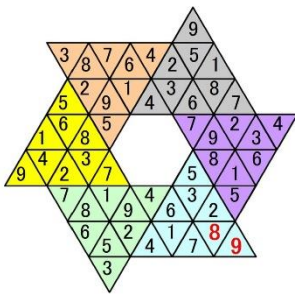


図 1 3 完成盤面

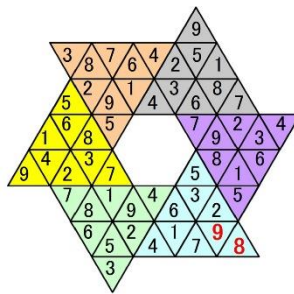


図 1 4 右下を入れ替えた盤面

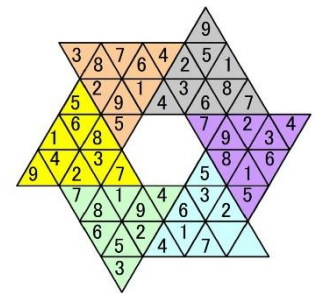


図 1 5 定理 2 を満たさない盤面

(3) 定理 3

1) 定理 3 の概要

ある完成盤面のうちの 4 マスが、それぞれの列、ブロックに 2 マスずつ含まれていて、その 4 マスに入っている数字が 2 種である場合、その 4 マス内の数字を入れ替えた盤面は、完成盤面であり元の盤面と本質的に異なる盤面となる。

2) 定理 3 の証明

上記した 4 マスの条件を満たしている場所を図 1 6 のように選択し、2 種の数字を A、B としてマスに入力する。この時、図 1 6 に表示されている列、ブロックはすべて A、B が入っていることになる。そして A と B を入れ替えるが、このとき A、B が既に入っている列、ブロックは元の盤面と一致するため、A、B の入れ替えによる完成盤面の変化はその 2 マス 2 組にとどまる。また、入れ替えた完成盤面は、置換、盤面の回転、定理 2 による端の入れ替えによる元の盤面との一致はできないため、本定理が成り立つ。

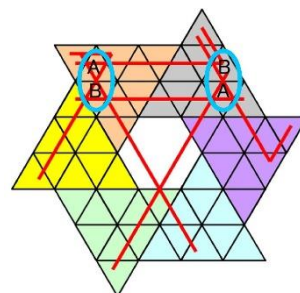


図 1 6 定理 3 証明

3) 定理 3 の使用

ある完成盤面に、[4 マスが、それぞれの列、ブロックに 2 マスずつ含まれる]という条件を満たす場所がある場合(図 1 7)、その 4 マスは入れ替えられるため、新たな問題盤面の作成(図 1 8)ができる。

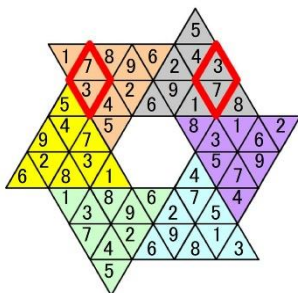


図 1 7

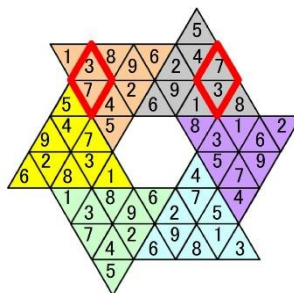


図 1 8

4.2 ヒント数の探索

(1) ヒント数 9 の盤面

ヒント数 9 の盤面は Microsoft の Excel 内蔵の VBA (Visual Basic for Application) を用いて、ヒント数 9 の問題盤面である図 1 9 の作成ができた。本研究では全自動プログラムの作成はヒント数 9 の問題盤面の作成にしか関係していないため、本論文ではプログラムの詳細については省略する。

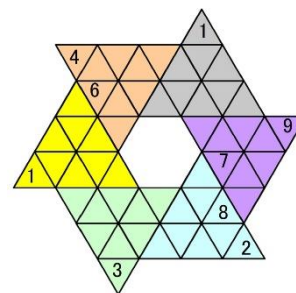


図 1 9 ヒント数 9 の盤面

(2) ヒント数7以下の盤面

1) 概要

ヒント数が7以下の問題盤面の証明のために、ヒントに使用されている数字の種類が7種以下である盤面の証明をおこなう。

2) 証明

図20はヒントに{8, 9}が使用されていない盤面である。この時、図20は完成盤面を、図21と図22の2種類作成できる。また図21と図22は{8, 9}が入れ替わっているだけの本質的同一盤面である。よって、図20はある完成盤面(図21)と、ヒントに含まなかった{8, 9}を入れ替えた完成盤面(図22)を持つため、図20は問題盤面ではない。ヒントに使用されている数字の種類が7種以下であるほかの盤面についても、同じことがいえる。

3) 結果

ヒントに使用されている数字の種類が7種以下である盤面に問題盤面となるものはなかった。よって、ヒントに7種以下の数字しか使用できないヒント数7以下の問題盤面はない。

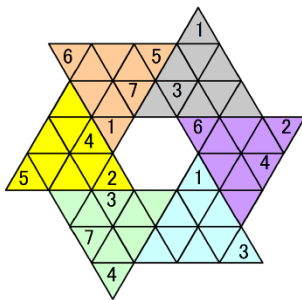


図 2 0

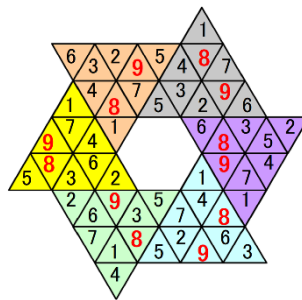


図 2 1

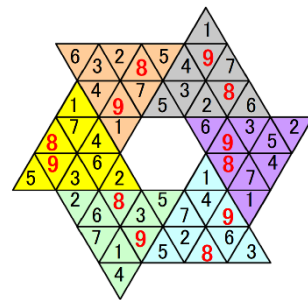


図 2 2

(3) ヒント数8の盘面

1) 探索盘面個数の設定

ヒント数8の盘面については、本質的同一盘面の考えから、探索盘面数を減らすことが出来る。

- 置換により、ヒントを1から8の数字に固定する。
- 定理2と置換から、端に入る数字を図23のように固定する。
- 盘面の回転と置換から、{7、8}が入るマスを図24のように指定する。

この時、青斜線部分に{7}、赤枠内部に{8}が入る。

- 定理1から同じ数字になるところは片方のみ調べる。

このように固定すると、探索盘面数は最多でも168通りである。

$${}_7C_2 + 7 \times (8 \times 3 - 3) = 168$$

(-3は定理1による重複箇所の削減)

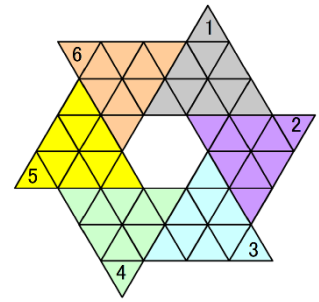


図 2 3

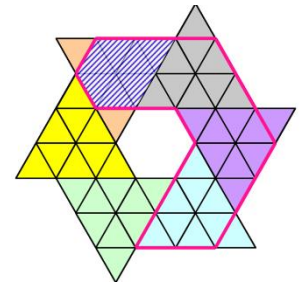


図 2 4

2) 制限盘面の作成

探索盘面数を168通りまで絞ったので、そのすべてのパターンの探索のために、制限盘面を作成する。図25は定理3を利用した制限盘面である。この盘面では置換や定理3による入れ替えがない限り、[A]には{1、4、7}、[B]には{2、5、8}、[C]には{3、6、9}のみ入れることが出来るとする。

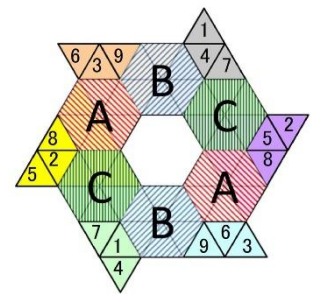


図 2 5

3) 制限盘面を用いた証明の流れ

- 証明したいヒント数8の盘面を決める。
- 制限盘面で証明したい盘面で、{7}と{8}が入っているマスに、定理3を用いた数字の入れ替えや置換を駆使して{7、8}の2つ(重複不可)を移動させる。
- 盘面にまだ定理3による数字の入れ替えで完成盘面が複数個作成できる場所があった場合、その盘面が問題盘面でないことがいえる。
- 問題盘面でない盘面からヒントを減らした盘面も、問題盘面にならないことから証明する。

4) 制限盘面の使用例

図26の盘面が問題盘面にならないことを証明する。まず、図27のように[B]のなかにある証明したいマスに{8}を入れる。この時、左上のブロック内で[B]の六角形内で{8}が入られるマスが、{8}と対面しているマスにしかないため、そのマスに{8}をいれなければならない(図27の{8})。{7}も同じようにしたいが、その場所には既に{3}が入っているので、定理3の数字の入れ替えを使うことを考える。定理3の数字の入れ替えを使うため、図27の赤枠で示している場所に{7、3}を入れる。こちらも前述の{8}同様、{3、7}がその場所にしか入らないことから、図27の緑枠部分にも{3、7}がそれぞれ入る。そして、定理3の数字の入れ替えを行

うことで、図 2 8 のように {7} が望んだ場所に移動した。

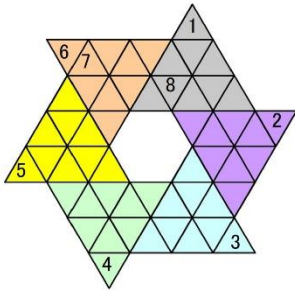


図 2 6

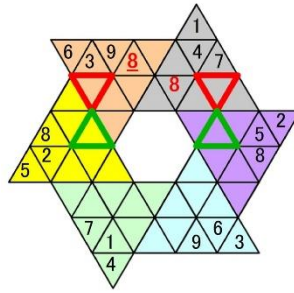


図 2 7

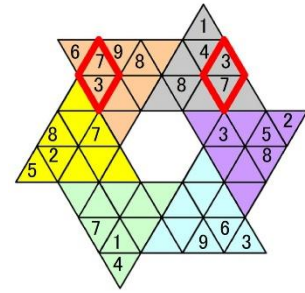


図 2 8

図 2 8 の盤面はまだ [A、B、C] が残っているため、定理 3 による数字の入れ替えで完成盤面が複数個作成できる場所が残っているから、図 2 8 のヒント数 2 4 の盤面は問題盤面ではない。このことから、図 2 8 の盤面からヒントを減らした図 2 6 の盤面は問題盤面ではないことが示される。

5) 制限盤面の利点

制限盤面は範囲で入る数字を指定できるため、同時にたくさんのパターンの探索ができる。図 2 9 の状態でも、左上の [A] に {7}、上か下の [B] に {8} を入れても必ずほかの部分に、定理 3 による数字の入れ替えで完成盤面が複数個作成できる場所が存在するため、左上の [A] に入る {7} のうち図 2 4 で示した範囲内のマス数 3 と、上か下の [B] に入る {8} のうち、図 2 4 で示した範囲内のマス 9 との積である 2 7 種の盤面が問題盤面でないことが示される。また置換から [A と C][B と C] でも同じことが出来るため、この状態で以下の盤面数の探索ができる。

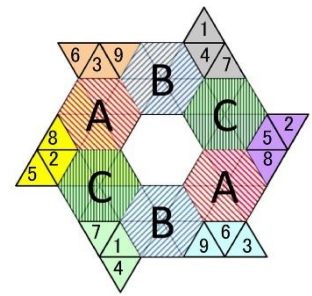


図 2 9 制限盤面

$$[A \text{ と } B] 3 \times (6 + 3) = 27$$

$$[A \text{ と } C] 3 \times (6 - 1) = 15 \quad (-1 \text{ は定理 1 による重複箇所の削減})$$

$$[B \text{ と } C] 3 \times (6 - 1) = 15 \quad (\quad \quad \quad " \quad \quad \quad)$$

$$\therefore 27 + 15 + 15 = 57$$

図 2 7 から、57 種のヒント数 8 の盤面が問題盤面でないことが示される。

6) 制限盤面の探索結果

168 種中、167 種については上記の方法で問題盤面でないことが示された。残りの一種(図 3 0)については上記の方法での証明が不可能だと判断したため、図 3 1 の盤面を作成した。この盤面は定理 3 による数字の入れ替えで完成盤面が複数個作成できる場所が赤枠で囲まれている場所にあるため、問題盤面ではない。また、図 3 1 は、図 3 0 の盤面からヒントを増やして作成された盤面であるため、図 3 0 も問題盤面でないことが示される。

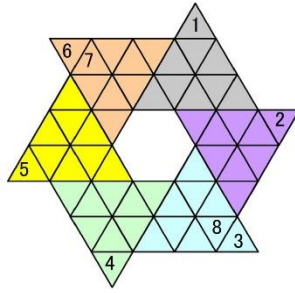


図 3 0

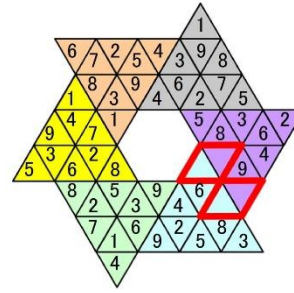


図 3 1

7) 結果

ヒント数 8 の盤面には、問題盤面であるものはなかった。

5. 結果

ヒント数 9 の問題盤面は発見した。また、ヒント数 8 以下の問題盤面はないことが分かった。

6. 結論

本研究では、星形ナンプレの必要最少ヒント数が 9 個であることを証明した。

7. 展望

プログラムを用いて作成したヒント数 9 の盤面が完成盤面を 1 個しか持たず、問題盤面であることは確認できたが、使用したプログラムのアルゴリズム正当性の証明はできていない。今後は、その証明に取り組んでいきたい。

8. 謝辞

関西学院大学 学長補佐 理工学部教授・博士（情報学） 巳波 弘佳 先生

本研究をまとめるにあたり、アドバイスをいただきました。この場をお借りして感謝申し上げます。

9. 参考文献

井上真大, 奥乃博, "本質的に異なる数独解盤面の列挙と番号付け," 情報処理学会全国大会講演論文集, Vol. 71, No. 4, pp. 4. 741-4. 742, 2009.

Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario, "There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem ", arXiv:1201.0749v2, 2013.