デフォルト推論を行う知識情報処理システムにおける知識の統合について

村上 研二　　相原 恒博

愛媛大学　　工学部

知識情報処理システムに「常識による推論」や「不完全な知識からの推論」などのより高度な情報処理能力を与えようとする試みがある．Reiterはこのような試みの一つとしてデフォルト推論を提案した．このデフォルト推論は従来の一階述語論理にデフォルト式なる推論規則を導入し，不完全な知識のもとでの推論を可能にしたもので，不完全な知識に関する非単調推論の中で現時点で最も実用的なものである．Reiterはデフォルト推論により推論される知識の集合を拡張世界と定義し，その性質を明らかにしている．本稿では，デフォルト推論を行う複数の異なる知識情報処理システムを考え，これらのシステムが互いに知識のやり取りをしながら構築する知識の集合を相互拡張世界と呼びこれを定式化する．また，この相互拡張世界の持つ性質を明らかにする．この相互拡張世界の概念は，異なる知識（常識）を持った複数のエージェントが互いに会話しながらそれぞれ推論を行い，その結果獲得する知識の集合に相当するものである．比較的小さな規模の知識情報処理システムを複数個結合し，それぞれの知識ベースを改変してゆくことは，これらのシステムを統合化し，総合的な知識情報処理システムを構成する上で極めて重要である．本稿で検討する相互拡張世界の概念はこのような場合に有用であると思われる．

Consolidation of Knowledge Bases in Default Reasoning

Kenji MURAKAMI and Tsunehiro AIBARA

Department of Electronics Engineering, Ehime University

Bunkyou-cho 3, Matsuyama, 790, Japan

A new set of beliefs in Reiter's default reasoning system called interactive extension is introduced and its properties are discussed.

It is well known that traditional logical reasoning is always monotonic, i.e., the set of theorems increases monotonically with the set of axioms. R.Reiter proposed a default logic as a means for drawing conclusions based on incomplete axioms. Since such plausible conclusions can be invalidated when this partial world description is supplemented by new information, the logic is called nonmonotonic logic. Nonmonotonic reasoning based on the logic is suitable for commonsense reasoning or incomplete knowledge reasoning in knowledge information processing systems.

In this report a model which describes the behavior of many default reasoning systems and their interactions is considered. In the model, each system has a set of beliefs finally which are obtained by the default reasoning in its system and the provision from the other systems. The proposed interactive extension is the set of beliefs which does not conflict with those of other systems'. When a large scale knowledge processing system (default reasoning system) is constructed by combining the small scale systems, it is necessary to analyze the interactive extension of the systems.

1．まえがき

現在の知識情報処理システムにおいて最もよく用いられる知識表現のモデルとして，プロダクションルール，フレーム，セマンティックネットワーク，形式論理などがある．中でも，形式論理は理論的に体系化された唯一の知識表現モデルであることから特に重要であると思われる．この形式論理では現在のところ主に命題論理と述語論理（多くの場合，一階述語論理）が用いられている．これらの論理は，「新しい公理（知識）を追加したとき，導出される定理の集合は少なくとも減少はしない」という性質をもつことから単調論理と呼ばれる．すなわち，この単調論理では公理の集合A，Bから導出される定理の集合をそれぞれTh(A)，Th(B)とすると，A⊆BならばTh(A)⊆Th(B)なる関係が成立する．したがって，新しい知識の追加に対して既存の知識との間の矛盾を調べる必要がないこと，証明の手順を記憶する必要のないことなど実用上の大きな利点が生ずる．しかしながら，この単調論理に基づくシステムではシステムのもっている知識の範囲内での推論能力しかもち得ないため，その問題解決能力を向上させるには知識の量を増加させる以外に方法はなく，必要な知識（問題領域のすべてをカバーする完全な知識）をすべて集めることが一般には困難であることを考えると，この単調論理のみで知識情報処理システムを構成することには限界があると思われる．

ところで，人間が行っているような常識による推論や不完全な知識による推論では，人間がその時点でもっている知識以上の結論を導き出すことができると考えられる．これはある時点で推論を行うのに十分な知識が無ければ，とりあえず常識的な知識を用いて推論を進めておき，後に常識的知識を否定するような新しい知識が与えられれば，この推論結果を取り消すといった柔軟性のある推論を行っているためであると考えられる．このような推論を可能とする論理は先の単調論理に対して非単調論理と呼ばれる．すなわち，非単調論理では「新しい公理（知識）が追加されたとき，それまでに導出された定理が成り立たなくなることがある」ということを認める．

この非単調論理の定式化の一つとしてReiterはデフォルト推論（Default Reasoning）を提案した[1]．このデフォルト推論は，常識的知識をデフォルト式と呼ばれる推論規則で表現している点に特色がある．デフォルト推論では，推論により最終的に得られる世界（命題論理式および一階述語論理式の集合）を拡張世界（extension ）と定義している．この拡張世界は，確定的知識の集合とデフォルト式の集合から推論される知識の集合と考えられ，デフォルト推論の種々の性質を知る上で最も重要な概念である．また，この拡張世界を介してデフォルト推論（デフォルト論理）と従来の一階述語論理との関係が議論される[2]-[4]．

ところで，実際に知識情報処理システムの構成を考える場合，比較的小さな規模の知識情報処理システムを複数個結合し，それぞれの知識ベースを改変してゆくことでこれらのシステムを統合化し，総合的な知識情報処理システムを構成することが考えられる．このような状況をデフォルト推論を行うシステムに関して考えると， Reiterが文献(1)で考察しているような，単一のデフォルト推論システムに対する動作解析だけでは不十分であり，複数個のデフォルト推論システムの動作の記述，各システム間での知識のやり取りの記述，その結果それぞれのシステムが最終的にもつであろう知識集合の記述などを行う必要が出てくる．

そこで本稿では，デフォルト推論を行う複数の異なる知識情報処理システムを考え，これらのシステムが互いに知識のやり取りをしながらデフォルト推論を行うモデルを考察する．そして，この結果構築されるそれぞれの知識集合を相互拡張世界と呼び定式化する．また，この相互拡張世界のもつ性質を明らかにする．この相互拡張世界の概念は，異なる知識（常識）をもった複数のエージェント（理想的な知的行為者）が互いに会話をしながらそれぞれ推論を行い，その結果それぞれのエージェントが獲得するであろう知識の集合を記述したものにもなっている．

2．デフォルト推論と拡張世界[1]

ここでは，本稿で必要となるReiterのデフォルト推論に関する主要な定義および定理（定理の証明については，参考文献(1)を参照）について述べる．

通常の一階述語論理式（well-formed formula, wff と略す）からなる一階述語の言語全体をLと表す．wffが自由変数を含まないときwffは閉じているという．

デフォルト式dを，d＝a：Mb／cで表す．ここで，a，b，cは閉じたwffである． デフォルト式dは，直観的には「aが成り立ち，かつbが充足可能（無矛盾，bの否定（￢b）が証明されない）ならば，cを推論する」ことを意味する．a，b，cをそれぞれ，前提（prerequisite），弁明（justification），帰結（consequent）と呼ぶ．a，b，cが閉じたwffであるとき，dを閉じたデフォルト式という．なお，Reiterは自由変数をもつwffを含めて デフォルト式を与えているが，自由変数を具体例（instance）で置き換えたときには閉じた場合と同様になるため，本稿では閉じた場合に限定して議論を行う．

デフォルト理論Aを，A＝(D，W)で表す．Dはデフォルト式の集合，Wは閉じたwffの集合である．

［定義2．1］（拡張世界） A＝(D，W)をデフォルト理論とする． S⊆Lなるwffの集合Sに対して，Γ(S)を次の条件D１－D３を満たす最小の集合とする．

D１．W⊆Γ(S)

D２．Th(Γ(S))＝Γ(S)

D３．a：Mb／c∈D，a∈Γ(S)，￢b∉S ならば c∈Γ(S)

このとき， Γ(E)＝Eを満たすwffの集合Eをデフォルト理論A＝(D，W)の拡張世界と定義する．

［定理2．1］ EをE⊆Lなるwffの集合，A＝(D，W)をデフォルト理論とする．

E_0＝W

とし，0≦iなるiに対して，

$E_{i+1}=Th(E_i)\cup\{c \mid a: Mb/c\in D, a\in E_i, \neg b\notin E\}$

とする．このとき，EがAの拡張世界であるための必要十分条件は，$E=\cup_{i=0}^{\infty}E_i$が成立することである．

［定義2．2］ デフォルト理論A＝(D, W)の拡張世界をEとする．このとき，Eに対する生成デフォルト式（generating default）の集合 GD(E, A)を次のように定義する．

$GD(E,A)=\{a: Mb/c\in D \mid a\in E, \neg b\notin E\}$

［定義2．3］Dをデフォルト式の集合とする．このとき，デフォルト式の帰結の集合 CONSEQUENTS(D)を次のように定義する．

$CONSEQUENTS(D)=\{c \mid a: Mb/c\in D\}$

［定理2．2］ Eをデフォルト理論A＝(D, W)の拡張世界とすれば，次の関係が成立する．

$E=Th(W\cup CONSEQUENTS(GD(E,A)))$

［定理2．3］ デフォルト理論A＝(D, W)が充足不能な拡張世界をもつ必要十分条件は，Wが充足不能であることである．

［定理2．4］ デフォルト理論A＝(D, W)が充足不能な拡張世界をもてば，それは唯一の拡張世界である．

［定理2．5］ EおよびE'がともにデフォルト理論A＝(D, W)の拡張世界であり，E⊆E'であれば，E＝E'である．

ところで，一般のデフォルト理論に対しては拡張世界の存在は保証されない．そこで，拡張世界の存在が保証されるデフォルト理論を次に定義する．

［定義2．4］a：Mb／bの形のデフォルト式を正規デフォルト式と定義する．

デフォルト理論A＝(D, W) において，Dに含まれるデフォルト式がすべて正規デフォルト式であるとき，Aを正規デフォルト理論と呼ぶ．

［定理2．6］正規デフォルト理論A＝(D, W)は 少なくとも1つの拡張世界をもつ．

［定理2．7］DおよびD'をD'⊆Dなる関係をもつ正規デフォルト式の集合とし， E'を正規デフォルト理論A'＝(D', W)に対する拡張世界の1つとする．すると正規デフォルト理論A＝(D, W)は，E'⊆Eなる拡張世界Eをもつ．

［定理2．8］正規デフォルト理論A＝(D, W) が異なる拡張世界E，E'をもてば，E∪E'は充足不能である．

3．相互拡張世界

複数のデフォルト理論（知識情報処理システム）が与えられ，これらの間で知識のやり取りが行われるものとする．このとき，デフォルト推論によりそれぞれのシステムが最終的にもち得る知識集合の組を相互拡張世界（interactive extension）と呼ぶ[5],[6]．この場合，やり取りする知識集合の条件により，得られる相互拡張世界の性質は異なる．本稿ではこの条件を定義3．1のように設定した場合の相互拡張世界の性質を議論する．なお，簡単のためここでは考察するデフォルト理論の個数は2個と仮定する．

［定義3．1］（相互拡張世界）$A_1=(D_1,W_1)$および$A_2=(D_2,W_2)$をデフォルト理論とする． wffの集合S^1，S^2に対して，$\Gamma(S^1)$，$\Gamma(S^2)$を次のD1からD4の条件を満たす最小の集合とする．

D1． $W_1\subseteq\Gamma(S^1)$
　　$W_2\subseteq\Gamma(S^2)$

D2． $Th(\Gamma(S^1))=\Gamma(S^1)$
　　$Th(\Gamma(S^2))=\Gamma(S^2)$

D3． $a: Mb/c\in D_1$，$a\in\Gamma(S^1)$，$\neg b\notin S^1$ ならば $c\in\Gamma(S^1)$
　　$a: Mb/c\in D_2$，$a\in\Gamma(S^2)$，$\neg b\notin S^2$ ならば $c\in\Gamma(S^2)$

D4． $g\in\Gamma(S^2)$，$\neg g\notin S^1$ ならば $g\in\Gamma(S^1)$
　　$g\in\Gamma(S^1)$，$\neg g\notin S^2$ ならば $g\in\Gamma(S^2)$

このとき，$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$を同時に満たすwffの集合E^1，E^2の組を A_1，A_2の相互拡張世界と定義する．

すなわち，E^1，E^2はともに演算子Γの最小不動点である． 条件D3におけるwffの集合｛c｝はデフォルト推論により各システムが得る知識の集合を表し，条件D4におけるwffの集合｛g｝は 相手のシステムとの知識のやり取りにより各システムが獲得する知識の集合を表す．特に，条件D4はReiterの拡張世界の定義には無い新しい条件で，相手が最終的にもつであろう知識集合に含まれ，かつ，自分が最終的にもつであろう知識集合に矛盾しない知識は相手から受け取ることを表す．

相互拡張世界の例を次に示す．ここで，p，q，r などの文字は命題論理式を表すものとする．

［例題3．1］ $A_1=(D_1,W_1)=(\{p: Mq/r, r: Ms/t, v: Mw/x\},\{p\})$，$A_2=(D_2,W_2)=(\{u: M\neg t/\neg t, \neg t: Mu/v, t: My/z\},\{u\})$とする．このとき，相互拡張世界は，$E^1=Th(\{p,r,t,u,v,x\})$, $E^2=Th(\{u,\neg t,v,p,r,x\})$の組と$E^1=E^2=Th(\{p,u,r,t,z\})$の組の2組存在する．なお，$A_1$，$A_2$の拡張世界はそれぞれ$Th(\{p,r,t\})$，$Th(\{u,\neg t,v\})$であり，$A_1\cup A_2$の拡張世界は$Th(\{p,u,r,t,z\})$である．

このように，一般に相互拡張世界は A_1，A_2，$A_1\cup A_2$の拡張世界とは異なったものになる．

4．相互拡張世界の諸性質

ここでは相互拡張世界のもつ性質について述べる．

［定理4．1］2つのデフォルト理論$A_1=(D_1,W_1)$，$A_2=(D_2,W_2)$において，

$E^1_0=W_1$

$E^2_0=W_2$

とし，0≦iなるiに対して，

$E^1_{i+1}=Th(E^1_i)\cup\{c \mid a: Mb/c\in D_1, a\in E^1_i, \neg b\notin E^1\}\cup G^2_i$

$E^2_{i+1}=Th(E^2_i)\cup\{c \mid a: Mb/c\in D_2, a\in E^2_i, \neg b\notin E^2\}\cup G^1_i$

$G^1_i=\{g \mid g\in E^1_i, \neg g\notin E^2\}$

$G^2_i=\{g \mid g\in E^2_i, \neg g\notin E^1\}$

とする．このとき，wffの集合E^1，E^2の組がデフォルト理論A_1，A_2の相互拡張世界となるための必要十分条件は

$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$

$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$

が同時に成立することである．

（証明）

$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$が次のD1'からD4'の関係を満たすことは明かである．

D1'. $W_1 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$

$W_2 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$

D2'. $Th(\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$

$Th(\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$

D3'. $a : Mb / c \in D_1, a \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i, \neg b \notin E^1$ ならば $c \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$

$a : Mb / c \in D_2, a \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i, \neg b \notin E^2$ ならば $c \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$

D4'. $g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i, \neg g \notin E^1$ ならば$g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$

$g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i, \neg g \notin E^2$ ならば$g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$

一方，$\Gamma(E^1)$，$\Gamma(E^2)$は上記の関係を満たすwffの集合の中で最小の集合であるから，次の関係が成立している．

$$\Gamma(E^1) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i \qquad (1)$$

$$\Gamma(E^2) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i \qquad (2)$$

この式(1)，(2)の関係を用いて以下の証明を行う．

<必要性の証明>

E^1，E^2の組がA_1，A_2の相互拡張世界であるとき（すなわち，$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$のとき），$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であることを示す．

すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq E^1$，$E^2_i \subseteq E^2$であることを帰納法で証明する．

$i=0$のとき，$E^1_0 = W_1 \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_0 = W_2 \subseteq \Gamma(E^2)$であり，$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$なる仮定より，$E^1_0 \subseteq E^1$，$E^2_0 \subseteq E^2$である．

次に，$E^1_k \subseteq E^1$，$E^2_k \subseteq E^2$を仮定して，$E^1_{k+1} \subseteq E^1$，$E^2_{k+1} \subseteq E^2$を導く．

1）$E^1_{k+1} \subseteq E^1$を示す．

$p \in E^1_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p \in Th(E^1_k)$である，②$a : Mb / p \in D_1$，$a \in E^1_k$，$\neg b \notin E^1$ なるデフォルト式が少なくとも一つ存在する，③$p \in E^2_k$，$\neg p \notin E^1$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合，$E^1_k \subseteq E^1$ なる仮定より，$p \in Th(E^1) = E^1$である．

②の場合，$E^1_k \subseteq E^1$，$E^1 = \Gamma(E^1)$ なる仮定より，$a : Mb / p \in D_1$，$a \in E^1_k$，$\neg b \notin E^1$なるデフォルト式$a : Mb / p$に対して，$a \in E^1 = \Gamma(E^1)$でもあるから，条件D3より，$p \in \Gamma(E^1) = E^1$である．

③の場合，$E^2_k \subseteq E^2$，$E^2 = \Gamma(E^2)$ なる仮定より，$p \in E^2_k$，$\neg p \notin E^1$であれば，$p \in E^2 = \Gamma(E^2)$，$\neg p \notin E^1$でもあるから，条件D4より，$p \in \Gamma(E^1) = E^1$である．

以上の①，②，③より，$E^1_{k+1} \subseteq E^1$が示された．

2）$E^2_{k+1} \subseteq E^2$ についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq E^1$，$E^2_i \subseteq E^2$である．

ところで，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq E^1$，$E^2_i \subseteq E^2$ であれば，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i \subseteq E^1$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i \subseteq E^2$である．したがって，式(1)，式(2)の関係および$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$なる仮定より，$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$が成り立つ．

<十分性の証明>

$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であるとき，$E^1$，$E^2$の組は$A_1$，$A_2$の相互拡張世界であること（すなわち，$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$）を示す．

すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_i \subseteq \Gamma(E^2)$であることを帰納法で証明する．

$i=0$のとき，条件D1より，$E^1_0 = W_1 \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_0 = W_2 \subseteq \Gamma(E^2)$である．

次に，$E^1_k \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_k \subseteq \Gamma(E^2)$を仮定して，$E^1_{k+1} \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_{k+1} \subseteq \Gamma(E^2)$を導く．

1）$E^1_{k+1} \subseteq \Gamma(E^1)$を示す．

$p \in E^1_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p \in Th(E^1_k)$である，②$a : Mb / p \in D_1$，$a \in E^1_k$，$\neg b \notin E^1$ なるデフォルト式が少なくとも一つ存在する，③$p \in E^2_k$，$\neg p \notin E^1$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合，$E^1_k \subseteq \Gamma(E^1)$なる仮定より，$p \in Th(\Gamma(E^1)) = \Gamma(E^1)$である．

②の場合，$E^1_k \subseteq \Gamma(E^1)$なる仮定より，$a : Mb / p \in D_1$，$a \in E^1_k$，$\neg b \notin E^1$ なるデフォルト式$a : Mb / p$に対して，$a \in \Gamma(E^1)$ でもあるから，条件D3より，$p \in \Gamma(E^1)$である．

③の場合，$E^2_k \subseteq \Gamma(E^2)$ なる仮定より，$p \in E^2_k$，$\neg p \notin E^1$であれば，$p \in \Gamma(E^2)$，$\neg p \notin E^1$ でもあるから，条件D4より，$p \in \Gamma(E^1)$である．

以上の①，②，③より，$E^1_{k+1} \subseteq \Gamma(E^1)$ が示された．

2）$E^2_{k+1} \subseteq \Gamma(E^2)$ についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_i \subseteq \Gamma(E^2)$である．

ところで，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i \subseteq \Gamma(E^1)$，$E^2_i \subseteq \Gamma(E^2)$であれば，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i \subseteq \Gamma(E^1)$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i \subseteq \Gamma(E^2)$である．したがって，式(1)，式(2)の関係および$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$なる仮定より，$\Gamma(E^1)=E^1$，$\Gamma(E^2)=E^2$が成り立つ．■

この定理は拡張世界の定理2．1に相当するもので，wffの集合E^1，E^2 がデフォルト理論A_1，A_2の相互拡張世界であるか否かの判定に用いられる．

［定理4．2］ E^1，E^2の組をデフォルト理論$A_1 = (D_1, W_1)$，$A_2 = (D_2, W_2)$の相互拡張世界とすれば，E^1，E^2は次のように表される．

$E^1 = Th(W_1 \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(GD(E^1, A_1))) \cup \{g \mid g \in E^2, \neg g \notin E^1\})$

$E^2 = Th(W_2 \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(GD(E^2, A_2))) \cup \{g \mid g \in E^1, \neg g \notin E^2\})$

（証明略）

この定理は拡張世界の定理2．2に相当するもので，

相互拡張世界の組E^1，E^2を形式的に表現したものである．

［定理4．3］ E^1，E^2の組をデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$の相互拡張世界とすれば，E^1，E^2は次のように表される．

$E^1=\mathrm{Th}(W_1 \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\mathrm{GD}(E^1,\ A_1')))$

$E^2=\mathrm{Th}(W_2 \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\mathrm{GD}(E^2,\ A_2')))$

ただし

$A_1'=(D_1', W_1)$

$A_2'=(D_2', W_2)$

$D_1'=D_1 \cup \{: Mg/g \mid g \in E^2\}$

$D_2'=D_2 \cup \{: Mg/g \mid g \in E^1\}$

（証明略）

この定理は相互拡張世界の組E^1，E^2がそれぞれデフォルト理論A_1'，A_2'の拡張世界であることを主張している．ただし，逆は成立しない．すなわち，デフォルト理論A_1'，A_2'の拡張世界は一般には複数個存在するから，その任意の組が相互拡張世界になるとは限らない．

［定理4．4］2つのデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$が相互拡張世界E^1，E^2をもつとする．このとき，$E^1=L$（$E^2=L$）となるための必要十分条件は，W_1（W_2）が充足不能であることである．

（証明略）

［系4．1］ 2つのデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$において，$E^1=L$，$E^2=L$の組がA_1，A_2の相互拡張世界となるための必要十分条件は，W_1，W_2がともに充足不能であることである．

これらの定理および系は，拡張世界の定理2．3に対応するものである．

［系4．2］ 2つのデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$において， $E^1=L$，$E^2=L$ の組がA_1，A_2の相互拡張世界であれば，それは唯一の相互拡張世界である．

この系は拡張世界の定理2．4に対応するものである．

［定理4．5］2つのデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$において，E^1，E^2 の組および $E^{1'}$，$E^{2'}$の組がともに相互拡張世界であり，$E^1 \subseteq E^{1'}$，$E^2 \subseteq E^{2'}$であれば，$E^1=E^{1'}$，$E^2=E^{2'}$である．

（証明）

$E^1 \subseteq E^{1'}$，$E^2 \subseteq E^{2'}$のとき，定理4．1における$E^1{}_i$，$E^{1'}{}_i$，$E^2{}_i$，$E^{2'}{}_i$において，$0 \leqq i$なるすべてのiに対して，

$E^{1'}{}_i \subseteq E^1{}_i$

$E^{2'}{}_i \subseteq E^2{}_i$

が成立することを帰納法で証明する．

$i=0$のとき， $E^1{}_0=E^{1'}{}_0=W_1$，$E^2{}_0=E^{2'}{}_0=W_2$より，$E^{1'}{}_0 \subseteq E^1{}_0$，$E^{2'}{}_0 \subseteq E^2{}_0$ である．

次に， $E^{1'}{}_k \subseteq E^1{}_k$，$E^{2'}{}_k \subseteq E^2{}_k$ を仮定して，$E^{1'}{}_{k+1} \subseteq E^1{}_{k+1}$，$E^{2'}{}_{k+1} \subseteq E^2{}_{k+1}$ を導く．

1）$E^{1'}{}_{k+1} \subseteq E^1{}_{k+1}$を示す．

$p \in E^{1'}{}_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p \in E^{1'}{}_k$である， ②$a: Mb/p \in D_1$， $a \in E^{1'}{}_k$，$\neg b \notin E^{1'}$ なるデフォルト式$a: Mb/p$が少なくとも一つ存在する，③$p \in E^{2'}{}_k$，$\neg p \notin E^{1'}$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合，$E^{1'}{}_k \subseteq E^1{}_k$ を仮定しているから， $p \in E^1{}_k \subseteq \mathrm{Th}(E^1{}_k) \subseteq E^1{}_{k+1}$である．

②の場合，$E^{1'}{}_k \subseteq E^1{}_k$，$E^1 \subseteq E^{1'}$を仮定しているから，$a: Mb/p \in D_1$，$a \in E^{1'}{}_k$，$\neg b \notin E^{1'}$であれば，$a: Mb/p \in D_1$，$a \in E^1{}_k$，$\neg b \notin E^1$でもある．したがて，$p \in E^1{}_{k+1}$である．

③の場合，$E^{2'}{}_k \subseteq E^2{}_k$，$E^1 \subseteq E^{1'}$を仮定しているから，$p \in E^{2'}{}_k$，$\neg p \notin E^{1'}$ であれば， $p \in E^2{}_k$，$\neg p \notin E^1$でもある．したがて，$p \in E^1{}_{k+1}$である．

以上の①，②，③より，$E^{1'}{}_{k+1} \subseteq E^1{}_{k+1}$ が示された．

2）$E^{2'}{}_{k+1} \subseteq E^2{}_{k+1}$ についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，$E^1 \subseteq E^{1'}$，$E^2 \subseteq E^{2'}$のとき，$0 \leqq i$なるすべてのiに対して，$E^{1'}{}_i \subseteq E^1{}_i$，$E^{2'}{}_i \subseteq E^2{}_i$である．

ところで，E^1，E^2の組および$E^{1'}$，$E^{2'}$の組はともに相互拡張世界であるから，$E^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1{}_i$，$E^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2{}_i$，$E^{1'}=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^{1'}{}_i$，$E^{2'}=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^{2'}{}_i$である．したがって，$E^{1'} \subseteq E^1$，$E^{2'} \subseteq E^2$である．この結果と，$E^1 \subseteq E^{1'}$かつ$E^2 \subseteq E^{2'}$であるという定理の仮定より，$E^1=E^{1'}$，$E^2=E^{2'}$が証明された． ■

この定理は拡張世界の定理2．5に対応するもので，包含関係がある相互拡張世界の組は存在しないことを示している．

［定理4．6］2つのデフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$において，E^1，E^2の組が相互拡張世界であり，$E^1 \neq E^2$であれば，$E^1 \cup E^2$は充足不能である．

（証明）

$E^1 \neq E^2$であれば，$p \in E^1$，$p \notin E^2$（あるいは，$p \in E^2$，$p \notin E^1$）なる論理式pが少なくとも一つは存在する．ところで，E^1，E^2の組は相互拡張世界であるから，$E^1=\Gamma(E^1)$，$E^2=\Gamma(E^2)$が成立する．一方，定義3．1より，$g \in \Gamma(E^1)$，$\neg g \notin E^2$なるすべてのgに対して$g \in \Gamma(E^2)$であるから，$g \in E^1$，$\neg g \notin E^2$なるすべてのgに対して$g \in E^2$でなければならない．したがって，上記のpに関しては $p \in E^1$であるから，$p \notin E^2$であるためには$\neg p \in E^2$でなければならない．すなわち，$p \in E^1$，$\neg p \in E^2$である．したがって，$E^1 \cup E^2$は充足不能である．（$p \in E^2$，$p \notin E^1$の場合も同様に証明できる（省略）．） ■

この定理は，相互拡張世界の組E^1，E^2の間の関係を与えるものである．

［定理4．7］A_1，A_2が正規デフォルト理論であれば，その相互拡張世界は存在する．

（証明）

$F^1{}_i$および$F^2{}_i$を次のように定義する．

$F^1{}_0=W_1$

$F^2{}_0=W_2$

とし，$0 \leqq i$なるiに対して，

$F^1{}_{i+1}=\mathrm{Th}(F^1{}_i) \cup T^1{}_i$

$F^2{}_{i+1}=\mathrm{Th}(F^2{}_i) \cup T^2{}_i$

とする． ただし，T^1_i，T^2_iは次の条件を満たすwffの最大の集合であるとする．

(1) $F^1_i \cup T^1_i$および$F^2_i \cup T^2_i$は充足可能である．

(2) もし$p \in T^1_i$なら， いくつかのデフォルト式$a: Mb/b \in D_1$に対して，$a \in F^1_i$，$b=p$であるか，$p \in F^2_i$である． また，もし$p \in T^2_i$なら，いくつかのデフォルト式$a: Mb/b \in D_2$に対して，$a \in F^2_i$，$b=p$であるか，$p \in F^1_i$である．

以上のF^1_i，F^2_iを用いて，F^1，F^2を次のように求める．

$$F^1=\cup_{i=0}^{\infty} F^1_i$$
$$F^2=\cup_{i=0}^{\infty} F^2_i$$

以下，このようにして得られるF^1，F^2の組が正規デフォルト理論A_1，A_2の相互拡張世界であること，すなわち，上記のT^1_i，T^2_iがともに次のように表されることを証明する．

$$T^1_i=\{b \mid a: Mb/b \in D_1, a \in F^1_i, \neg b \notin F^1\} \cup \{g \mid g \in F^2_i, \neg g \notin F^1\}$$
$$T^2_i=\{b \mid a: Mb/b \in D_2, a \in F^2_i, \neg b \notin F^2\} \cup \{g \mid g \in F^1_i, \neg g \notin F^2\}$$

（これを証明すれば，定理4．1より，F^1，F^2の組が正規デフォルト理論A_1，A_2の相互拡張世界であることが証明されたことになる．）

以下，簡単のため$\{b \mid a: Mb/b \in D_1, a \in F^1_i, \neg b \notin F^1\} \cup \{g \mid g \in F^2_i, \neg g \notin F^1\}$を$RHS^1$，$\{b \mid a: Mb/b \in D_2, a \in F^2_i, \neg b \notin F^2\} \cup \{g \mid g \in F^1_i, \neg g \notin F^2\}$を$RHS^2$と表す．

$T^1_i \subseteq RHS^1$，$T^2_i \subseteq RHS^2$は明らかである．したがって，$T^1_i \neq RHS^1$，$T^2_i \neq RHS^2$を仮定して矛盾を導き，これより$T^1_i = RHS^1$，$T^2_i = RHS^2$を示す．$T^1_i \neq RHS^1$，$T^2_i \neq RHS^2$を仮定する．

1）$T^1_i \neq RHS^1$が矛盾することを導く．

$T^1_i \subseteq RHS^1$，$T^1_i \neq RHS^1$より，$p \in RHS^1 - T^1_i$なる論理式pが少なくとも一つは存在する．ところで，T^1_iの最大性より，$F^1_i \cup T^1_i \cup p$は充足不能である． すると，$F^1_i \subseteq Th(F^1_i)$ より，$Th(F^1_i) \cup T^1_i \cup p$は充足不能である．したがって，$F^1_{i+1} \cup p$は充足不能である． また，$F^1_{i+1} \subseteq F^1$であるから，$F^1 \cup p$は充足不能である．したがって，$\neg p \in F^1$でなければならない．これは，$p \in RHS^1$に矛盾する．

2）$T^2_i \neq RHS^2$ が矛盾することもほぼ同様に導くことができる（省略）．

したがって，$T^1_i \subseteq RHS^1$，$T^2_i \subseteq RHS^2$において$T^1_i \neq RHS^1$，$T^2_i \neq RHS^2$ではない．すなわち，$T^1_i = RHS^1$，$T^2_i = RHS^2$である． ■

この定理は拡張世界の定理2．6に対応するもので，相互拡張世界の存在を保証する条件を与えている．

［定理4．8］D_1，D_1'，D_2，D_2'を $D_1' \subseteq D_1$，$D_2' \subseteq D_2$ なる関係をもつ正規デフォルト式の集合，W_1，W_2 を充足可能なwffの集合，$E^{1\prime}$，$E^{2\prime}$の組を正規デフォルト理論$A_1'=(D_1', W_1)$，$A_2'=(D_2', W_2)$に対する相互拡張世界の1つとする．すると，正規デフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$は，$E^{1\prime} \subseteq E^1$，$E^{2\prime} \subseteq E^2$なる相互拡張世界$E^1$，$E^2$をもつ．

（証明）

A_1'，A_2'およびA_1，A_2は正規デフォルト理論であるから，定理4．7より，それぞれ相互拡張世界をもつ．また，W_1, W_2は充足可能なwffの集合であるから，定理4．4より，$E^{1\prime}$，$E^{2\prime}$，E^1，E^2はすべて充足可能である．さらに，$E^{1\prime}$，$E^{2\prime}$の組は正規デフォルト理論$A_1'=(D_1', W_1)$，$A_2'=(D_2', W_2)$に対する相互拡張世界であるから，

$$E^{1\prime}_0=W_1$$
$$E^{2\prime}_0=W_2$$

とし，$0 \leq i$なるiに対して，

$$E^{1\prime}_{i+1}=Th(E^{1\prime}_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_1', a \in E^{1\prime}_i, \neg b \notin E^{1\prime}\} \cup \{g \mid g \in E^{2\prime}_i, \neg g \notin E^{1\prime}\}$$
$$E^{2\prime}_{i+1}=Th(E^{2\prime}_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_2', a \in E^{2\prime}_i, \neg b \notin E^{2\prime}\} \cup \{g \mid g \in E^{1\prime}_i, \neg g \notin E^{2\prime}\}$$

としたとき，

$$E^{1\prime}=\cup_{i=0}^{\infty} E^{1\prime}_i$$
$$E^{2\prime}=\cup_{i=0}^{\infty} E^{2\prime}_i$$

が成立している．このとき，正規デフォルト理論$A_1''=(D_1, E^{1\prime})$，$A_2''=(D_2, E^{2\prime})$の相互拡張世界F^1，F^2 が，正規デフォルト理論 $A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$ の相互拡張世界であることを示せば，$E^{1\prime} \subseteq F^1, E^{2\prime} \subseteq F^2$より，定理は証明されたことになる．

F^1，F^2の組は，正規デフォルト理論 $A_1''=(D_1, E^{1\prime})$，$A_2''=(D_2, E^{2\prime})$の相互拡張世界であるから，

$$F^1_0=E^{1\prime}$$
$$F^2_0=E^{2\prime}$$

とし，$0 \leq i$なるiに対して，

$$F^1_{i+1}=Th(F^1_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_1, a \in F^1_i, \neg b \notin F^1\} \cup \{g \mid g \in F^2_i, \neg g \notin F^1\}$$
$$F^2_{i+1}=Th(F^2_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_2, a \in F^2_i, \neg b \notin F^2\} \cup \{g \mid g \in F^1_i, \neg g \notin F^2\}$$

としたとき，

$$F^1=\cup_{i=0}^{\infty} F^1_i$$
$$F^2=\cup_{i=0}^{\infty} F^2_i$$

が成立している．このF^1，F^2が正規デフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$の相互拡張世界であることを示すためには，

$$E^1_0=W_1$$
$$E^2_0=W_2$$

とし，$0 \leq i$なるiに対して，

$$E^1_{i+1}=Th(E^1_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_1, a \in E^1_i, \neg b \notin F^1\} \cup \{g \mid g \in E^2_i, \neg g \notin F^1\}$$
$$E^2_{i+1}=Th(E^2_i) \cup \{b \mid a: Mb/b \in D_2, a \in E^2_i, \neg b \notin F^2\} \cup \{g \mid g \in E^1_i, \neg g \notin F^2\}$$

としたとき，

$$F^1=\cup_{i=0}^{\infty} E^1_i$$
$$F^2=\cup_{i=0}^{\infty} E^2_i$$

であることを示せばよい．

まず，$E^{1\prime} \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^{2\prime} \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$を証明する．

$0 \leq i$なるすべてのiに対して，$E^{1\prime}_i \subseteq E^1_i$，$E^{2\prime}_i \subseteq E^2_i$であることを帰納法で示す．

$i=0$のとき，$E^{1\prime}_0=W_1$，$E^{2\prime}_0=W_2$ および $E^1_0=W_1$，$E^2_0=W_2$ より明らかである．

次に，$E^{1\prime}_k \subseteq E^1_k$，$E^{2\prime}_k \subseteq E^2_k$ を仮定して，$E^{1\prime}_{k+1} \subseteq E^1_{k+1}$，$E^{2\prime}_{k+1} \subseteq E^2_{k+1}$ を導く．

1）$E^{1\prime}_{k+1} \subseteq E^1_{k+1}$を示す．

$p \in E^{1\prime}_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p \in E^{1\prime}_k$ である，②$a: Mp/p \in D_1{}'$，$a \in E^{1\prime}_k$，$\neg p \notin E^{1\prime}$ を満たすデフォルト式$a: Mp/p$ が少なくとも一つ存在する，③$p \in E^{2\prime}_k$，$\neg p \notin E^{1\prime}$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合，$E^{1\prime}_k \subseteq E^1_k$であるから，$p \in E^1_k$であり，$p \in E^1_{k+1}$となる．

②の場合，$D_1{}' \subseteq D_1$，$E^{1\prime}_k \subseteq E^1_k$を仮定しているから，$a: Mp/p \in D_1$，$a \in E^1_k$ を満たすデフォルト式$a: Mp/p$は存在する． ここで，$\neg p \notin F^1$であることは次のように示される． $E^{1\prime} \subseteq F^1$，$E^{1\prime} = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^{1\prime}_i$ であるから，$p \in E^{1\prime}_{k+1}$ であれば，$p \in F^1$である．したがって，もし$\neg p \in F^1$であるとすると，F^1は充足不能となり，これはW^1が充足可能であるという仮定に反する． したがって，$\neg p \notin F^1$である．したがって，$p \in E^1_{k+1}$となる．

③の場合， $E^{2\prime}_k \subseteq E^2_k$ を仮定しているから， $p \in E^2_k$である．ここで，$\neg p \notin F^1$ であることは②の場合と同様であるから，$p \in E^1_{k+1}$となる．

以上の①，②，③より，$E^{1\prime}_{k+1} \subseteq E^1_{k+1}$ が示された．

2）$E^{2\prime}_{k+1} \subseteq E^2_{k+1}$ についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^{1\prime}_i \subseteq E^1_i$，$E^{2\prime}_i \subseteq E^2_i$である．

したがって，$E^{1\prime}=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^{1\prime}_i$，$E^{2\prime}=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^{2\prime}_i$より，$E^{1\prime}\subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^{2\prime}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$である．

以上の結果を用いて， $F^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$， $F^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$を証明する．

<$F^1\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2\subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$ の証明>

$0\leq j$なるすべてのjに対して，$F^1_j\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2_j\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であることを帰納法で証明し，これより，$F^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^1_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^2_i\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$ を示す．

$j=0$のとき，$F^1_0=E^{1\prime}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2_0=E^{2\prime}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であることはすでに示した．

次に，$F^1_k\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2_k\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$を仮定して，$F^1_{k+1}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2_{k+1}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$を導く．

1）$F^1_{k+1}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$を示す．

$p\in F^1_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p\in F^1_k$である， ②$a: Mp/p\in D_1$，$a\in F^1_k$，$\neg p\notin F^1$ を満たすデフォルト式$a: Mp/p$が少なくとも一つ存在する，③$p\in F^2_k$，$\neg p\notin F^1$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合，$F^1_k\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$を仮定しているから，$p\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$となる．

②の場合，$F^1_k\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$を仮定しているから，$a: Mp/p\in D_1$，$a\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$\neg p\notin F^1$を満たすデフォルト式$a: Mp/p$は存在する．ところで，$a\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$であれば，いくつかの$i$において，$a\in E^1_i$であるから，$p\in E^1_{i+1}$となり，$p\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$となる．

③の場合，$F^2_k\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$を仮定しているから，$p\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$である．ところで，$p\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であれば，いくつかの$i$において，$p\in E^2_i$であるから，$p\in E^1_{i+1}$となり，$p\in\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$となる．

以上の①，②，③より，$F^1_{k+1}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$が示された．

2）$F^2_{k+1}\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，すべてのj（≥ 0）に対して，$F^1_j\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2_j\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$である．

したがって，$F^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^1_i\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^2_i\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$である．

<$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i\subseteq F^1$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i\subseteq F^2$の証明>

$0\leq i$なるすべてのiに対して，$E^1_i\subseteq F^1_i$，$E^2_i\subseteq F^2_i$であることを帰納法で証明し，これより，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} F^1_i=F^1$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} F^2_i=F^2$を示す．

$i=0$のとき，$E^1_0=W_1$，$F^1_0=E^{1\prime}$ および$E^2_0=W_2$，$F^2_0=E^{2\prime}$であり， $W_1\subseteq E^{1\prime}$，$W_2\subseteq E^{2\prime}$であるから，$E^1_0\subseteq F^1_0$，$E^2_0\subseteq F^2_0$ が成立する．

次に，$E^1_k\subseteq F^1_k$，$E^2_k\subseteq F^2_k$を仮定して，$E^1_{k+1}\subseteq F^1_{k+1}$，$E^2_{k+1}\subseteq F^2_{k+1}$を導く．

1）$E^1_{k+1}\subseteq F^1_{k+1}$を示す．

$p\in E^1_{k+1}$なる任意の論理式pを考える．すると，①$p\in E^1_k$である，②$a: Mp/p\in D_1$，$a\in E^1_k$，$\neg p\notin F^1$を満たすデフォルト式$a: Mp/p$ が少なくとも一つ存在する，③$p\in E^2_k$，$\neg p\notin F^1$である，のうちの少なくとも一つが成立している．

①の場合， $E^1_k\subseteq F^1_k$ を仮定しているから， $p\in F^1_{k+1}$となる．

②の場合，$E^1_k\subseteq F^1_k$を仮定しているから，$a: Mp/p\in D_1$，$a\in F^1_k$，$\neg p\notin F^1$を満たすデフォルト式$a: Mp/p$は存在する．したがって，$p\in F^1_{k+1}$となる．

③の場合，$E^2_k\subseteq F^2_k$を仮定しているから，$p\in F^2_k$である．したがって，$p\in F^1_{k+1}$となる．

以上の①，②，③より，$E^1_{k+1}\subseteq F^1_{k+1}$が示された．

2）$E^2_{k+1}\subseteq F^2_{k+1}$についてもほぼ同様に示すことができる（省略）．

したがって，すべてのi（≥ 0）に対して，$E^1_i\subseteq F^1_i$，$E^2_i\subseteq F^2_i$である．

したがって， $\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i\subseteq F^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^1_i$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i\subseteq F^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} F^2_i$である．

以上の考察の結果，$F^1\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$および$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i\subseteq F^1$，$\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i\subseteq F^2$が示された．したがって，$F^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$F^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$である．すなわち，$F^1$，$F^2$の組は正規デフォルト理論$A_1$，$A_2$の相互拡張世界である． ■

この定理は拡張世界の定理２．７に対応するもので，正規デフォルト式の増加に対して相互拡張世界が単調に増大することを主張するものである．

［定理４．９］正規デフォルト理論$A_1=(D_1, W_1)$，$A_2=(D_2, W_2)$が２組の異なる相互拡張世界E^1，E^2および$E^{1'}$，$E^{2'}$をもてば，$E^1 \cup E^{1'}$あるいは$E^2 \cup E^{2'}$の少なくとも一方は充足不能である．

（証明）

E^1，E^2および$E^{1'}$，$E^{2'}$はともに相互拡張世界の組であるから，定理４．１より，

$E^1_0=W_1$

$E^2_0=W_2$

とし，$0 \leqq i$なるiに対して，

$E^1_{i+1}=\mathrm{Th}(E^1_i) \cup \{b \mid a:Mb/b \in D_1,\ a \in E^1_i, \neg b \notin E^1\} \cup \{g \mid g \in E^2_i,\ \neg g \notin E^1\}$

$E^2_{i+1}=\mathrm{Th}(E^2_i) \cup \{b \mid a:Mb/b \in D_2,\ a \in E^2_i, \neg b \notin E^2\} \cup \{g \mid g \in E^1_i,\ \neg g \notin E^2\}$

としたとき，$E^1=\cup_{i=0}^{\infty} E^1_i$，$E^2=\cup_{i=0}^{\infty} E^2_i$であり，また，

$E^{1'}_0=W_1$

$E^{2'}_0=W_2$

とし，$0 \leqq i$なるiに対して，

$E^{1'}_{i+1}=\mathrm{Th}(E^{1'}_i) \cup \{b \mid a:Mb/b \in D_1,\ a \in E^{1'}_i, \neg b \notin E^{1'}\} \cup \{g \mid g \in E^{2'}_i,\ \neg g \notin E^{1'}\}$

$E^{2'}_{i+1}=\mathrm{Th}(E^{2'}_i) \cup \{b \mid a:Mb/b \in D_2,\ a \in E^{2'}_i, \neg b \notin E^{2'}\} \cup \{g \mid g \in E^{1'}_i,\ \neg g \notin E^{2'}\}$

としたとき，$E^{1'}=\cup_{i=0}^{\infty} E^{1'}_i$，$E^{2'}=\cup_{i=0}^{\infty} E^{2'}_i$である．いま，$E^1 \neq E^{1'}$あるいは$E^2 \neq E^{2'}$であるから，$E^1_i=E^{1'}_i$であって$E^1_{i+1} \neq E^{1'}_{i+1}$となる最小の$i$，および$E^2_j=E^{2'}_j$であって$E^2_{j+1} \neq E^{2'}_{j+1}$となる最小の$j$について考える．

１）$i<j$のとき

$E^1_i=E^{1'}_i$，$E^2_i=E^{2'}_i$より，$E^1_{i+1} \neq E^{1'}_{i+1}$となるためには，①いくつかのデフォルト式$a:Mb/b \in D_1$において，$a \in E^1_i$，$\neg b \notin E^1$，$\neg b \in E^{1'}$（または，$a \in E^1_i$，$\neg b \in E^1$，$\neg b \notin E^{1'}$）である，②いくつかの論理式$g \in E^2_i$において，$\neg g \notin E^1$，$\neg g \in E^{1'}$（または，$\neg g \in E^1$，$\neg g \notin E^{1'}$）である，のうちの少なくとも一方が成立している．

①の場合，$b \in E^1_{i+1}$となるから，$E^1=\cup_{i=0}^{\infty} E^1_i$より，$b \in E^1$となる．したがって，$b \in E^1$，$\neg b \in E^{1'}$であるから，$E^1 \cup E^{1'}$は充足不能である．

（$\neg b \in E^1$，$\neg b \notin E^{1'}$の場合も同様に，$E^1 \cup E^{1'}$は充足不能となる（省略）．）

②の場合，$g \in E^1_{i+1}$となるから，$E^1=\cup_{i=0}^{\infty} E^1_i$より，$g \in E^1$となる．したがって，$g \in E^1$，$\neg g \in E^{1'}$であるから，$E^1 \cup E^{1'}$は充足不能である．

（$\neg g \in E^1$，$\neg g \notin E^{1'}$の場合も同様に，$E^1 \cup E^{1'}$は充足不能となる（省略）．）

２）$j<i$のときもほぼ同様にして，$E^2 \cup E^{2'}$が充足不能であることを示すことができる（省略）．

３）$i=j$のときは，１）および２）の議論が同時に成立ち，$E^1 \cup E^{1'}$および$E^2 \cup E^{2'}$がともに充足不能であることを示すことができる（省略）．■

この定理は拡張世界の定理２．８に対応するものであが，拡張世界の場合と違い，異なる相互拡張世界の間での知識集合の直交性（和集合が矛盾する（充足不能）という性質）は部分的にしか成り立たないところに特徴がある．

５．むすび

複数個（２個）のデフォルト推論を行うシステムに対して相互拡張世界を定義し，その性質を明らかにした．各システムの間でやり取りされる知識集合の条件は，本稿で考察した条件の他にもいろいろ設定することができる[5]．また，その条件に対応して，いろいろの性質をもった相互拡張世界を得ることができる．ところで，本稿で得られた相互拡張世界の性質のうち，定理４．４，定理４．５，定理４．７，定理４．８は，各システムの間での知識のやり取りがない（すなわち，各システム動作が独立で，各拡張世界の組がそのまま相互拡張世界になる）場合にも成立する性質である．したがって，やり取りする知識集合の条件をどのように設定すればこれらの性質が引続き保たれるか，その範囲（条件）を特定することは興味深い課題である．一方，定理４．６および定理４．９は，知識のやり取りのない独立したシステムの動作からは得られない性質であり，複数個のシステムの間での相互作用の結果生ずる興味深い性質である．

先にも述べたように，比較的小さな規模の知識情報処理システムを相互に結合し大規模なシステムを構成する場合，相互拡張世界の概念が必要となる．本稿では，デフォルト推論を行うシステムの個数を２個に限定して考察を行ったが，このようなシステムの統合化を考える場合には，より多くのシステムの相互作用を問題にする必要がある．このような場合の相互拡張世界のもつ性質の解明については今後の課題である．

参考文献

(1) R. Reiter:"A Logic for Default Reasoning", Artif. Intell., Vol. 13, No. 1/2, pp. 81-132 (1980).

(2) 相原，村上，馬場口，四反田：“モデル理論に基づくデフォルト論理の基礎的考察”，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 2, pp. 109-116 (1987-02).

(3) 村上，相原，四反田：“デフォルト推論における準拡張世界とその性質”，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 12, pp. 1280-1287 (1987-12).

(4) 村上，相原，四反田：“デフォルト推論における非再帰的張世界とその性質”，人工知能学会誌，Vol. 3, No. 3, pp. 359-367 (1988-05).

(5) 村上，相原：“デフォルト推論における相互拡張世界”，昭和62年信学部門全大講演論文集，分冊１，p. 1-130 (1987).

(6) 村上，相原：“デフォルト推論における相互拡張世界の諸性質”，昭和63年信学総全大講演論文集，分冊Ｄ－１，p. 1-101 (1988).