

## 代数的変形に対応した変形依拠公式提示ツールの開発

脇 弘太†

宮崎 佳典‡

静岡大学情報学部†

静岡大学大学院情報学領域‡

## 1. 導入

STEM教育ならびに数理・データサイエンス教育が世界の潮流となってきた。しかし、それらの教育において必要不可欠な数式に対して苦手意識を抱く学習者は多く存在する。一方で、MathML[1]などを代表に計算機上で数式を利用するためのデータ形式の普及が進み、STEM教育で利用されるデジタル教科書の普及などが今後予想される。そこで我々研究グループは、計算機上の数式を含む文書を対象とした数式検索システムを開発し、将来の数学学習に役立てる機能拡張を行ってきた[2]。本発表ではその機能の一つである、数式変形の拠り所となっている公式を検索・提示する変形依拠公式提示機能を数式処理システムと連携することで拡張し、数学学習支援においてより高い有用性を持つ数式検索システムの構築を目指す。

関連研究として佐々木[3]は、数式処理システム Mathematica および動的幾何学ソフト GeoGebra を用いた中等教育数学向けソフトウェア教材を作成した。Arthur[4]は、CERN Document Server (CDS)における数学コンテンツの問い合わせを行う検索システムを開発した。

## 2. 数式検索システムと変形依拠公式提示機能

Web上の文書に数式を記述する場合に、数式表示用のデータ形式が用いられる。そこで[2]のシステムは、MathML内の表示の情報を記述するタグセットである Presentation Markup で記述された(以下、“MathML記述”と表記)数式を対象とし、正規表現とパターンマッチングによるページ内数式検索を基本的な機能として実装された。文書中の MathML と検索窓に入力した検索数式を正規表現へ置換ののち照合し、マッチした文書中当該箇所の数式をハイライトする。

数式検索システムの機能として実装されたのが変形依拠公式提示機能である。機能の適用例として図1を示す。文書中の数式変形を読み込み、公式クエリ(あらかじめシステムに登録さ

れている MathML 記述の公式データ)と照合することで、式変形の拠り所となっている公式名を提示する。

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) + \sin 2x &= \sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \\ &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) + \sin 2x &= \sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \\ &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \quad \leftarrow \sin\text{の}\pi/2\text{の移動} \end{aligned}$$

図1 変形依拠公式提示機能

## 3. 変形依拠公式提示機能の改良

[2]の変形依拠公式提示機能の課題を図2に例示する。図2の二つの数式変形ではどちらも  $\sin \times \sin$  の積和公式が使われている。データベースには積和公式として数式  $\sin(X)\sin(Y) = -\frac{1}{2}(\cos(X+Y) - \cos(X-Y))$  (ここに  $X, Y$  は数式を表す) を公式クエリとして登録している。このため、公式クエリに一致する(A)の式には公式名を提示し、該当部分をハイライト表示できている(上式の  $X, Y$  には実際は正規表現によって任意の数式を許し、 $X=A/2, Y=B/2$  としてマッチしている)が、式の形が公式クエリから代数的に変形している(B)の数式にはできていない。

$$\begin{aligned} &= \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ \text{(A)} \quad &= -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \leftarrow \sin \times \sin \text{の積和公式} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad S &= 2\sin(a)\sin(b)\sin(c) \\ &= -(\cos(a+b) - \cos(a-b))\sin(c) \end{aligned}$$

図2 変形依拠公式提示機能の課題

しかし、このような見た目の異なるパターン一つ一つを公式クエリとして新たに登録し、対応していくのは登録データ数を際限なく増やすことになり、現実的な解決策とは言えない。そこで本発表では、Wolfram Alpha[5]と連携することで機能拡張し、課題解決を試みる。Wolfram Alphaに MathML 記述の数式を渡すと、その変形結果の数式を再度 MathML 記述の数式

Web Application Annotating Formula Name for Transformed Mathematical Expressions - with Extension of Algebraic Transformation

†Kota Waki, Faculty of Informatics, Shizuoka University

‡Yoshinori Miyazaki, College of Informatics, Shizuoka University

で受け取ることができる。今回、多数の試行を重ね、同一数式に対して複数種の変形を施した結果を渡しても、返り値である MathML 記述の数式が同一パターンに落とし込まれていることが一定数存在することが判明した。例として、 $\sin \times \sin$  の積和公式を代数的に変形した複数の異なる形で Wolfram Alpha に渡したところ、変形結果は共通して

$$(*) \quad \cos(X - Y) = 2 \sin(X) \sin(Y) + \cos(X + Y)$$

になった。そこで、この変形結果が返される場合の式を“基底式”と定義し、従来の公式クエリに代替する。これにより、登録された公式と異なる形の数式も含め、より広範のパターンマッチング実現が期待される。

図 3 は  $\sin \times \sin$  の積和公式に対する基底式を (\*) と定め(新たに公式クエリとし)たことで、従来の登録形、右辺全体が分数の構造になった形、従来形の両辺を入れ替えかつ変形した形の三通りの数式が同一のクエリでマッチング成功した例である。また、図 4 のように図 2 (B) の数式もマッチングしたことが確認された。

図 3  $\sin \times \sin$  の積和公式の例

図 4 図 2(B) の問題が解決した実行例

変形依拠公式提示機能では初中等教育で学習する公式を実際の教科書をもとにクエリとして登録済(計 103 個)である。これら従前の公式に対し、以下のルールを適用した 5 種の数式を用意した：

- ・従前の登録済みと同一
- ・両辺を入れ替え
- ・両辺  $\times 2$
- ・両辺  $\div 2$
- ・両辺  $\times (-1)$

なお、不等式の場合は適宜不等号の向きを入れ替えるものとする。両辺に加減算を施した変形ルールがないのは、MathML の木構造からその変形は問題なく対処できることに依る。“両辺  $\div 2$ ” は式が分数に変形する可能性を意味し、“両辺  $\times (-1)$ ” は  $A+B$  が  $-A-B$ 、 $A-B$  が  $B-A$  のように、文字列としての数式が相当数変形することを想

定しての変形ルールである。その後、Wolfram Alpha で再度変形させ、変形結果が一致したものを基底式とし、従前の公式クエリとの置き換えを行った。

上記の設定において、登録済み公式数に対する基底式の取得率を調査した。全 5 変形結果すべてが一致したものを基底式とした場合、取得率は約 71%であった。また、全 5 変形結果のうち 3 数式と 2 数式が別の変形結果で一致している例(これを  $\langle 3, 2 \rangle$  と表記する)や、4 数式が一致(残る 1 数式のみが違う)例(同  $\langle 4, 1 \rangle$ )は多くみられた。仮に 2 種の数式に収斂し、このような数式ペアをも基底式として許すと、取得率は上述の約 71%から約 87%にまで向上した。

一方で、基底式の定義として“全 5 変形結果のうち 3 数式以上が同一であった場合(の変形結果)”とすると、取得率は約 91%となった。取得に漏れた例として  $\langle 2, 2, 1 \rangle$  (2 数式が一致する変形結果が 2 種と残りの一つという内訳)や、 $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$  (5 数式とも変形結果が異なる)などが挙げられる。今後、実効性を伴う基底式の定義式について議論する一方で、全体の取得率をさらに向上させるべく努める必要がある。

#### 4. まとめと今後の展望

本研究では、数式検索システム [2] の機能である変形依拠公式提示機能と Wolfram Alpha を連携し、公式提示について機能拡張を行った。Wolfram Alpha から得られる基底式を新たな公式クエリとして登録することで、代数的に変形した公式にも対処できるように機能拡張し、その結果のマッチング向上率について調査した。

今後の展望としては、基底式を決定する明確なルールを策定し、その結果、より広範な公式変形へのマッチング実現が挙げられる。

#### 参考文献

- [1] MathML: <http://www.e3.org/TR/MathML3>
- [2] 野崎 咲, 宮崎 佳典, 変形依拠公式提示機能への拡張も含めた数式検索システムの応用, 情報処理学会第 81 回全国大会 5ZH-02 (2018).
- [3] 佐々木 重雄, 数式処理システム Mathematica と動的幾何学ソフト GeoGebra を用いた中等教育向け教材集の試作, 秋田大学教育文化学部研究紀要, 教育科学部門, 73, pp. 19-26 (2018).
- [4] Arthur Oviedo,  $5e^{(x+y)}$ : A Math Aware Search Engine (for CDS), CERN-THESIS-2014-012 (2014).
- [5] Wolfram Alpha: <http://www.wolframalpha.com/>