

# 漸化式を用いるクンマー関数 $U(a, b, x)$ の数値計算法と打ち切り誤差

吉田 年雄<sup>1,a)</sup> 奥居 哲<sup>1,b)</sup>

受付日 2019年7月30日, 採録日 2020年3月13日

**概要:**  $a > 0, b \geq 0, x > 0$  の場合のクンマー関数  $U(a, b, x)$  は, ミラーの方法で次のように計算できる.  $a = \bar{a} + n$  ( $0 < \bar{a} \leq 1, n$ : 非負の整数) として,  $\bar{a}$  と  $n$  を定義する.  $m$  を適当に選ばれた正の整数とし,  $\alpha$  を小さな任意定数とする.  $F_{m+1}(x) = 0$  と  $F_m(x) = \alpha$  を出発値として,  $f_k(x) = (\Gamma(\bar{a} + k)/\Gamma(\bar{a}))U(\bar{a} + k, b, x)$  が満たす漸化式  $F_{k-1}(x) = \{(x + 2\bar{a} - b + 2k)F_k(x) - (\bar{a} - b + k + 1)F_{k+1}(x)\}/(\bar{a} + k - 1)$  を繰り返し用いて,  $F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \dots, F_0(x)$  を求めれば,  $f_n(x)$  は近似計算式  $f_n(x) \doteq x^{-\bar{a}}F_n(x)/\sum_{k=0}^m \Gamma(\bar{a} - b + k + 1)/(k!\Gamma(\bar{a} - b + 1))F_k(x)$  により計算できる. 本論文では, この  $f_n(x)$  の数値計算法の誤差解析を初めて行い, 打ち切り誤差の表式を得た (推測した表式を数学的帰納法により証明した). さらに, この打ち切り誤差の有用な近似式を導出した. これにより, 繰返し回数  $m$  を与えれば, 関数値のおおよその精度を求めることができる. しかし, 任意の要求精度や  $a, b, x$  の値により変わる繰返し回数は簡単に定めておくことはできない. それで, 漸化式の繰返し回数を与えなくても, 任意の要求精度や  $a, b, x$  に対して, 自動的に  $f_n(x)$ , したがって  $U(a, b, x)$  を求めることができるドイフルハートの方法を提案する.

**キーワード:** クンマー関数, 合流型超幾何関数, 漸化式を用いる数値計算法, 数値計算法の打ち切り誤差

## Numerical Method for Kummer Function $U(a, b, x)$ Using Recurrence Technique and its Truncation Error

TOSHIO YOSHIDA<sup>1,a)</sup> SATOSHI OKUI<sup>1,b)</sup>

Received: July 30, 2019, Accepted: March 13, 2020

**Abstract:** Kummer function  $U(a, b, x)$  ( $a > 0, b \geq 0, x > 0$ ) can be computed with a recurrence technique called Miller's method. Given a number  $a$ , let  $\bar{a}$  be the number determined by  $a = \bar{a} + n$  ( $0 < \bar{a} \leq 1, n$ : a non-negative integer), then let  $m$  be an appropriate integer and  $\alpha$ , an arbitrary small number. Starting with  $F_{m+1}(x) = 0, F_m(x) = \alpha$ , and obtaining  $F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \dots, F_0(x)$  from the recurrence  $F_{k-1}(x) = \{(x + 2\bar{a} - b + 2k)F_k(x) - (\bar{a} - b + k + 1)F_{k+1}(x)\}/(\bar{a} + k - 1)$  which is satisfied by  $f_k(x) = (\Gamma(\bar{a} + k)/\Gamma(\bar{a}))U(\bar{a} + k, b, x)$ , we can compute  $f_n(x)$  by  $f_n(x) \doteq x^{-\bar{a}}F_n(x)/\sum_{k=0}^m \Gamma(\bar{a} - b + k + 1)/(k!\Gamma(\bar{a} - b + 1))F_k(x)$ . We derived, for the first time, an evaluation formula for the truncation error of this approximation with a proof by mathematical induction. Our approximate expression allows us to estimate the sufficient number of iterations to obtain the required accuracy for each  $a, b$  and  $x$ . Since it is not practical to calculate, in advance, a whole table of the iteration numbers respectively for a broad range of  $a, b$  and  $x$ , we also propose Deuffhard's method so that  $f_n(x)$ , and thereby  $U(a, b, x)$ , can be computed with a required accuracy for each  $a, b$  and  $x$ .

**Keywords:** Kummer function, confluent hypergeometric function, recurrence technique, truncation error of approximation

### 1. はじめに

クンマー (Kummer) 関数  $U(a, b, x)$  は, そのパラメータ  $a$  と  $b$  を指定することにより, ベッセル関数, 変形ベッ

<sup>1</sup> 中部大学  
Chubu University, Kasugai, Aichi 487-8501, Japan  
<sup>a)</sup> tyoshida@isc.chubu.ac.jp  
<sup>b)</sup> okui@isc.chubu.ac.jp

セル関数, 不完全ガンマ関数などを表すことができる広範囲で重要な関数である [1], [2], [3]. 具体的な応用例を述べる. 波動方程式から時間依存部分を除いたヘルムホルツ方程式を回転放物面座標で表し, 変数分離することにより得られる合流型超幾何微分方程式 [4] の解の計算に使われる. この場合には,  $x$  は大きくなく,  $a, b$  は求めたい座標に依存する. また, シンクロトン放射のスペクトルを求めるときには, 実数次の変形ベッセル関数  $K_\nu(x)$  を被積分関数とする半無限積分の計算が必要であるが [5], この関数の計算プログラムが手に入らないときには, 本計算法で計算することができる. この場合には,  $a = 13/6, b = 13/3$  で,  $x$  は大きい場合の関数値が必要である.

クンマー関数  $U(a, b, x)$  は次式で定義される.

$$U(a, b, x) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{M(a, b, x)}{\Gamma(a-b+1)\Gamma(b)} - x^{1-b} \frac{M(a-b+1, 2-b, x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\} \quad (1)$$

ここで,  $\Gamma(z)$  はガンマ関数である. ガンマ関数の逆数  $1/\Gamma(z)$  を  $G(z)$  で表すと, よく知られているように,  $G(z)$  は整数関数である. 本論文で扱う  $G(z)$  の変数  $z$  は実数全体である (文献 [1] の公式 13.1.3 参照).  $z$  が負の場合の  $G(z)$  の値は, 変数  $z$  が, たとえば,  $-1 \leq z < 0$  のときには, 漸化式  $G(z) = zG(z+1)$  を用いて求めることができる.  $z < -1$  のときの  $G(z)$  も漸化式を繰り返し用いて求められる. また,  $\tilde{n}$  を 0 以下の整数とすると,  $G(\tilde{n}) = 0$  である.

$M(a, b, x)$  は  $U(a, b, x)$  と同様に, クンマー関数あるいは合流型超幾何関数と呼ばれ, 次式のテーラー展開で表される ( $M(a, b, x)$  を第 1 種クンマー関数,  $U(a, b, x)$  を第 2 種クンマー関数ということもある).

$$M(a, b, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(b)_k} x^k \quad (2)$$

ただし,  $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$  はポツホハンマーの記号 (Pochhammer's symbol) で,

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1) \quad (k \geq 1), \quad (a)_0 = 1$$

である.

$U(a, b, x)$  の漸近展開式は次式で表される.

$$U(a, b, x) \asymp x^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k (a-b+1)_k}{k! x^k} \quad (3)$$

ただし, 記号  $\asymp$  は右辺が漸近展開式であることを表す.

また, 0 以下の整数を  $-j$  と表すと, 次の関係式

$$(-j)_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ \prod_{i=0}^{k-1} (-j+i) & (1 \leq k \leq j) \\ 0 & (k \geq j+1) \end{cases} \quad (4)$$

が成り立つ.  $a=0$  のときには, 式 (1) の後半部は, 上述したように,  $G(0)=0$  であるので 0, 前半部の  $M(0, b, x)$  のテーラー展開は, 上の関係式により初項のみになるので,  $U(0, b, x) = 1$  であることが分かる.

この  $U(a, b, x)$  に対して, Temme [6] により, ミラー (Miller) の方法による数値計算法が提案されている. しかし, 今までに, この近似計算式の打ち切り誤差の導出は行われていない. それで, 本論文の 3 章では,  $a > 0, b \geq 0, x > 0$  の場合について, ミラーの方法で得られた  $U(a, b, x)$  の近似計算式に対して, その打ち切り誤差とその誤差の近似式を新規に導出した.

なお,  $b < 0$  の場合は, 次式により, 本方法に帰着する.

$$U(a, b, x) = x^{1-b} U(1+a-b, 2-b, x) \quad (5)$$

$a-b+1$  が 0 以下の整数の場合には, 式 (1) の前半部は 0, 後半部は関係式 (4) により有限級数となり, 漸近展開式 (3) も有限級数 ( $a-b+1$  を  $-j$  と表すと, 式 (3) の右辺の  $k$  の和の上限を  $j$  としたもの) となり, 両者は同じものになる. それで,  $a-b+1$  が 0 以下の整数の場合も, もちろん計算できる.

本方法は, 漸化式の繰り返しにおいて, 丸め誤差の拡大・伝搬が問題にならない場合での使用を前提にしている. 近似計算式の打ち切り誤差のみの解析を行っている. 漸化式の計算での丸め誤差の拡大・伝播については文献 [7] を参照されたい.

## 2. ミラー (Miller) の方法

$a (> 0)$  に対して,

$$a = \bar{a} + n \quad (6)$$

として,  $\bar{a}$  と  $n$  を定義する. ただし,

$$0 < \bar{a} \leq 1, \quad n: \text{非負の有限な整数} \quad (7)$$

である. 本論文では,

$$f_k(x) = \frac{\Gamma(\bar{a}+k)}{\Gamma(\bar{a})} U(\bar{a}+k, b, x) \quad (8)$$

に対して, ミラーの方法 [8], [9], [10] を適用する (文献 [6] の式 (1.10)).

$m$  を適当に選ばれた正の整数とし,  $\alpha$  を小さな任意定数とする (以下の漸化式 (10) の計算でオーバフローを避けるため).

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = \alpha \quad (9)$$

を初期値として, 漸化式 (文献 [6] の式 (2.1))

$$\begin{aligned} & (\bar{a}+k-1)F_{k-1}(x) \\ & = (x+2\bar{a}-b+2k)F_k(x) - (\bar{a}-b+k+1)F_{k+1}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

を繰り返し使うことにより、 $F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \dots, F_0(x)$  を順次、計算する。そのとき、ある  $\tilde{N} (< m)$  に対して、 $n = 0, 1, \dots, \tilde{N}$  についての  $f_n(x)$  の近似計算式  $f_{mn}(x)$  は

$$f_{mn}(x) = \frac{x^{-\bar{a}} F_n(x)}{\sum_{k=0}^m \epsilon_k F_k(x)} \quad (11)$$

として与えられる。ここで、

$$\epsilon_k = \frac{(\bar{a} - b + 1)_k}{k!} = \frac{\Gamma(\bar{a} - b + k + 1)}{k! \Gamma(\bar{a} - b + 1)} \quad (12)$$

である。なお、式 (11) を計算する前に、あらかじめ、繰返し回数  $m$  は定まっている必要がある。

以上は、Temme [6] によって提案された計算法であるが、以下で述べる  $f_n(x)$  の近似計算式の打ち切り誤差の導出は本研究で初めて行ったものである。

### 3. 打ち切り誤差の導出

漸化式 (10) の一般解は

$$F_k(x) = \xi f_k(x) + \eta g_k(x) \quad (13)$$

として表される。ここで、 $\xi$  と  $\eta$  は任意定数であり、

$$g_k(x) = \frac{\Gamma(\bar{a} + k)}{\Gamma(\bar{a} - b + k + 1)} M(\bar{a} + k, b, x) \quad (14)$$

である。式 (13) を式 (9) の左の式に代入すると

$$F_{m+1}(x) = \xi f_{m+1}(x) + \eta g_{m+1}(x) = 0 \quad (15)$$

が得られる。式 (13) の  $k$  を  $n$  としたものと式 (15) から  $\eta$  を消去すると次式を得る。

$$F_n(x) = \xi \left\{ f_n(x) - \frac{f_{m+1}(x) g_n(x)}{g_{m+1}(x)} \right\} \quad (16)$$

$f_k(x)$  に対して、次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k f_k(x) = x^{-\bar{a}} \quad (17)$$

が成り立つ (文献 [6] の式 (2.5))。式 (16) と上式より、

$$\sum_{k=0}^m \epsilon_k \left\{ \frac{F_k(x)}{\xi} + \frac{f_{m+1}(x) g_k(x)}{g_{m+1}(x)} \right\} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \epsilon_k f_k(x) = x^{-\bar{a}}$$

が得られる。式 (16) と上式から  $\xi$  を消去すると、

$$f_n(x) = f_{mn}(x) \{1 - \Phi_m(\bar{a}, b, x)\} + \frac{f_{m+1}(x) g_n(x)}{g_{m+1}(x)} \quad (18)$$

が得られる。ただし、

$$\Phi_m(\bar{a}, b, x) = x^{-\bar{a}} \left\{ \sum_{k=0}^m \epsilon_k \frac{f_{m+1}(x) g_k(x)}{g_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \epsilon_k f_k(x) \right\} \quad (19)$$

である。この  $\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  は  $n$  に依存しないことに注意しよう。式 (18) は  $f_n(x)$  とその近似計算式 (11) の間の関係を的確に表している。

式 (18) の右辺の第 2 項を  $f_n(x)$  で割ったものを

$$\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x) = \frac{f_{m+1}(x) g_n(x)}{f_n(x) g_{m+1}(x)} \quad (20)$$

とおく。そのとき、式 (18) は次のように表される。

$$f_n(x) = f_{mn}(x) \{1 - \Phi_m(\bar{a}, b, x)\} + f_n(x) \Theta_{mn}(\bar{a}, b, x) \quad (21)$$

近似計算式 (11) の打ち切り相対誤差

$$\epsilon_{mn}(x) = \frac{f_{mn}(x) - f_n(x)}{f_n(x)}$$

は、式 (21) を  $f_{mn}(x)$  について解き、上式に代入すれば、

$$\epsilon_{mn}(x) = \frac{\Phi_m(\bar{a}, b, x) - \Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)}{1 - \Phi_m(\bar{a}, b, x)} \quad (22)$$

が得られ、 $|\Phi_m(\bar{a}, b, x)|$  が 0.1 程度以下のときには、

$$\epsilon_{mn}(x) \doteq \Phi_m(\bar{a}, b, x) - \Theta_{mn}(\bar{a}, b, x) \quad (23)$$

と近似できることになる ( $1 - \Phi_m(\bar{a}, b, x) \doteq 1$ )。

式 (9) を初期値として、漸化式 (10) を繰り返し適用することにより得られた  $F_{m-1}(x), F_{m-2}(x), \dots, F_0(x)$  を用いて、式 (11) により、10 進  $p$  桁程度の精度 (約  $10^{-p}$ ) で  $f_n(x)$  あるいは  $U(\bar{a} + n, b, x)$  を計算できるためには、次の 2 つの不等式

$$|\Phi_m(\bar{a}, b, x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (24)$$

$$|\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (25)$$

が成り立てばよい。上の 2 つの不等式から、要求精度で  $f_n(x)$  あるいは  $U(\bar{a} + n, b, x)$  を求めるための漸化式の繰返し回数を決めることができる。

$\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \Phi_m(\bar{a}, b, x) &= x^{-\bar{a}} \left\{ \sum_{k=0}^m \epsilon_k \frac{f_{m+1}(x) g_k(x)}{g_{m+1}(x)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k f_k(x) - \sum_{k=0}^m \epsilon_k f_k(x) \right\} \\ &= x^{-\bar{a}} \left\{ \sum_{k=0}^m \epsilon_k \frac{f_{m+1}(x) g_k(x)}{g_{m+1}(x)} + x^{-\bar{a}} - \sum_{k=0}^m \epsilon_k f_k(x) \right\} \end{aligned}$$

$$x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^m \epsilon_k R_{m,k}(x) + g_{m+1}(x) = \frac{\quad}{g_{m+1}(x)} \quad (26)$$

ただし、上式の  $R_{m,k}(x)$  は次式で与えられる。

$$R_{m,k}(x) = f_{m+1}(x)g_k(x) - f_k(x)g_{m+1}(x) \quad (27)$$

### 3.1 $x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^m \epsilon_k R_{m,k}(x)$ の変形

式 (26) の分子の前半部  $x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^m \epsilon_k R_{m,k}(x)$  を変形する。その変形で用いる  $W_{m,k}(\bar{a}, b, x)$  を次式で定義しておく。

$$W_{m,k}(\bar{a}, b, x) = \frac{M(\bar{a} + k, b, x)U(\bar{a} + m, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + k + 1)} - \frac{M(\bar{a} + m, b, x)U(\bar{a} + k, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 1)} \quad (28)$$

この定義より、任意の  $m, k \geq 0$  について、

$$W_{m,k}(\bar{a}, b, x) = -W_{k,m}(\bar{a}, b, x) \quad (29)$$

となる。上式より、 $W_{m,m}(\bar{a}, b, x) = 0$  である。また、付録 A.1 に示すように、任意の  $m \geq 0$  に対して、

$$W_{m+1,m}(\bar{a}, b, x) = -\frac{\Gamma(b)x^{-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \quad (30)$$

である。さらに、任意の  $m > 0, k \geq 0$  について、次の漸化式が成り立つ (付録 A.2 参照)。

$$W_{m+1,k}(\bar{a}, b, x) = \frac{(x + 2\bar{a} - b + 2m)W_{m,k}(\bar{a}, b, x) - W_{m-1,k}(\bar{a}, b, x)}{(\bar{a} + m)(\bar{a} - b + m + 1)} \quad (31)$$

式 (27) を  $W_{m,k}(\bar{a}, b, x)$  を用いて表すと、

$$R_{m,k}(x) = \Gamma(\bar{a} + m + 1)(\bar{a})_k \cdot \left\{ \frac{M(\bar{a} + k, b, x)U(\bar{a} + m + 1, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + k + 1)} - \frac{M(\bar{a} + m + 1, b, x)U(\bar{a} + k, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \right\} = \Gamma(\bar{a} + m + 1)(\bar{a})_k W_{m+1,k}(\bar{a}, b, x) \quad (32)$$

となる。したがって、式 (26) の分子の前半部は

$$x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^m \epsilon_k R_{m,k}(x) = x^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a} + m + 1) \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\bar{a})_k (\bar{a} - b + 1)_k}{k!} W_{m+1,k}(\bar{a}, b, x) \quad (33)$$

と表すことができる。

上式を変形しよう。まず、 $m = 0$  のときには、式 (30) を

用いて、

$$x^{\bar{a}} \epsilon_0 R_{0,0}(x) = x^{\bar{a}} \Gamma(\bar{a} + 1) W_{1,0}(\bar{a}, b, x) = -\frac{\Gamma(b)x^{\bar{a}-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} - b + 2)} \quad (34)$$

と表される。

$m = 1$  のときには、同様に、式 (30) を用いて次のように表される。

$$x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^1 \epsilon_k R_{1,k}(x) = x^{\bar{a}} \left\{ R_{1,0}(x) + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 2)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)} R_{1,1}(x) \right\} = x^{\bar{a}} \left\{ \Gamma(\bar{a} + 2) W_{2,0}(\bar{a}, b, x) + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 2)\Gamma(\bar{a} + 2)\Gamma(\bar{a} + 1)W_{2,1}(\bar{a}, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)\Gamma(\bar{a})} \right\} = x^{\bar{a}} \left\{ \frac{\Gamma(\bar{a} + 2)(x + 2\bar{a} - b + 2)W_{1,0}(\bar{a}, b, x)}{(\bar{a} + 1)(\bar{a} - b + 2)} + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 2)\Gamma(\bar{a} + 2)\Gamma(\bar{a} + 1)W_{2,1}(\bar{a}, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)\Gamma(\bar{a})} \right\} = -\frac{\Gamma(b)x^{\bar{a}-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} - b + 3)} \{x + (\bar{a} + 1)(\bar{a} - b + 2)\} \quad (35)$$

$m = 2$  のときには、式 (30)~(32) を用いて次のように表される。

$$x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^2 \epsilon_k R_{2,k}(x) = x^{\bar{a}} \left\{ R_{2,0}(x) + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 2)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)} R_{2,1}(x) + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 3)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)} R_{2,2}(x) \right\} = x^{\bar{a}} \left\{ \Gamma(\bar{a} + 3) W_{3,0}(\bar{a}, b, x) + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 2)\Gamma(\bar{a} + 1)\Gamma(\bar{a} + 3)W_{3,1}(\bar{a}, b, x)}{\Gamma(\bar{a} - b + 1)\Gamma(\bar{a})} + \frac{\Gamma(\bar{a} - b + 3)\Gamma(\bar{a} + 2)\Gamma(\bar{a} + 3)W_{3,2}(\bar{a}, b, x)}{2!\Gamma(\bar{a} - b + 1)\Gamma(\bar{a})} \right\} = -\frac{\Gamma(b)x^{\bar{a}-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} - b + 4)} \{x^2 + (\bar{a} + 2)(\bar{a} - b + 3)x + (\bar{a} + 1)(\bar{a} + 2)(\bar{a} - b + 2)(\bar{a} - b + 3)/2!\} \quad (36)$$

一般に、任意の  $m \geq 0$  について、次式のように表される。

$$x^{\bar{a}} \sum_{k=0}^m \epsilon_k R_{m,k}(x) = -\frac{\Gamma(b)x^{\bar{a}-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(-\bar{a} - m)_k (-\bar{a} + b - m - 1)_k}{k!} x^{m-k} \quad (37)$$

上式は数学的帰納法を用いて証明できる (付録 A.3 参照)。また、上式の和の部分は  $m$  次の多項式である。

### 3.2 $\Phi_m(\bar{a}, b, x)$ の近似式

式 (11) で  $f_n(x)$  をよい精度で計算できるためには、式 (18) から分かるように、 $|\Phi_m(\bar{a}, b, x)|$  が小さいことが

必要である。式 (26) において、分子の前半部と後半部が異符号で同程度の大きさでなければ、その式の値は小さくならない。したがって、分子の前半部と後半部の和では、項の相殺が起こらなければならない。分子の前半部と、後半部  $g_{m+1}(x)$  のテイラー展開 ( $x = 0$  での展開, 文献 [1] の公式 13.1.2)

$$g_{m+1}(x) = \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1)}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \left\{ 1 + \frac{\bar{a} + m + 1}{b}x + \frac{(\bar{a} + m + 1)_2}{2!(b)_2}x^2 + \dots \right\} \quad (38)$$

との間では項の相殺は起こらないことが分かる。そこで、今度は、 $g_{m+1}(x)$  の漸近展開 ( $x = \infty$  での展開, 文献 [1] の公式 13.5.1)

$$g_{m+1}(x) \asymp \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} x^{m-k} \quad (39)$$

を考えることにする。ここで、

$$d_k^{(m)} = \frac{\Gamma(b)x^{\bar{a}-b+1}e^x}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \frac{(-\bar{a} - m)_k(-\bar{a} + b - m - 1)_k}{k!}$$

である。式 (37) と (39) を比較すると、式 (37) の  $k$  の和の上限は  $m$  であり、両者の  $x$  のべきの係数は符号のみ違い同じであることが分かる。したがって、式 (26) は次に示すように、分子の前半部と後半部の  $k = 0, 1, \dots, m$  の項が相殺する。それで、 $\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Phi_m(\bar{a}, b, x) &\asymp \frac{-\sum_{k=0}^m d_k^{(m)} x^{m-k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} x^{m-k}}{g_{m+1}(x)} \\ &= \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} d_k^{(m)} x^{m-k}}{g_{m+1}(x)} \quad (40) \end{aligned}$$

上式分子の和において、隣どうしの項の比は

$$\frac{d_{k+1}^{(m)} x^{m-k-1}}{d_k^{(m)} x^{m-k}} = \frac{(\bar{a} - b + m - k + 1)(\bar{a} + m - k)}{(k + 1)x}$$

と表される。式 (40) の分子の和において、 $k = m + 1$  の項と  $k = m + 2$  の項の比は  $(\bar{a} - b)(\bar{a} - 1)/((m + 2)x)$  となるので、 $|(\bar{a} - b)(\bar{a} - 1)/((m + 2)x)|$  が 0.1 程度以下のときには、式 (40) の和において、 $k = m + 1$  の項は主要項となる。さらに、 $\bar{a}$  は、式 (7) であることを考慮すれば、 $b/(mx)$  が 0.1 程度以下ならば、初項である  $k = m + 1$  の項が主要項となるといえるので、 $\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  の近似式

$$\begin{aligned} E_{\Phi}(\bar{a}, b, x) &= \frac{d_{m+1}^{(m)} x^{-1}}{g_{m+1}(x)} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(\bar{a} + m + 1)x^{\bar{a}-b}e^x}{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{a} - b + 1)(m + 1)!g_{m+1}(x)} \quad (41) \end{aligned}$$

が得られ、式 (14) を用いれば、

表 1  $m = 10$  で、 $\bar{a} = 0.1(0.1)1.0$  と  $b = 0.0(0.1)1.0$  のすべての組合せでの  $|E_r|$  の最大値  $E_r^{(\max)}$

Table 1 Maximum value  $E_r^{(\max)}$  of  $|E_r|$  in any combination of  $\bar{a} = 0.1(0.1)1.0$  and  $b = 0.0(0.1)1.0$  in the case of  $m = 10$ .

$x$	$E_r^{(\max)}$	$x$	$E_r^{(\max)}$	$x$	$E_r^{(\max)}$
2	$4.3 \cdot 10^{-2}$	20	$3.4 \cdot 10^{-3}$	100	$6.8 \cdot 10^{-4}$
5	$1.4 \cdot 10^{-2}$	30	$2.3 \cdot 10^{-3}$	200	$3.4 \cdot 10^{-4}$
8	$8.7 \cdot 10^{-3}$	50	$1.4 \cdot 10^{-3}$	300	$2.3 \cdot 10^{-4}$
10	$6.9 \cdot 10^{-3}$	80	$8.5 \cdot 10^{-4}$	500	$1.4 \cdot 10^{-4}$

表 2  $m = 10$  で、 $\bar{a} = 0.1(0.1)1.0$  と  $b = 1.0(0.1)b^{(\max)}$  のすべての組合せでの  $|E_r|$  の最大値  $E_r^{(\max)}$

Table 2 Maximum value  $E_r^{(\max)}$  of  $|E_r|$  in any combination of  $\bar{a} = 0.1(0.1)1.0$  and  $b = 1.0(0.1)b^{(\max)}$  in the case of  $m = 10$ .

$x$	$E_r^{(\max)}$	$x$	$E_r^{(\max)}$	$x$	$E_r^{(\max)}$
2	$6.1 \cdot 10^{-1}$	20	$7.3 \cdot 10^{-2}$	100	$5.0 \cdot 10^{-2}$
5	$2.2 \cdot 10^{-1}$	30	$6.1 \cdot 10^{-2}$	200	$4.7 \cdot 10^{-2}$
8	$1.3 \cdot 10^{-1}$	50	$5.6 \cdot 10^{-2}$	300	$4.6 \cdot 10^{-2}$
10	$1.1 \cdot 10^{-1}$	80	$5.1 \cdot 10^{-2}$	500	$4.5 \cdot 10^{-2}$

$$E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)x^{\bar{a}-b}e^x}{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{a} - b + 1)(m + 1)!M(\bar{a} + m + 1, b, x)} \quad (42)$$

と表される (これは漸近展開を用いた結果であるので、 $x$  が大きいときに有効である)。この  $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  は本研究により始めて得られた有用な  $\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  の近似式である。

なお、 $b = 0$  のときには、上式は次式で表される (付録 A.4 参照)。

$$E_{\Phi}(\bar{a}, 0, x) = \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1)x^{\bar{a}-1}e^x}{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{a} + 1)(m + 1)!M(\bar{a} + m + 2, 2, x)} \quad (43)$$

表 1 には、表中の各々の  $x$  に対して、 $m = 10$  で、 $\bar{a} = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  (0.1(0.1)1.0 と略記) と  $b = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  のすべての組み合わせで求められた  $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  の中で、相対誤差  $E_r = (E_{\Phi}(\bar{a}, b, x) - \Phi_m(\bar{a}, b, x))/\Phi_m(\bar{a}, b, x)$  の絶対値が最大である  $E_r^{(\max)}$  を示す ( $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  の数値計算法については、付録 A.5 に示す)。

$b \geq 1$  の場合の  $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  は、6 章で説明するドイフルハートの方法の適用範囲 (図 1 の直線以下) で用いることができる。 $x$  ごとに、 $b$  の上限 (小数点以下切り上げ) を  $b^{(\max)}$  と表す。表 2 には、表 1 と同様、 $m = 10$  で、 $a, b$  の小数点以下を変えた場合の  $E_r$  の最大値  $E_r^{(\max)}$  を示す。

上述したように、この  $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  は、 $b/(mx)$  が 0.1 程度以下のとき有効である。

誤差の近似値は、誤差の大体の大きさを表すためのものである。誤差の近似値の相対精度は 0.1 程度もあれば十分である。あるいは、オーダ (10 進数で指数表記をした

表 3  $\bar{a} = 0.2, b = 0.1$  のときの  $\dot{M}$  および  $N$   
 Table 3  $\dot{M}$  and  $N$  in the case of  $\bar{a} = 0.2$  and  $b = 0.1$ .

$x$	$\dot{M}$	$N$	$x$	$\dot{M}$	$N$
2	177	44	60	13	5
3	121	31	70	12	4
5	76	20	80	12	5
8	51	14	90	11	4
10	42	12	100	11	4
20	25	8	200	8	3
30	19	6	300	7	3
40	16	5	400	7	3
50	14	5	500	6	2

とき、その指数部) が分かれば十分である場合もある。したがって、これらの表の結果は満足できるものである。

#### 4. 漸化式の繰返し回数

漸化式の繰返し回数の定め方について説明しよう。

まず、 $b = 0$  の場合の  $E_\Phi(\bar{a}, b, x)$ , すなわち、式 (43) において、 $M(\bar{a} + m + 2, 2, x)$  の級数展開の  $k = 0$  の項は  $m$  の一定列、 $k \geq 1$  の項は  $m$  の単調増加列であるので、 $M(\bar{a} + m + 2, 2, x)$  は  $m$  の単調増加列である。それで、 $E_\Phi(\bar{a}, 0, x)$  は、 $m$  の単調減少列であることが分かる。

次に、 $b \neq 0$  の場合を考えよう。式 (41) の  $E_\Phi(\bar{a}, b, x)$  において、 $\Gamma(\bar{a} + m + 1)/(m + 1)!$  は  $0 < \bar{a} \leq 1$  で  $m$  の広義の単調減少列である。また、式 (14) で定義される  $g_{m+1}(x)$  は少なくとも  $m \geq b$  かつ  $x \geq 1$  で  $m$  の単調増加列であることが分かる (付録 A.6 参照)。

したがって、少なくとも  $m \geq b$  かつ  $x \geq 1$  で、 $E_\Phi(\bar{a}, b, x)$  は  $m$  の単調減少列であることが分かる。

ここでは、式 (24) を満足する最小の  $m$  を  $\dot{M}$  とする。また、式 (25) ( $\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$  の不等式) で、 $m$  を  $\dot{M}$  に置き換えた式を満足する最大の  $n$  を  $N$  として定義する ( $E_\Phi(\bar{a}, b, x)$  および  $\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$  の近似計算法については、付録 A.5 に示す)。

そのとき、 $0 \leq n \leq N$  において、 $f_n(x)$  は、 $m$  を  $\dot{M}$  とした近似計算式 (11) により、10 進  $p$  桁程度の精度で計算できることになる。

$n > N$  である  $n$  に対しては、式 (25) は成り立たないので、 $m$  の値は  $\dot{M}$  より大きくする必要があるのである。すなわち、式 (25) が成り立つまで  $m$  を大きくしなければならないが、 $m$  を具体的に与えることはできないと思われる (ベッセル関数  $J_n(x)$  の場合には、文献 [10] の式 (2.17) のように与えることができる)。

表 3 には、 $\bar{a} = 0.2, b = 0.1$  で要求精度が倍精度 ( $10^{-16}$ ) のとき、 $x$  を変えたときの  $\dot{M}$  と  $N$  を示す。この表より、 $x$  が大きいほど繰返し回数は少なくて済むことが分かる。

#### 5. ドイフルハート (Deuffhard) の方法

任意の  $\bar{a}, b, x$  に対して、 $\dot{M}$  を簡単に与えることは難しい。実際の応用では、たとえば、要求精度が倍精度で、 $\bar{a}$  が  $0.5 \leq \bar{a} \leq 0.6, b$  が  $2 \leq b \leq 3, x$  は  $20 \leq x \leq 40$  というように限定された場合には、 $\dot{M} = -0.4x + 30, N = -0.05x + 4.5$  のような式を与えておくと ( $\dot{M}, N$  は、それぞれ、小数点以下、繰り上げ、繰り下げ)、 $n \leq N$  の場合には計算できる。しかし、汎用の計算プログラムでは、このように限定することはできない。そこで、漸化式の繰返し回数を定めておく必要もなく、しかも任意精度で関数値を求められるドイフルハートの方法 [11], [12] を提案することにする。

ドイフルハートの方法はミラーの方法を行列表現し、

$$\sum_{k=0}^{\dot{m}} d_k f_k(x) \tag{44}$$

を要求精度で求める方法である ( $d_k$  は定数係数、 $\dot{m}$  は適当な正整数)。また、

$$d_n = 1, \quad d_k = 0 \quad (k \neq n) \tag{45}$$

としたときの結果は、ミラーの方法で  $f_n(x)$  を求めたものと等価である (打ち切り誤差が同じである)。それで、ミラーの方法の打ち切り誤差の解析結果は、そのままドイフルハートの方法にも使用できる。

$a, b, x$  および繰返し回数が同じときには、両者の結果は、実際の数値実験により、丸め誤差程度で一致することが確かめられる。

$f_n(x)$  (したがって、 $U(\bar{a} + n, b, x)$ ) の計算にドイフルハートの方法を適用することを提案したのは本論文が初めてである。誌面の都合で、ドイフルハートの方法の詳細な説明は文献 [10], [11] に譲ることにして、ここでは、 $f_n(x)$  の計算アルゴリズムについて記すことにする。

$$p_{-1} = 0, \quad p_0 = \epsilon_0/\bar{a}, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = d_0/\bar{a}$$

を初期値として、下の 2 つの式を  $k = 1, 2, \dots$  と繰り返す。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_k = \{ \epsilon_k + (x + 2\bar{a} - b + 2k)p_{k-1} \\ \quad - (\bar{a} - b + k)p_{k-2} \} / (\bar{a} + k) \\ q_k = \{ d_k + (x + 2\bar{a} - b + 2k)q_{k-1} \\ \quad - (\bar{a} - b + k)q_{k-2} \} / (\bar{a} + k) \\ s_k = q_k/p_k \end{array} \right. \tag{46}$$

この繰り返しは、 $s_k$  が要求精度に収束するまで行う。ただし、 $\epsilon_k$  については、式 (12) より、

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_k = \frac{\bar{a} - b + k}{k} \epsilon_{k-1} \quad (k \geq 1) \tag{47}$$

が成り立つので、これを利用するとよい。

$f_n(x)$  は、要求精度に収束した  $s_k$  を用いて、

$$f_n(x) = x^{-\bar{a}} s_k \tag{48}$$

として得られる。

ドイフルハートの方法は、式 (46) から分かるように、2 つの漸化式を計算するので、ミラーの方法の約 2 倍の計算量を必要とする。それでも、漸化式の繰返し回数を与えておく必要がなく、任意精度で、自動的に  $f_n(x)$  を求められる。それがドイフルハートの方法の最大の利点である。

あらかじめ、近似式 (42) に繰返し回数  $m$  を適宜代入すれば、 $f_n(x)$  の計算値のおおよその精度を知ることができる。その意味で、これは有用な近似式である。式中の  $M(a+m+1, b, x)$  は、式 (2) により、比較的簡単に求められる。ただし、近似式 (42) は、 $|\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)|$  が  $|\Phi_m(\bar{a}, b, x)|$  の 10 分の 1 程度以下であるとき (以下、条件という) に有効である。  $n = 0$  のときには、上記の条件が成立することが数値実験により確認できる。それで、 $n = 0$  のときには、近似式 (42) により、 $f_n(x)$  の精度が分かる。  $n \neq 0$  のときには、付録 A.5 で示した方法で  $\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$  を計算し、上の条件を満たせば、 $f_n(x)$  の精度が分かる。

また、ドイフルハートの方法において、あえて (本来の自動停止機能を外して)、表 3 で与えられた  $x$  に対する  $M$  を漸化式の繰返し回数として実行してみると、 $n \leq N$  において、倍精度計算 ( $10^{-16}$ ) では、丸め誤差程度 ( $10^{-14}$  より小さい誤差) で  $f_n(x)$  が求められることが確かめられた。

## 6. 適用範囲

ミラーの方法での漸化式 (10)、および、ドイフルハートの方法での漸化式 (46) において、その計算で桁落ちが起こる場合がある。図 1 には、ドイフルハートの方法について、 $x \leq 500$  の場合について、桁落ちにより、関数の計算値の相対精度が 10 進 2 桁以上低下する  $b$  の最小値を点線で示す (これは、要求相対精度が  $10^{-16}$  のとき、計算値の相対誤差が  $10^{-14}$  以上となる  $b$  の最小値である)。数値実

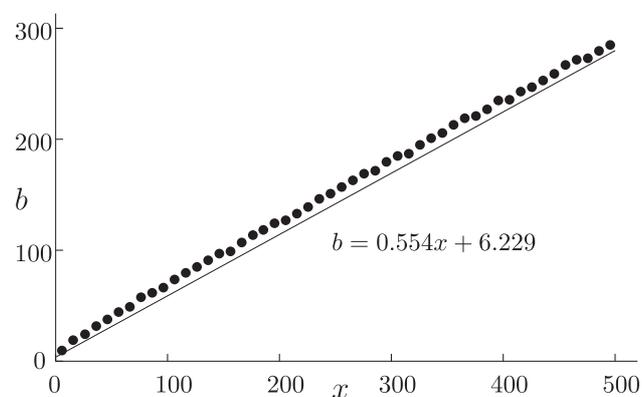


図 1 ドイフルハートの方法で桁落ちを起す領域 (点線の上)

Fig. 1 Region (over dotted line) where cancellation occurs in Deuffhard's method.

験より、 $0 < \bar{a} \leq 1$  において、 $\bar{a}$  が大きいほど、この最小値は大きくなるので、この図には、 $\bar{a}$  の上限  $\bar{a} = 1$  の場合のものが示されている。この線より上の部分で桁落ちが起きるので、この点線より下が適用範囲となる。ミラーの方法の場合は省略するが、ドイフルハートの方法の場合とはほぼ同様な適用範囲が得られる。

実際の計算では次式で表される直線の下側の領域を適用範囲とするとよい。

$$b = 0.554x + 6.229 \tag{49}$$

適用範囲外での  $f_n(x)$  (したがって、 $U(\bar{a}+n, b, x)$ ) の関数値は、まず、適用範囲内の  $U(\bar{a}+n, b, x)$  と  $U(\bar{a}+n, b-1, x)$  を計算し、次の漸化式を繰返し用いて求めることができる。この理由については、文献 [13] に述べられている。

$$\begin{aligned} U(\bar{a}+n, b+1, x) \\ = \{(x+b-1)U(\bar{a}+n, b, x) \\ + (\bar{a}+n-b+1)U(\bar{a}+n, b-1, x)\} / x \end{aligned} \tag{50}$$

実際に、適用範囲内でドイフルハートの方法を用いて関数値を倍精度で計算した。  $x$  を 1 から 500 まで 1 刻みで、 $\bar{a}$  を 0.1 から 1.0 まで 0.1 刻みで変え、 $b$  を 0 から 0.1 刻みで適応範囲の上限まで変えて、4 倍精度の計算結果と比較することにより、計算値の精度を求めた。  $x$  が 5 以上では、相対精度は  $10^{-14}$  以下であった。4 以下の場合の最低の相対精度を調べると、 $x = 3$  と 4 では  $2 \cdot 10^{-14}$ 、 $x = 2$  では  $4 \cdot 10^{-14}$ 、 $x = 1$  では  $3 \cdot 10^{-13}$  であった。このことは、適用範囲内で良い精度で関数値が求められていることを示している。

## 7. おわりに

本論文では、漸化式を用いるクンマー関数  $U(a, b, x)$  の数値計算法の打ち切り誤差を導出し、変形することにより、有用な打ち切り誤差の近似式を得た。それは、繰返し回数を与えれば、関数値の精度を求めるために用いることができる。ミラーの方法では、漸化式の繰返し回数をあらかじめ与えておく必要があるが、指定された要求精度で、任意の  $a, b, x$  に対する繰返し回数を簡単に定めておくことは難しい。そこで、漸化式の繰返し回数を与えなくても、要求精度で関数値を自動的に求めることができるドイフルハートの方法を提案した。

## 参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, pp.504-515, Dover Publications (1972).
- [2] Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert, R.F. and Clark, C.W.: *NIST Handbook of Mathematical Functions*, pp.321-334, Cambridge University Press (2010).
- [3] Temme, N.M.: *Special Functions, An Introduction*

to the Classical Functions of Mathematical Physics, pp.171-177, John Wiley & Sons (1996).

- [4] Arscott, F.M. and Darai, A.: Curvilinear Co-ordinates Systems in which the Helmholtz Equation Separates, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol.27, pp.33-70 (1981).
- [5] 国立天文台編：干渉計サマースクール, p.21 (2005).
- [6] Temme, N.M.: The Numerical Computation of the Confluent Hypergeometric Function  $U(a, b, z)$ , *Numerische Mathematik*, Vol.41, pp.63-82 (1983).
- [7] 杉原正顕, 室田一雄：数値計算法の数理, pp.20-28, 岩波書店 (1994).
- [8] 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算, 電子計算機のための数値計算法 II, pp.103-121, 培風館 (1965).
- [9] Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations, *SIAM Review*, Vol.9, pp.24-82 (1967).
- [10] 二宮市三, 吉田年雄, 長谷川武光, 秦野甯世, 杉浦 洋, 櫻井鉄也, 細田陽介：数値計算のわざ, pp.21-35, 共立出版 (2006).
- [11] Deuffhard, P.: A Summation Technique for Minimal Solutions of Linear Homogeneous Difference Equations, *Computing*, Vol.18, pp.1-13 (1977).
- [12] 二宮市三, 吉田年雄, 長谷川武光, 秦野甯世, 杉浦 洋, 櫻井鉄也, 細田陽介：数値計算のわざ, pp.35-41, 共立出版 (2006).
- [13] Temme, N.M.: The Numerical Computation of the Confluent Hypergeometric Function  $U(a, b, z)$ , *Numerische Mathematik*, Vol.41, pp.70-71 (1983).

## 付 録

### A.1 式 (30) の導出

文献 [1] の公式 13.1.22 に, 同文献の公式 13.4.11 と 13.4.26 を用いれば, 次式が得られる.

$$(\bar{a} - b + 1)M(\bar{a}, b, x)U(\bar{a} + 1, b, x) - M(\bar{a} + 1, b, x)U(\bar{a}, b, x) = -\Gamma(b)x^{-b+1}e^x/\Gamma(\bar{a} + 1)$$

上式の  $\bar{a}$  を  $\bar{a} + m$  に置き換えると, 式 (30) が得られる.

### A.2 漸化式 (31) の導出

式 (28) による  $W_{m+1,k}(\bar{a}, b, x)$  の表式において,  $M(\bar{a} + m + 1)$  と  $U(\bar{a} + m + 1)$  を, それぞれ, 文献 [1] の公式 13.4.1 と 13.4.15 を用いて書き換えると漸化式 (31) が得られる.

### A.3 数学的帰納法による式 (37) の証明の概略

式 (33) を用いれば, 式 (37) と等価な式

$$\begin{aligned} & \Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(\bar{a} - b + m + 2) \\ & \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\bar{a})_k(\bar{a} - b + 1)_k}{k!} W_{m+1,k}(\bar{a}, b, x) \\ & = -\Gamma(b)x^{-b+1}e^x \\ & \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(-\bar{a} - m)_k(-\bar{a} + b - m - 1)_k}{k!} x^{m-k} \end{aligned} \quad (A.1)$$

が得られる. 上式が成り立つことを証明すればよい.

$m = 0, 1, 2$  で上式が成り立つことは本文で示した. 以後, 上式の左辺を  $L$  と置く. 上式に漸化式 (31) を用いて書き換えれば,

$$\begin{aligned} L & = \Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(\bar{a} - b + m + 2) \sum_{k=0}^m \frac{(\bar{a})_k(\bar{a} - b + 1)_k}{k!} \\ & \cdot \left\{ \frac{(x + 2\bar{a} - b + 2m)W_{m,k}(\bar{a}, b, x) - W_{m-1,k}(\bar{a}, b, x)}{(\bar{a} + m)(\bar{a} - b + m + 1)} \right\} \\ & = \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)}{(\bar{a} + m)(\bar{a} - b + m + 1)} \left\{ (x + 2\bar{a} - b + 2m) \right. \\ & \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\bar{a})_k(\bar{a} - b + 1)_k W_{m,k}(\bar{a}, b, x)}{k!} \\ & - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(\bar{a})_k(\bar{a} - b + 1)_k W_{m-1,k}(\bar{a}, b, x)}{k!} \\ & \left. + \frac{(\bar{a})_m(\bar{a} - b + 1)_m W_{m,m-1}(\bar{a}, b, x)}{m!} \right\} \end{aligned} \quad (A.2)$$

式 (A.1) において,  $m$  を  $m - 1$  に置き換えたものと  $m$  を  $m - 2$  に置き換えたものを帰納法の仮定として適用する. この 2 つの式を式 (A.2) に代入し, 変形すると,

$$\begin{aligned} L & = -\Gamma(b)x^{-b+1}e^x \left\{ (x + 2\bar{a} - b + 2m) \right. \\ & \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-\bar{a} - m + 1)_k(-\bar{a} + b - m)_k}{k!} x^{m-k-1} \\ & - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-\bar{a} - m + 1)_{k+1}(-\bar{a} + b - m)_{k+1}}{k!} x^{m-k-2} \\ & \left. + \frac{(\bar{a})_m(\bar{a} - b + 1)_m}{m!} \right\} \end{aligned} \quad (A.3)$$

を得る.  $x$  のべきでまとめ, 関係式  $(a + 1)_k = (a + k)(a + 1)_{k-1}$  を用いると,

$$\begin{aligned} L & = -\Gamma(b)x^{-b+1}e^x \\ & \cdot \left\{ x^m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-\bar{a} - m + 1)_{k-1}(-\bar{a} + b - m)_{k-1}}{k!} x^{m-k} \right. \\ & \cdot \left[ (-\bar{a} - m + k)(-\bar{a} + b - m - 1 + k) \right. \\ & \left. + (2\bar{a} - b + 2m)k - k(k - 1) \right] \\ & \left. + \frac{(-\bar{a} - m + 1)_{m-1}(-\bar{a} + b - m)_{m-1}}{m!} \right. \\ & \left. \cdot \left[ m(2\bar{a} - b + m + 1) + (-\bar{a})(-\bar{a} + b - 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (A.4)$$

と表され, 簡約すると式 (A.1) の右辺が得られる.

### A.4 式 (43) の導出

式 (42) において, 次の部分に注目する.

$$M(\bar{a} + m + 1, b, x)/\Gamma(b)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1 + k)\Gamma(b)}{k!\Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(b + k)} x^k / \Gamma(b) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1 + k)}{k!\Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(b + k)} x^k \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

$b = 0$  の場合には、上式の  $\Gamma(b + k)$  は、 $k = 0$  のとき、無限大であるので、上式は次式となる ( $(k + 1)! = (2)_k$ )。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 2 + k)}{(k + 1)!\Gamma(\bar{a} + m + 1)\Gamma(k + 1)} x^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{a} + m + 1)\Gamma(\bar{a} + m + 2 + k)}{k!(2)_k\Gamma(\bar{a} + m + 2)} x^{k+1} \\
 &= x(\bar{a} + m + 1)M(\bar{a} + m + 2, 2, x)
 \end{aligned}$$

式 (42) から式 (A.5) の部分を除いた式において、 $b = 0$  としたものに上式を代入すれば、式 (43) が得られる。

### A.5 $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$ および $\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$ の近似計算法

$E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  と  $\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$  の値は、誤差を求めるために使うので、10 進 2~3 桁程度の精度があれば十分である。

式 (42) で定義される  $E_{\Phi}(\bar{a}, b, x)$  の  $M(\bar{a} + m + 1, b, x)$  は式 (2) で計算できる。

$\Theta_{mn}(\bar{a}, b, x)$  の定義式 (20) の右辺において、 $g_n(x)$  や  $g_{m+1}(x)$  は、式 (14) と (2) により計算できる。式 (8) で定義される  $f_{m+1}(x)$  や  $f_n(x)$  は、ドイフルハートの方法で  $10^{-2}$  程度の要求精度で計算したものを使うことができる。

### A.6 $m \geq b$ かつ $x \geq 1$ で、 $g_{m+1}(x)$ は $m$ の単調増加列であることの説明

$p, q > 0, m \geq 0$  のとき、 $p > q$  ならば、 $\Gamma(p + m)/\Gamma(q + m)$  は  $m$  の単調増加列である。(A.6)

これは次式から分かる。

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(q)}, \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(q + 1)} = \frac{p\Gamma(p)}{q\Gamma(q)}, \frac{\Gamma(p + 2)}{\Gamma(q + 2)} = \frac{p(p + 1)\Gamma(p)}{q(q + 1)\Gamma(q)}, \dots \\
 &g_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1 + k)}{k!(b)_k\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} x^k \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

の第  $k$  項において、 $m$  に依存する部分

$$G_k = \Gamma(\bar{a} + m + 1 + k)/\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)$$

に注目する。

$b > 1$  のとき、

$$G_0 = \Gamma(\bar{a} + b + 1 + (m - b))/\Gamma(\bar{a} + 2 + (m - b))$$

は、式 (A.6) より、 $m \geq b$  ならば、 $m$  の単調増加列である。 $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) も同様である。よって、このときには、 $g_{m+1}(x)$  は  $m$  の単調増加列である。

$b = 1$  のとき、 $G_0$  は  $m$  の一定列である。 $G_1$  は  $m$  の単調増加列である。 $G_k$  ( $k = 2, \dots$ ) も同様である。よって、このときには、 $g_{m+1}(x)$  は  $m$  の単調増加列である。

$0 < b < 1$  のときを考える。 $g_{m+1}(x)$  の第  $k$  項を  $\alpha_k^{(m)}$  と置く。式 (A.7) の第 1 項 ( $k = 0$ ) は単調減少列 ( $> 0$ ) であり、第 2 項以降の項は単調増加列である。次式のように、第 1 項  $\alpha_0^{(m)}$  と第 2 項  $\alpha_1^{(m)}$  の和を  $\beta^{(m)}$  と置く。

$$\beta^{(m)} = \alpha_0^{(m)} + \alpha_1^{(m)}$$

$x \geq 1$  ならば、

$$\begin{aligned}
 &\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)} \\
 &= \frac{\Gamma(\bar{a} + m + 1)}{\Gamma(\bar{a} - b + m + 2)} \{(\bar{a} + m)x + (x - 1) + b\} > 0
 \end{aligned}$$

であるので、 $m$  の単調増加列であることが分かる。第 3 項以降の項も  $m$  の単調増加列である。よって、このときには、 $g_{m+1}(x)$  は  $m$  の単調増加列である。

したがって、 $b \neq 0$  の場合には、少なくとも、 $m \geq b$  かつ  $x \geq 1$  ならば、 $g_{m+1}(x)$  は単調増加列である ( $g_{m+1}(x)$  は非有界な単調増加列であり、 $\infty$  に発散する)。



吉田 年雄 (正会員)

1944 年生。1968 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業。1973 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程単位取得満期退学。工学博士。同年名古屋大学助手。1985 年同講師。1986 年中部大学助教授。1990 年同教授。2005 年同情報科学研究所長 (9 年間)。2015 年同名誉教授。



奥居 哲

1967 年生。1995 年筑波大学大学院博士課程工学研究科電子・情報工学専攻修了。博士 (工学)。1996 年三重大学工学部情報工学科助手。1999 年同講師。2001 年中部大学工学部情報工学科准教授。オートマトン、単一化、書換え系、関数論理型言語に関する研究に従事。