Vol.2020-AL-178 No.6
2020/5/9

M 凸関数最小化問題に対する最急降下法の厳密な反復回数

南川 智都[1,a)]　塩浦 昭義[1,b)]

概要：M 凸関数は，最小木問題，最小費用流問題，資源配分問題などの解きやすい組合せ最適化問題に対する統一的枠組を与える．M 凸関数最小化問題は基本的な最急降下法を用いて有限回の反復で最小解を求められることが知られている．近年，この問題に対する最急降下法の厳密な反復回数が求められた．本研究では，この主張に対する簡潔な別証明を与える．さらに，M 凸関数の拡張であるジャンプ M 凸関数最小化問題について，基本的な最急降下法の厳密な反復回数を示す．

1. はじめに

M 凸関数はマトロイド的な組合せ構造をもつ離散凸関数である [2]．本稿では M 凸関数およびジャンプ M 凸関数最小化問題を考える．これらの関数に対する最急降下法の反復回数のタイトなバウンドの導出が，本稿の目的である．

M 凸関数最小化に対する基本的な最急降下法の反復回数については，最小解が一意であるときに限り，タイトなバウンドが得られていた [3]．複数の最小解が存在する場合，改良版の最急降下法の反復回数について，非自明な上界が求められていた．近年，基本的な最急降下法の反復回数のタイトなバウンドが示されている [6]．しかし，このバウンドはある種の制約つき M 凸関数最小化に関する定理の系として得られており，その証明は長い．これに対し，本稿ではより簡潔で直接的な証明を与える．

ジャンプ M 凸関数最小化に対する基本的な最急降下法については，最小解が一意であるときに限り，タイトなバウンドが示されていた [4]．複数の最小解が存在する場合，改良版の最急降下法の反復回数についても，非自明な上界が得られていた．本稿では基本的な最急降下法に対して，タイトなバウンドをはじめて導出する．

2. M 凸関数の定義と最急降下法

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．各 $i \in N$ に対し，第 i 成分が 1 で他成分が 0 の単位ベクトルを χ_i と表す．$N_1^+ = \{+\chi_i \mid i \in N\}, N_1^- = \{-\chi_i \mid i \in N\}$ とし，$N_1 = N_1^+ \cup N_1^-$ と定義する．$x, y \in \mathbb{Z}^n$ に対し，$\|x-y\|_1 = \|x+s-y\|_1+1$ を満たす $s \in N_1$ の集合を $\mathrm{inc}(x,y)$ と書く．関数 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が M 凸関数，およびジャンプ M 凸関数であるとは，関数 f が以下の交換公理 **(M-EXC)**, **(M-EXC[J])** を満たすことをいう．ここで，関数 f の実行可能領域を $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid f(x) < +\infty\}$ と書く．

(M-EXC)
任意の $x, y \in \mathrm{dom} f, s \in \mathrm{inc}(x,y) \cap N_1^-$ に対し

$$f(x) + f(y) \geq f(x+s+t) + f(y-s-t)$$

を満たす $t \in \mathrm{inc}(x+s, y) \cap N_1^+$ が存在する．

(M-EXC[J])
任意の $x, y \in \mathrm{dom} f, s \in \mathrm{inc}(x,y)$ に対し

$$f(x) + f(y) \geq f(x+s+t) + f(y-s-t)$$

を満たす $t \in \mathrm{inc}(x+s, y)$ が存在する．

(ジャンプ)M 凸関数の最小解の特徴付けとして，局所最適性を用いた最適性基準が知られている．

定理 2.1. ([2], Thm. 6.26) M 凸関数 f に対し，x が最小解であるための必要十分条件は，任意の $i, j \in N$ に対して $f(x) \leq f(x - \chi_i + \chi_j)$ が成り立つことである．

定理 2.2. ([4], Thm. 3.3) ジャンプ M 凸関数 f に対し，x が最小解であるための必要十分条件は，任意の $s, t \in N_1$ に対して $f(x) \leq f(x+s+t)$ が成り立つことである．

以上の最適性基準より，(ジャンプ)M 凸関数の最小解は，最急降下法によって求められることが分かる．

M 凸関数最小化に対する最急降下法 ([1])
S0　初期解 $x_0 \in \mathrm{dom} f$ を任意に選び，$x := x_0$ とおく．
S1　$f(x) = \min\{f(x - \chi_i + \chi_j) \mid i, j \in N\}$ ならば，x を出力し，アルゴリズムを終了する．
S2　$f(x - \chi_u + \chi_v) = \min\{f(x - \chi_i + \chi_j) \mid i, j \in N\}$ を満たす $u, v \in N$ を見つける．
S3　$x := x - \chi_u + \chi_v$ として S1 へ．

[1] 東京工業大学工学院　経営工学系
東京都目黒区大岡山 2-12-1
a) minamikawa.n.aa@m.titech.ac.jp
b) shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

ジャンプ M 凸関数最小化に対する最急降下法 ([4])

S0 初期解 $x_0 \in \mathrm{dom} f$ を任意に選び，$x := x_0$ とおく．

S1 $f(x) = \min\{f(x+s+t) \mid s,t \in N_1\}$ ならば，x を出力し，アルゴリズムを終了する．

S2 $f(x+s^*+t^*) = \min\{f(x+s+t) \mid s,t \in N_1\}$ を満たす $s^*, t^* \in N_1$ を見つける．

S3 $x := x+s^*+t^*$ として S1 へ．

3. 主結果

(ジャンプ) M凸関数に対する最急降下法の反復回数に対し，タイトなバウンドを与える．所与のベクトル $x \in \mathbb{Z}^n$ と関数 f の最小解の L1 距離の最小値を

$$\mu(x) = \min\{\|x^* - x\|_1 \mid x^* \in \arg\min f\}$$

とおく．M 凸関数最小化に対する最急降下法の反復回数について，以下の結果が知られている．

定理 3.1. ([6], Cor. A.5) M 凸関数に対する最急降下法の反復回数は $\mu(x_0)/2$ に等しい．

本稿では定理 3.1 に対する簡潔な別証明を与えた．さらに，ジャンプ M 凸関数に対して定理 3.1 の結果が拡張できることを示した．

定理 3.2. ジャンプ M 凸関数に対する最急降下法の反復回数は $\mu(x_0)/2$ に等しい．

4. 証明

本節では定理 3.1, 3.2 に対する証明を与える．与えられたベクトル x との L1 距離を最小にする最小解の集合を以下の通り定義する．

$$M^*(x) = \{x^* \in \mathbb{Z}^n \mid x^* \in \arg\min f, \quad \|x^* - x\|_1 = \mu(x)\}.$$

(ジャンプ)M 凸関数に対する最急降下法を解析するための便利な道具として，最小解カット定理が知られている [4], [5]．以下では，最小解カット定理の主張を強めた定理を示す．

定理 4.1. M 凸関数 f に対し，$x \in \mathrm{dom} f$ は非最小解とする．

$$f(x - \chi_u + \chi_v) = \min\{f(x - \chi_i + \chi_j) \mid i,j \in N\}$$

を満たす $u, v \in N$ に対し，次の *(i)–(iii)* が成立する．

(i) $x^*(u) \le x(u) - 1, x^*(v) \ge x(v) + 1$ を満たす最小解 $x^* \in M^*(x)$ が存在する．

(ii) $\mu(x - \chi_u + \chi_v) = \mu(x) - 2$.

(iii) $M^*(x - \chi_u + \chi_v) = \{x \in M^*(x) \mid x^*(u) \le x(u) - 1, x^*(v) \ge x(v) + 1\}$.

定理 4.2. ジャンプ M 凸関数 f に対し，$x \in \mathrm{dom} f$ は非最小解とする．

$$f(x+s^*+t^*) = \min\{f(x+s+t) \mid s,t \in N_1\}$$

を満たす $s^*, t^* \in N_1$ に対し，次の *(i)–(iii)* が成立する．

(i) 以下の不等式を満たす $x^* \in M^*(x)$ が存在する．

$$\bigstar \begin{cases} x^*(u) \le x(u) - 2 & (\text{if } s^* = t^* = -\chi_u), \\ x^*(u) \ge x(u) + 2 & (\text{if } s^* = t^* = +\chi_u), \\ x^*(u) \le x(u) - 1, x^*(v) \le x(v) - 1 & (\text{if } s^* = -\chi_u, t^* = -\chi_v), \\ x^*(u) \ge x(u) + 1, x^*(v) \le x(v) - 1 & (\text{if } s^* = +\chi_u, t^* = -\chi_v), \\ x^*(u) \ge x(u) + 1, x^*(v) \ge x(v) + 1 & (\text{if } s^* = +\chi_u, t^* = +\chi_v). \end{cases}$$

(ii) $\mu(x+s^*+t^*) = \mu(x) - 2$.

(iii) 集合 $M^*(x+s^*+t^*)$ は ★ を満たす $x^* \in M^*(x)$ の集合に等しい．

M 凸関数およびジャンプ M 凸関数では，$\mathrm{dom} f$ に含まれる 2 つのベクトル間の L1 距離は常に偶数となる．定理 4.1(ii) と定理 4.2(ii) より，最急降下法の各反復において，現在のベクトルから最も近くにある最小解までの L1 距離が 2 ずつ減少することが分かる．このことから，定理 3.1 と定理 3.2 の主張が得られる．

参考文献

[1] K. Murota: Algorithms in discrete convex analysis. *IEICE Trans. Inf. Syst.*, E83–D:344–352, 2000.

[2] K. Murota: *Discrete Convex Analysis.* SIAM, Philadelphia, 2003.

[3] K. Murota: On steepest descent algorithms for discrete convex functions. *SIAM J. Optim.*, 14:699–707, 2003.

[4] K. Murota and K. Tanaka: A steepest descent algorithm for M-convex functions on jump systems. *IEICE Trans. Fundam. Electr. Commun. Comput. Sci.*, E89–A:1160–1165, 2006.

[5] A. Shioura: Minimization of an M-convex function. *Discrete Appl. Math.*, 84:215–220, 1998.

[6] A. Shioura: M-convex function minimization under L1-distance constraint. preprint, arXiv:1809.03126v3, 2018.