

# 非指数型媒質の高速描画についての一検討

矢川 敏生<sup>\*,1</sup> 関口 滉貴<sup>\*,1</sup> 楽 詠灝<sup>1</sup>

**概要:** 本研究では, CG 分野にごく最近導入された非指数型媒質のレンダリングを考える. 従来 CG 分野で用いられてきた指数型媒質に対しては, その自由行程のサンプリングを統計的に不偏に行う手法としてデルタトラッキングがあり, また, 空間分割を利用したデルタトラッキングの高速化手法が提案されている. 非指数型媒質に対しては, デルタトラッキングが利用できることは知られているが, その空間分割を活用した高速手法は検討されておらず, 本研究では, この点について検討する.

## On Efficient Rendering of Non-exponential Media

TOSHIKI YAGAWA<sup>\*,1</sup> KOKI SEKIGUCHI<sup>\*,1</sup> YONGHAO YUE<sup>1</sup>

**Abstract:** We consider the rendering of non-exponential media, which were recently introduced to the graphics field. For the classical exponential media, delta tracking enables stochastically unbiased sampling of their free path, and there are methods that use spatial partitioning to accelerate delta tracking while maintaining its unbiased nature. For non-exponential media, although it is known that delta tracking is applicable, its acceleration using spatial partitioning has not been explored, which we explore in this paper.

### 1. はじめに

本研究では, 雲や煙のように微粒子から構成された関与媒質のレンダリング方法を考える. 関与媒質に入射した光は, 微粒子との衝突によって, 微粒子に吸収されたり, 散乱して方向を変えたりすることで, 当初の進行方向の光量が減衰する. 散乱された光が再び他の微粒子と衝突することにより多重散乱が起こり, 連続する散乱イベント間に光が直進した距離は自由行程と呼ばれる. 関与媒質の写実的なレンダリングにおいては, このような光の減衰・散乱効果を考慮することが重要である. 媒質の表現では, 実際には個々の微粒子の実体をモデル化することはせず, 一般にはその巨視的性質を確率分布 (消散係数に基づいた自由行程分布や位相関数など) により記述するが, このような微粒子の描像を考えることは重要である.

従来 CG 分野では, 関与媒質の巨視的モデル化において, 各粒子は独立に存在すると仮定されてきた. この仮定下では, 粒子の空間分布はホワイトノイズに従い, 連続する散乱イベントは無相関に起こる. その帰結は, 散乱を無

記憶な効果と仮定するモデル化, すなわち, 空間中の任意の点から光がさらに直進できる距離は, 光が直前の散乱からその点までに進んだ距離とは無関係 (従って無記憶) ということである. 専門用語で言い換えれば, 光の減衰特性は Beer-Lambert 則に従い, 自由行程の分布は指数分布で記述できる.

しかし, サスペンション流体 (例えば [1]) や大気物理 (例えば [2], [3]) などの知見によれば, 微粒子間の電気的な相互作用などによって生ずる引力や斥力, あるいはフラクタル的な流速分布により, 微粒子は必ずしもホワイトノイズに従って分布せず, 粒子同士の位置関係に相関が生ずることがわかってきた. 例えば, 粒子間に斥力が働けば, 粒子同士は互いに距離を取ろうとし, 自由行程がごく短い距離となる確率は極端に低くなる. すなわち, 粒子の空間分布はブルーノイズに近づく. 逆に引力が働けば, 粒子が集団で密集する領域と対照的に疎な領域とに二極化する可能性があり, このように局所的に二極化した分布が大局的に均質に分布する (フラクタル的な) 形態を取りうる. こうした場合の自由行程分布は指数分布では表されず, CG 分野にごく最近導入された非指数型の媒質 [4], [5] という新し

<sup>1</sup> 青山学院大学 (AGU)

\*: 共同第一著者 (著者らの貢献は等しい).

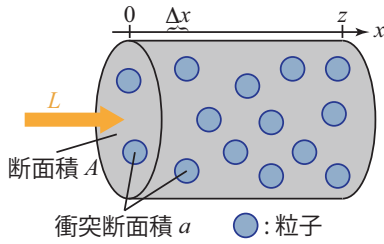


図 1 円筒領域の媒質中を光が通過する場合を考える。

い形式（一般化されたと言った方がより正確）の関与媒質を定義する。本研究ではこのような非指数型媒質のレンダリングについて考える。

関与媒質のレンダリングを行うには、媒質中を通過する光路を統計的にサンプリングし、各光路の寄与を積分する。光路の構築には、位相関数に従って光の散乱方向をサンプリングし、続いてその方向に直進して次の散乱イベントが起こるまでの距離である自由行程をサンプリングする。本研究では自由行程のサンプリングに焦点を当てる。

自由行程のサンプリングを行う方法として、近年ではデルタトラッキング [6] に基づく方法が利用されている。それまで一般的だったレイマーチング [7] ではサンプリング結果にバイアスが生じてレンダリング結果が不正確になり得る [8] のに対して、デルタトラッキングではサンプリングが不偏であり、計算結果の真値への収束が保証されている [9]。さらに、指数型媒質に対して、空間分割に基づくアルゴリズムを利用したデルタトラッキングの高速化手法 [8], [10] が提案されており、非均質媒質での実用的なレンダリング効率が実現されている。非指数型媒質に対しては、デルタトラッキングが利用できることは知られている [11] が、その空間分割を活用した高速手法は検討されおらず、本研究では、この点について検討する。

## 2. 指数型媒質と非指数型媒質

媒質中での光の減衰効果を考えるために、図 1 のような円筒領域に光が入射して粒子と衝突することを考える。光の入射点を  $\mathbf{x}_0$ 、進行方向を  $\mathbf{d}$ 、入射点から進んだ距離を  $x$ （従ってその対応する座標は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + x\mathbf{d}$ ）とする。円筒の断面積を  $A$ 、光の進行方向の微小な長さを  $\Delta x$  とすると、この微小領域の体積は  $V = A\Delta x$  と表せる。次に単位体積あたりの粒子数密度を  $\rho_n$  とすると、この微小領域は  $V\rho_n$  個の粒子を含む。一つの粒子に対して光が衝突する面積（衝突断面積）を  $a$  とし、光線の進行方向に対して粒子は重ならない（ $\Delta x$  は任意の微小距離であるため、この仮定は実際には不要）とすると、微小領域全体で光を遮る面積は  $V\rho_n a$  となる。従って、微小領域内の粒子が進行方向の光を遮る割合は、

$$\frac{V\rho_n a}{A} = \frac{A\rho_n a\Delta x}{A} = \rho_n a\Delta x \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\rho_n$  と  $a$  の積  $\sigma = \rho_n a$  は消散係数と

呼ばれる。

通常、媒質は非均質であり、粒子数密度  $\rho_n$  や 散乱断面積  $a$  は空間座標  $\mathbf{x}$  の関数となり、従って消散係数  $\sigma$  も  $\mathbf{x}$  の関数である。指数型媒質の場合、消散係数は  $\mathbf{x}$  のみの関数  $\sigma(\mathbf{x})$  となるが、非指数型媒質の場合、消散係数は  $\mathbf{x}$  に加えて、さらに直前の散乱点からの距離  $s$  の関数でもある:  $\sigma(\mathbf{x}, s)$ 。  $s$  を導入することで、粒子間の相関を表現するわけである。この点が指数型媒質と非指数型媒質の違いである。この違いを理解するために、“均質”な媒質について両者を比較してみる。ここでの均質の意味は、 $\mathbf{x}$  への依存性がないことであり、指数型媒質では消散係数は定数  $\sigma$  となるが、非指数型では消散係数は  $\sigma(s)$  となる。

今度は円筒領域全体を考え、この円筒に輝度  $L(x=0)$  で入射した光が、円筒を通過したあとの射出輝度（すなわち粒子に遮られずに残った光）を考える。まず、指数型媒質を考える。微小区間  $\Delta x$  を通過する間に、光は  $\sigma\Delta x$  の割合だけ遮られるので、輝度の変化量  $\Delta L(x)$  は、

$$\frac{\Delta L(x)}{L(x)} = -\sigma\Delta x \quad (2)$$

に従い、これを微分を用いて書けば

$$\frac{dL}{dx} = -L(x)\sigma \quad (3)$$

となる。指数型媒質の場合、この関係は Beer-Lambert 則と呼ばれる。式 (3) を  $\frac{dL}{L(x)} = -\sigma dx$  と書いて両辺を 0 から  $z$  まで積分すると、

$$\int_0^z \frac{dL}{L(x)} = -\int_0^z \sigma dx \quad (4)$$

となり、変形することで

$$L(z) = L(0)\exp(-\sigma z) \quad (5)$$

を得る。この式から、距離  $z$  を通過した際に遮られる光の割合  $C(z)$  は

$$C(z) = 1 - \exp(-\sigma z) \quad (6)$$

であることがわかる。 $x=0$  から入射して直進した光（すなわちまだ粒子と衝突していない光）が区間  $[0, z)$  のどこかで（初めて）粒子と衝突することで光が遮られていくので、 $C(z)$  は、初めての衝突が起こった事象が区間  $[0, z)$  内で発生する累積分布を表している。従って、初めての衝突が  $x=z$  で起こる確率密度  $p(z)$  は  $C(z)$  を微分することで、

$$p(z) = \sigma \exp(-\sigma z) \quad (7)$$

となる。これは指数分布の確率密度関数であり、ここから指数型と呼ばれる。式 (7) を両対数スケールでプロットすると、図 2 に示すように直線的になる。

次に、非指数型の場合と同様に考えると、微小区間  $\Delta x$  を通過する間に、光は  $\sigma(s)\Delta x$  の割合だけ遮られる。簡単のため、直前の散乱は  $x = 0$  で起こったとすると、 $s = x$  となる。従って、

$$\frac{dL}{dx} = -L(x)\sigma(x) \quad (8)$$

となり、

$$\int_0^z \frac{dL}{L(x)} = - \int_0^z \sigma(x)dx \quad (9)$$

を経て、

$$L(z) = L(0) \exp\left(- \int_0^z \sigma(x)dx\right) \quad (10)$$

を得る。同様に、初めての衝突が起こった事象が区間  $[0, z)$  内で発生する累積分布  $C(z)$  は

$$C(z) = 1 - \exp\left(- \int_0^z \sigma(x)dx\right) \quad (11)$$

であり、対応する確率密度関数は

$$p(z) = \sigma(z) \exp\left(- \int_0^z \sigma(x)dx\right) \quad (12)$$

となる。式 (10) も式 (5) と同じように指数関数を用いて書かれているため、一見すると似ているように見えるが、式 (10) では、 $L(z)$  は任意の非負（広義）単調減少関数の形になることができ、包含する関数系が格段に広がっている。 $\sigma(s)$  が  $s$  によらずに定数となる時のみ、式 (5) の形に還元し、指数型となる。後述の式 (19) の形（ただし  $\tau(\mathbf{x}) = \sigma$  とする）の  $\sigma(s)$  が与えられた場合の式 (12) を両対数スケールでプロットすると、図 2 に示すように直線から外れた形となる。このように、両対数プロットで直線になるかどうかで、指数型か非指数型の区別がつく。

一方で、式 (12) は特殊な非均質な指数型媒質を表すと考えられることもできる。すなわち、この非均質な指数型媒質の消散係数を  $\sigma_e(\mathbf{x})$ 、元の均質な非指数型媒質の消散係数を  $\sigma_n(s)$  として、直前の散乱点は  $\mathbf{x}_0$  であったとすると、

$$\sigma_e(\mathbf{x}) = \sigma_n(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \quad (13)$$

という関係が成り立つ。この非均質な指数型媒質を特殊と称したのは、その定義が直前の散乱点  $\mathbf{x}_0$  に依存する点である。すなわち、この非均質な指数型媒質の消散係数は、空間座標に対して固定されておらず、散乱が起こる度に消散係数の空間分布が変わるような、確率的な形で実現されているのである。本研究では、このような非均質な指数型媒質としての解釈が非指数型媒質に対して成り立つことを利用して、従来の指数型媒質におけるデルタトラッキングに対する高速化手法を、非指数型媒質に対して拡張することを考える。

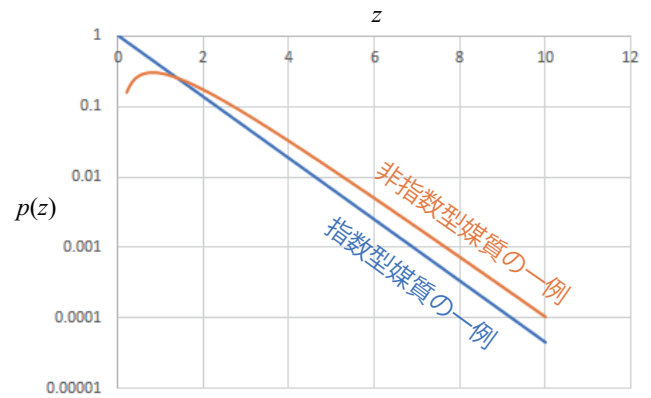


図 2 指数型媒質と非指数型媒質の自由行程の確率密度関数の比較。

### 3. 空間分割による指数型媒質の高速描画

非指数型媒質の高速描画手法を説明する前に、その基礎となる空間分割を用いた指数型媒質の高速描画手法 [10] について概説する。非均質な指数型媒質の消散係数が  $\sigma(\mathbf{x})$  であるとき、対応する自由行程の確率密度関数  $p(z)$  は式 (3) において  $\sigma$  の代わりに  $\sigma(\mathbf{x}_0 + z\mathbf{d})$  として、

$$p(z) = \sigma(\mathbf{x}_0 + z\mathbf{d}) \exp\left(- \int_0^z \sigma(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{d})dx\right) \quad (14)$$

となる。式 (14) は式 (12) と一見同じように見えるが、 $\sigma(\cdot)$  の関数の形が直前の散乱点  $\mathbf{x}_0$  によって変わらないところがポイントである。式 (14) に従って自由行程  $z$  をサンプリングするには、逆関数法に従って  $[0, 1)$  間の一様乱数  $\xi$  が  $z$  の累積分布関数と等しいとおくことにより、

$$\xi = 1 - \exp\left(- \int_0^z \sigma(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{d})dx\right) \quad (15)$$

を得、式変形することで

$$-\ln(1 - \xi) = \int_0^z \sigma(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{d})dx \quad (16)$$

となり、この式を満たすように  $\xi$  から  $z$  を決めればよいことがわかる。非均質な媒質の場合、右辺の積分をいつでも近似なく実行するのはコストがかかり、積分を近似して  $z$  を求めようとすると得られる  $z$  に統計的バイアスが生じる。そこで、デルタトラッキングでは、仮想的な粒子を導入して、空間全体で仮想粒子を含めた消散係数が定数になるようにする。この定数を最大消散係数 (majorant extinction coefficient)  $\sigma_M$  と呼び、 $\sigma_M$  は消散係数の上界、すなわち任意の  $\mathbf{x}$  に対して  $\sigma_M \geq \sigma(\mathbf{x})$  を満たす必要がある。こうして導入した仮想粒子に対して、光が衝突してもそのまま進行方向を変えずに直進するという性質を付与することにより、媒質の自由行程分布を式 (14) のままにできる。この考え方に従うと、まず式 (16) の  $\sigma(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{d})$  を  $\sigma_M$  で置き換えることで、

$$-\ln(1 - \xi) = \int_0^z \sigma_M dx = \sigma_M z \quad (17)$$

となることから、

$$z = -\frac{\ln(1-\xi)}{\sigma_M} \quad (18)$$

とサンプリングできる．こうして距離  $z$  進んだときに衝突する粒子が真の粒子である確率は  $\frac{\sigma(\mathbf{x}_0+z\mathbf{d})}{\sigma_M}$  であるので、この確率によって  $z$  進んだ点を採択し、棄却された場合には  $z$  進んだ位置からさらに継続して距離をサンプリングすることを繰り返す．

デルタトラッキングでは、媒質の非均質度が高い時に、消散係数が小さい領域で棄却率が高くなり効率が悪くなる．そこで空間分割を用いた高速化手法 [8], [10] では、区分的に定数であるような（領域ごとに異なる）最大消散係数  $\sigma_M(\mathbf{x})$  を利用できるようにし、なるべく場所ごとにタイトな最大消散係数を使用できるようにすることで効率化を行う．また、与えられた空間分割構造を用いた場合のサンプリング効率を評価するコスト関数を導出し、そのコストを最小にすることで最適な空間分割構造を求める枠組みを提案している．本研究では、[10] で導入された一様格子を空間分割の構造として利用する．

#### 4. 空間分割による非指数型媒質の高速描画

前述の非均質な指数型媒質としての非指数型媒質の解釈では、散乱が起こる度に消散係数の空間分布  $\sigma_e(\mathbf{x})$  が変わるが、自由行程のサンプリングを行っている間は、直前の散乱点とそのサンプリングの始点に固定されているので、不変であることが重要である．すなわち、直前の散乱点が確定したのちに、非均質な指数型媒質として解釈した場合の消散係数の空間分布に対して、空間分割を用いたデルタトラッキングを実行することで自由行程をサンプリングすれば良い．

ただし、空間分割のデータ構造は作成するのに時間がかかるので、散乱点が決まる度に空間分割を再計算するのはかえって非効率となる．そこで、非均質な指数型媒質として解釈した場合の消散係数の空間分布はその都度変わるが、そうした状況に対して共通に利用できる一つの空間分割構造を事前に求める、という考え方が重要になる．この点を検討するために、本研究では、文献 [11] で示されている Gamma-2 分布型の消散係数を一般化した下記の形の非指数型媒質を考える．

$$\sigma(\mathbf{x}, s) = \frac{\tau^2(\mathbf{x})s}{\tau(\mathbf{x})s+1} \quad (19)$$

ここで、 $\tau(\mathbf{x}) \geq 0$  は非均質性を追加するために導入した． $s \geq 0$  と  $\tau(\mathbf{x}) \geq 0$  であることを利用すると、この形の消散係数は変形することで、

$$\sigma(\mathbf{x}, s) = \frac{\tau(\mathbf{x})}{1 + \frac{1}{\tau(\mathbf{x})s}} \leq \tau(\mathbf{x}) \quad (20)$$

となり、 $\tau(\mathbf{x})$  は  $\sigma(\mathbf{x}, s)$  の上界となっていることがわかる．

この  $\tau(\mathbf{x})$  に対して、さらに（一様格子の各セルで）区分的に定数である最大消散係数  $\sigma_M(\mathbf{x})$  を設定する（各セル内の  $\tau(\mathbf{x})$  の最大値をそのセルの最大消散係数とする）ことで、一様格子による空間分割を活用したデルタトラッキングを実行できる．この場合、真の散乱点を採用する確率は  $\frac{\sigma(\mathbf{x}_0+z\mathbf{d}, z)}{\sigma_M(\mathbf{x}_0+z\mathbf{d})}$  である．この方法を A と呼ぶことにする．

上記の方法 A では、 $s$  に依存しない形で最大消散係数を導出したが、 $s$  に依存する形で最大消散係数を設定することも可能である．この方法を B と呼び、以下具体的に検討する． $s$  が  $0 \leq s \leq d$  の間を動く時の  $\sigma(\mathbf{x}, s)$  の上界を、 $\tau(\mathbf{x})$  と  $d$  の両方を用いて表すことを考える．式 (19) を  $\tau$  と  $s$  のそれぞれで偏微分すると、

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, s)}{\partial \tau} = \frac{\tau^2(\mathbf{x})s^2 + 2\tau(\mathbf{x})s}{(\tau(\mathbf{x})s+1)^2}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = \frac{\tau^2(\mathbf{x})}{(\tau(\mathbf{x})s+1)^2} \quad (22)$$

を得る． $\tau(\mathbf{x}) \geq 0$  かつ  $s \geq 0$  であるため、 $\frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, s)}{\partial \tau}$  と  $\frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, s)}{\partial s}$  はいずれも非負である．従って、 $\sigma(\mathbf{x}, s)$  は  $\tau$  と  $s$  に関して（広義）単調増加である．このため、 $\tau(\mathbf{x}) \leq \sigma_M(\mathbf{x})$  と  $s \leq b$  に対して、

$$\sigma(\mathbf{x}, s) = \frac{\tau^2(\mathbf{x})s}{\tau(\mathbf{x})s+1} \leq \frac{\sigma_M^2(\mathbf{x})b}{\sigma_M(\mathbf{x})b+1} = \tilde{\sigma}_M(\mathbf{x}, b) \quad (23)$$

という上界を得る．この上界  $\tilde{\sigma}_M(\mathbf{x}, b)$  は方法 A の上界  $\sigma_M(\mathbf{x})$  よりもタイトである． $\tilde{\sigma}_M(\mathbf{x}, b)$  を利用するには、 $s$  の取りうる値をいくつかの区間に分けて、一様格子の各セルについて、それぞれの区間に対応した最大消散係数を用意することが考えられる．具体的には、関与媒質は一様格子内に存在しているので、この一様格子内を光線が直進する時に取りうる最大の距離は、一様格子の対角辺となる．その長さを  $l_M$  とすると、 $s$  の取りうる値は  $0 \leq s \leq l_M$  に限られる．次に、セル一つの対角辺の長さ  $W$  を用いて、 $0 \leq s \leq kW$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  というように包含関係にある複数の区間に分割し、各セルにおいて、各  $k$  について  $b = kW$  とした場合の  $\tilde{\sigma}_M(\mathbf{x}, b)$  を計算し格納する．こうして得られた一様格子を用いて自由行程サンプリングを行うには、光線とセルとの共通線分内の各点のうち、直前の散乱点からの距離が最大となるものを求め、その距離  $l$  に対して、 $l \leq kW$  となる最小の  $k$  を求め、対応する  $\tilde{\sigma}_M(\mathbf{x}, kW)$  を利用する．

#### 5. 結果

本稿の実験には、Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU @ 3.20GHz 1基と 8 GB の主記憶を搭載した PC を利用した．また、関与媒質の生成には、オクターブノイズ [12] を利用して  $\tau(\mathbf{x})$  を定めた．具体的には、まずオクターブノイズの生成結果を  $[0, 1]$  間に規格化したものを  $p(\mathbf{x})$  とし、次に  $\tau(\mathbf{x}) = K(p(\mathbf{x}))^E$  とする．ここで、 $E$  は消散係数の

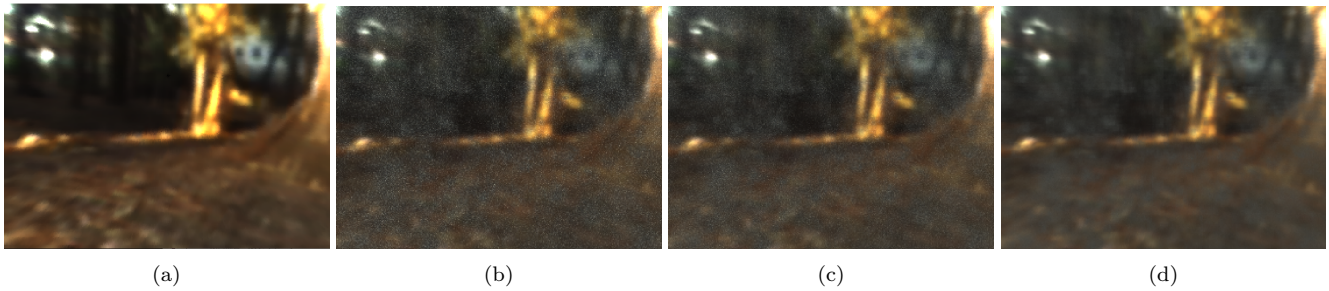


図 3 (a) 媒質なしの場合. (b) 空間分割なしで 1,800 秒レンダリングした場合. (c) 空間分割ありで 1,800 秒レンダリングした場合. (d) 空間分割ありで 35,119 秒レンダリングした場合.

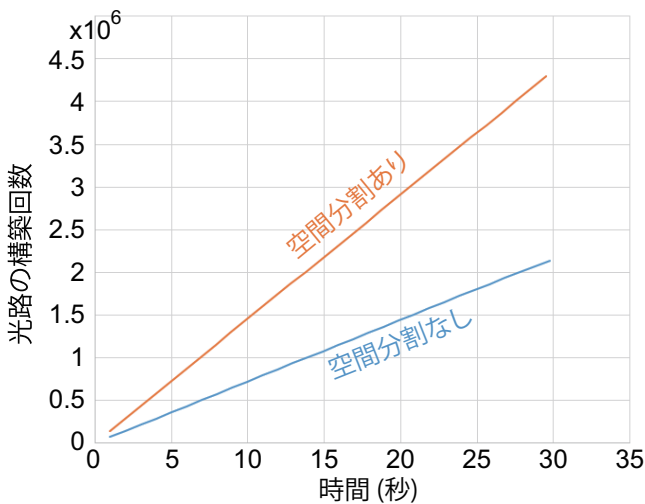


図 4  $E = 10, K = 10$  とした場合の、空間分割手法の有無による光路の構築回数の比較.

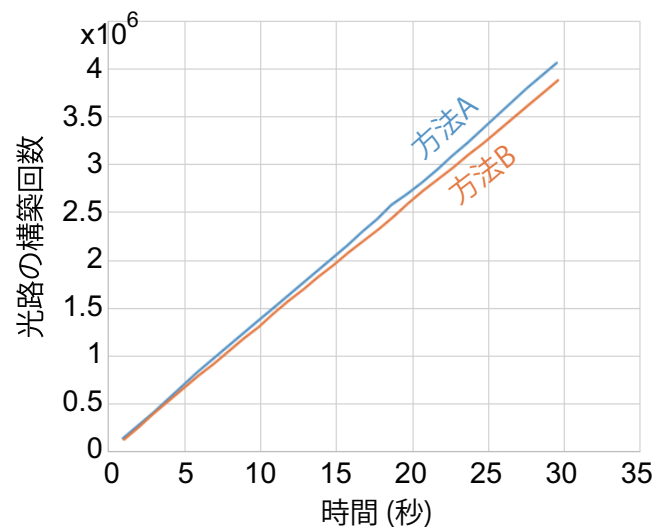


図 6 方法 A, B の光路構築回数の比較.

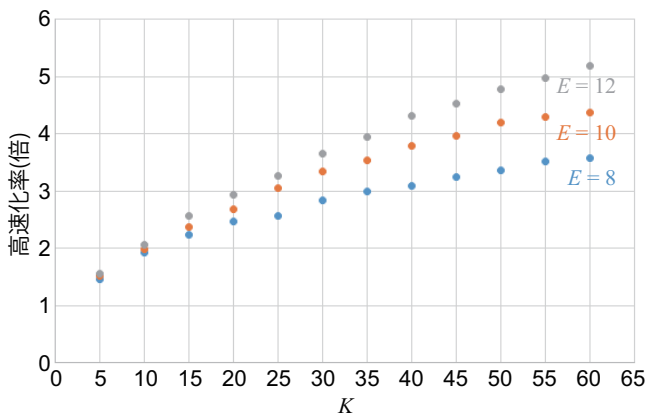


図 5 パラメータ  $E$  と  $K$  を変えた時の高速化率.

コントラストをコントロールするために導入しており、 $E$  を大きくすることで有意に 0 より大きい値を持つ場所をより小さい領域に限定できる。また、 $K$  は媒質の濃さをコントロールするために導入しており、大きいほど媒質を濃くできる。 $K > 0, E \geq 1$  とする。こうして得られた  $\tau$  をもとに、式 (19) によって非指数型媒質の消散係数を用意する。

光源には、ライトプローブ画像 [13] を環境光源として用

いた。媒質がない場合のレンダリング結果を図 3 (a) に示す。まず、パラメータを  $E = 10.0, K = 10.0$  とした時に、空間分割ありとなしの場合で 1,800 秒かけてレンダリングした結果をそれぞれ、図 3 (b), 3 (c) に示す。また、それぞれの場合における光路構築回数をレンダリング時間に対してプロットしたものを図 4 に示す。なお、空間分割ありの場合で十分計算時間をかけて (35,119 秒) 作成した画像を図 3 (d) に示す。図中で黒く霧がかっているものが媒質である。図 4 の結果から、この例については、(一様格子による) 空間分割を利用することで、非指数型媒質のレンダリングが約 2 倍高速化されることがわかった。

次に、パラメータ  $E$  と  $K$  をそれぞれ変えた場合の、空間分割あり/なしでのレンダリングの高速化率を図 5 に示す。この結果から、これらの場合について、(一様格子による) 空間分割を利用することで、非指数型媒質のレンダリングが約 1.5 から 5 倍高速化されることがわかった。また、このグラフより、 $E$  を固定した場合には  $K$  が大きいほど高速化率が高く、 $K$  を固定した場合には  $E$  が大きいほど高速化率が高いことが読み取れる。

最後に、方法 A と方法 B の性能比較の結果を図 6 に示す。方法 B でも、空間分割なしの場合に比べて高速化が

見られるが、その高速化比は方法 A の場合よりも若干低かった。本研究で考えた  $\sigma(\mathbf{x}, s)$  のモデル (19) は、 $s$  による  $\sigma(\mathbf{x}, s)$  の値の変化が  $s$  が増加すると少なくなるので、 $b$  を  $kW$  のように一定間隔で設定した方法が適切でなかった可能性が考えられる。

## 6. まとめと今後の課題

本研究では、非指数型媒質と呼ばれる、粒子分布に相関がある媒質のレンダリングについて考えた。従来の指数型媒質の自由行程サンプリングに利用されるデルタトラッキングを空間分割によって高速化する手法が非指数型媒質に対しても適用できるという知見を得た。また、オクターブノイズに基づいて作成した媒質に対して、一様格子による空間分割を用いた手法がデルタトラッキングよりも約 1.5 から 5 倍高速となることがわかった。

今後は、八分木や kd-木などの空間分割を活用した方法や、方法 B において、 $b$  としてアダプティブに間隔を設定するなどの方法を検討していきたい。

## 参考文献

- [1] Ishiniaru, A. and Kuga, Y.: Attenuation constant of a coherent field in a dense distribution of particles, *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 72, No. 10, pp. 1317–1320 (1982).
- [2] Boissé, P.: Radiative transfer inside clumpy media: the penetration of UV photons inside molecular clouds, *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 228, No. 2, pp. 483–502 (1990).
- [3] Davis, A., Marshak, A., Wiscombe, W. and Cahalan, R.: Scale Invariance of Liquid Water Distributions in Marine Stratocumulus. Part I: Spectral Properties and Stationarity Issues, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 53, No. 11, pp. 1538–1558 (1996).
- [4] Bitterli, B., Ravichandran, S., Müller, T., Wrenminge, M., Novák, J., Marschner, S. and Jarosz, W.: A Radiative Transfer Framework for Non-Exponential Media, Vol. 37, No. 6 (2018).
- [5] Guo, J., Chen, Y., Hu, B., Yan, L.-Q., Guo, Y. and Liu, Y.: Fractional Gaussian Fields for Modeling and Rendering of Spatially-Correlated Media, Vol. 38, No. 4 (2019).
- [6] Woodcock, E., Murphy, T., Hemmings, P. and Longworth, T.: Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry, *Proc. Conference on the Application of Computing Methods to Reactor Problems, ANL-7050*, pp. 557–579 (1965).
- [7] Perlin, K. and Hoffert, E. M.: Hypertexture, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH 89)*, Vol. 23, ACM, pp. 253–262 (1989).
- [8] Yue, Y., Iwasaki, K., Chen, B.-Y., Dobashi, Y. and Nishita, T.: Unbiased, Adaptive Stochastic Sampling for Rendering Inhomogeneous Participating Media, *ACM Transactions on Graphics (Proc. of SIGGRAPH ASIA 2010)*, Vol. 29, No. 6, pp. 177:1–177:8 (2010).
- [9] Coleman, W.: Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 32, pp. 76–81 (1968).
- [10] Yue, Y., Iwasaki, K., Chen, B.-Y., Dobashi, Y. and Nishita, T.: Toward Optimal Space Partitioning for Unbiased, Adaptive Free Path Sampling of Inhomogeneous Participating Media, *Computer Graphics Forum (Proc. of Pacific Graphics 2011)*, Vol. 30, No. 7, pp. 1911–1919 (2011).
- [11] d’Eon, E.: A Reciprocal Formulation of Nonexponential Radiative Transfer. 2: Monte Carlo Estimation and Diffusion Approximation, *Journal of Computational and Theoretical Transport*, Vol. 48, No. 6, pp. 201–262 (2019).
- [12] Perlin, K.: Improving noise, *Proc. SIGGRAPH 2002*, ACM, pp. 681–682 (2002).
- [13] Debevec, P.: Eucalyptus Grove, <https://www.pauldebevec.com/Probes/>.