組合せゲーム理論を用いた七並べの解析

木谷 裕紀[1,a)]　末續 鴻輝[2,b)]

概要：七並べは日本で遊ばれるトランプカードゲームの中でも認知度，人気が高い遊びである．本研究では二人で行う札の枚数を一般化した七並べについて先にパスをしたプレイヤが負けという亜種のゲームを定義し，組合せゲーム理論を用いてその解析を行う．組合せゲーム理論は部分局面に分解できるゲームにおける必勝戦略保持者や有用な戦略を導くために培われた学問体系の一つである．まず，その必勝戦略保持者が札の総枚数の線形時間で得られることを示す．また，オールマイティ札と呼ばれる特殊札を含めても線形時間で必勝戦略保持者を計算することができることを示す．

Analysis of Sevens using Combinatorial Game Theory

Kiya Hironori[1,a)]　Suetsugu Koki[2,b)]

1. はじめに

七並べはカードを用いて行う多人数不完全情報ゲームであり，日本全国で人気が高い遊びである他，Fan-Tan や Sevens など海外にも多くの類似の遊びが存在する．このゲームは一般に多人数不完全情報ゲームであり，必勝戦略は存在しないことが多い．近年，将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究が AI 分野，解析分野共に進んでいるとともに, 不完全情報ゲームについても AI の実力が向上している他, 確率などを用いた解析を行うものや一部完全情報にすることで, そのゲームの解析を行う研究が盛んに行われている [1], [2], [3].

本研究では二人で行う札の枚数を一般化した七並べについて先にパスをしたプレイヤが負けという亜種のゲームである「パス七並べ」を定義し，組合せゲーム理論を用いてその解析を行う．組合せゲーム理論は部分局面に分解できるゲームにおける必勝戦略保持者や有用な戦略を導くために培われた学問体系の一つである．本研究では，最初にその必勝戦略保持者が札の総枚数の線形時間で得られることを示す．また，オールマイティ札と呼ばれる特殊札を含めても線形時間で必勝戦略保持者を計算することができることを示す．

1 名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻
Department of mathematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University
2 国立情報学研究所
National Institute of Informatics
a) kiya.hironori@f.mbox.nagoya-u.ac.jp
b) suetsugu.koki@gmail.com

2. 定義

まず本研究の基礎となる k スート m 枚で行う二人パス七並べを以下のようにモデル化する: 組合せゲーム理論の慣習に従い，まず，ゲームを行う二人のプレイヤを片方を**左**あるいは**左プレイヤ**，もう片方のプレイヤを**右**あるいは**右プレイヤ**と呼ぶ．各札にはスートがついており，それぞれの札は値とスートを持つ (一般の七並べはスートの長さが 6，スート数が 8 である．スート数が 4 ではなく 8 であるのは，各スートの 7 より大きい部分と 7 より小さい部分を独立したものとしてみなすためである．また，スートの長さが 6 であるのはそれぞれの 1 から 6 の札と 8 から K の札に対応する).

プレイヤに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい．札の番号は札を出すことができる場所に対応している．この設定の下，以下の形でゲームを進める．

パス七並べのルール

- 先手後手を決め，**先手プレイヤ**，**後手プレイヤ**の順に交代で，手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく．各プ

レイヤが札を出すことのできる機会のことを**手番**と呼ぶ.
- 場は最初，各スートに 0 の札のみ置かれている.
- 手番のプレイヤは，自身の手札の中から場に出ている札のと同じスートの札である札の中から場に出ている札の値よりも真に 1 のみ大きい値の札を 1 枚出すことができる．このとき，出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる (場に出ている札は今出した札に代わる)．この場合，手番はもう一人のプレイヤに移る.
- いずれかのプレイヤの場に出すことができる札がなくなった時点で終了であり，この場合直前のプレイヤ，つまり最後に手札を出したプレイヤが勝ちである.

この七並べは一般に広く遊ばれている七並べとルールが異なる点として勝敗の決め方がある．通常の七並べルールでは，ゲーム中に脱落することなく，手札の最後の札を出し切ったプレイヤが勝ちというルールが一般的である．本研究で扱うパス七並べのルールは通常の七並べから「最後の札を出し切ったプレイヤの勝ち」というルールを取り除き,「ゲーム中の脱落」として多く採用されている各プレイヤの n 回目のパスの宣言時にゲームを脱落するというルールを 0 回に限定したものである. 一般の七並べにおいては一人当たりのパスの回数として 3 回や 5 回に限定しているものが多いが本稿では 0 回に限定する．これは以下の定理より自然な拡張であるといえる.

定理 1. 二人パス七並べの局面 $\mathcal{G}$ において以下の二つは必要十分条件である.
- パス 0 回制約ゲームにおいて $\mathcal{G}$ は 左プレイヤ必勝である.
- パス p 回制約ゲームにおいて $\mathcal{G}$ は 左プレイヤ必勝である.

この定理の証明に以下のチェルメロの定理を利用する.

命題 1. ゲームの長さが有限の引き分けのない二人完全情報ゲームのうち，逐次手番で各プレイヤの選択に偶然の要素が影響しないゲームはいずれかのプレイヤに必勝戦略が存在する [4].

本研究で扱うパス七並べはチェルメロの定理の適用条件である「引き分けのないゲームである」,「二人プレイヤゲームである」,「完全情報ゲームである」,「逐次手番ゲームである」「各プレイヤの行動に偶然の要素が影響しない」のすべての条件を満たしていることに留意されたい．このチェルメロの定理を認めた上で以下では証明を行う.

証明. まず，十分性が成立することを示す.

[十分性の証明] パス 0 回制約ゲームにおいて左プレイヤ必勝である局面 $\mathcal{G}$ を考える．パス p 回制約ゲームにおいて，この局面をプレイするとき，左プレイヤはパス 0 回制約ゲームにおける必勝戦略を用いる．また，右プレイヤがパスをしてきたときは必ず左プレイヤもパスをする．このようにすることで，右プレイヤはパス 0 回制約ゲームと同じ手順で勝つことができる.

次に必要性が成立することを示す.

[必要性の証明] 必要性を示すには,「パス p 回制約ゲームで $\mathcal{G}$ が左プレイヤ必勝ならばパス 0 回制約ゲームにおいて $\mathcal{G}$ は左プレイヤ必勝である」を示せばよい．これを命題 P とする．この対偶 P' を考えると「パス 0 回制約ゲームで $\mathcal{G}$ が左プレイヤ必勝でないならばパス p 回制約ゲームにおいて $\mathcal{G}$ は左プレイヤ必勝でない」となる．またチェルメロの定理より，左プレイヤ必勝でないすべてのゲームは右プレイヤ必勝であるので，対偶 P' は「パス 0 回制約ゲームにおいて $\mathcal{G}'$ が右プレイヤ必勝であるならばパス p 回制約ゲームにおいても右プレイヤ必勝である」と同値である．この命題 P' は十分性とほとんど同一の議論により真であることが分かる．よって命題 P も真となる.

以上の議論より本定理は示された. □

本研究ではこのパス七並べにおける必勝戦略保持者を導く他に，オールマイティ札が入った亜種に関しても議論を行う．オールマイティ札は通常の七並べにおける JOKER 札の役割の一つであり，地域やコミニティによっていくつかの異なったルールで遊ばれているが本研究では「任意のタイミングで場に出ている札の値よりも真に 1 のみ大きい値の札の代わりに出すことができる札 (ただし手番に含まれない)」とする．つまり，任意のタイミングで自分の保有していない札の代わりに一枚出すことができる札となる．この札は他の札同様，使用後は手札に残らないことに留意されたい (いくつかのルールでは使用後に相手プレイヤに渡るルールが存在するが今回は採用しない).

3. 局面の値

パス七並べにおいて，プレイヤはいずれかのスートを選び一手着手を行う．複数のスートに同時に着手することはできない．従って，それぞれのスートは独立していると考えることができる．囲碁など様々なゲームにおいて，このようにゲームの局面を独立した部分に細分化できることが知られているが，このようなゲームにおいては組合せゲーム理論を用いた解析が特に有効になることが多いため，本研究も組合せゲーム理論を適用する．本節では組合せゲーム理論を踏襲してパス七並べの局面に値を与える．パス七並べにおいて, この局面に与える値は盤面に対してどちらがどれだけパスをせずにその手を打つことができるかに対応しており, お互いが自身にとって最適な着手をした場合において, 局面の値が正ならば左プレイヤが, 負ならば右プレイヤがより多く (パスをすることなく) 盤面に手を打つことができる. 組合せゲーム理論について詳しい局面の値の定義は参考文献 [5], [6] を参照されたい.

3.1 局面の値に関する定義

ゲーム全体の局面の値は，それぞれの局面の値の和で表せることが知られているため，以下では単独のスートの値のみを考える．ゲームの局面を数と L，R の文字列を用いて表す．すなわち，すでに場に出されている札は数，場に提出されていない札, つまりプレイヤの手札内にある札は, それぞれを持っているプレイヤに応じて左が持っているなら L，右がもっているなら R で表す．つまり, 局面が $\underline{01LLRL}$ と表された場合，既に場に出ている札が 0 と 1 であり，左が持っている札が $2, 3, 5$，右が持っている札が 4 となる．また任意の数を k, 任意の文字列を X, Y と表す．

3.2 パス七並べにおける局面の値

以下では，パス七並べにおけるゲームの値に関する定理を述べる．等号は組合せゲーム理論の意味での等号，すなわちゲームの値が等しいことを意味している．

定理 2. 以下の等式が成立する : $\underline{0XkY} = \underline{0XY}$,
特に，$\underline{01\ldots(k-1)kX} = \underline{0X}$.

定理 2 は場に置かれている札を無視して局面の値を計算してよいことを表している. この成立は明らかであるため, 証明は省略する. また定理 2 で起こるようなスートの途中に場の札が置かれている状況は本問題設定では起こりえないが, 3 人以上で行う七並べの終盤においてあるプレイヤが脱落することによ同一の局面が現れる可能性がある. また, 以下の定理 3 が成立する.

定理 3. 以下の二つの等式が成立する :

$$\underline{0LX} = \begin{cases} \underline{0X} + 1 & (\underline{0X} \geq 0), \\ 0 & (\underline{0X} < 0). \end{cases}$$

$$\underline{0RX} = \begin{cases} \underline{0X} - 1 & (\underline{0X} \leq 0), \\ 0 & (\underline{0X} > 0). \end{cases}$$

証明. $\underline{0LX} = \{\underline{0X} \mid\}, \underline{0RX} = \{\mid \underline{0X}\}$ より成立する． □

この証明を組合せゲーム理論の言葉を用いずに解釈すると次のようになる: 一文目の $\underline{0LX} = \{\underline{0X} \mid\}$ は盤面 $\underline{0LX}$ に対して, 左プレイヤが手を打つことによって盤面 $\underline{0X}$ となり, 盤面 $\underline{0LX}$ に対して，右プレイヤは手を打つことができないことを表している. 二文目の $\underline{0RX} = \{\mid \underline{0X}\}$ は盤面 $\underline{0RX}$ に対して, 右プレイヤが手を打つことによって盤面 $\underline{0X}$ となり, 盤面 $\underline{0RX}$ に対して，左プレイヤは手を打つことができないことを表している. また, この定理より次の系が直ちに導かれる.

系 1. $\underline{0LRRX} = \underline{0RLLX} = 0$

系 1 の重要な点は，パス七並べの局面が与えられたとき，連続する二つのカードの手札を同じプレイヤが持っており，その前のカードが別のプレイヤの手札であれば，その三枚より大きい範囲においてはいずれのプレイヤが手札を持っているかに関わらず，ゲームの値を求めることができるという点である．

系 2.

$$\underline{0LL\cdots L} = k$$
$$\underline{0RR\cdots R} = -k$$

ただしそれぞれ，L, R は k 個連続しているとする．

系 3.

$$\underline{0LRLR\cdots LR} = \underline{0LRLR\cdots LRRX} = 0$$
$$\underline{0LRLR\cdots LRL} = \underline{0LRLR\cdots LRLLX} = 1$$
$$\underline{0RLRL\cdots RL} = \underline{0RLRL\cdots RLLX} = 0$$
$$\underline{0RLR\cdots RLR} = \underline{0RLRL\cdots RLRRX} = -1$$

以上の定理により，パス七並べの局面は簡単にゲームの値を求めることができるとわかる．具体的には，以下の Algorithm1 を用いればよい．

また，これらの定理より次の系を導くことができる．

系 4. 各文字列の最も左の L を数に変更したとき，そのスートの値は 1 以上減少する．

系 5. 各文字列の最も左の R を数に変更したとき，そのスートの値は 1 以上増加する．

これらの定理，系，アルゴリズムを用いて 4 章では証明を行う．

4. 主結果

本節ではパス七並べとオールマイティ札が入ったその亜種についての必勝戦略保持者を決定する計算時間についての結果を述べる．

4.1 パス七並べの必勝戦略保持者判定

本節ではパス七並べの必勝戦略保持者判定の計算時間を議論する．

定理 4. パス七並べの必勝戦略保持者がどちらであるかという判定は札の総枚数に関して線形時間で行うことができる．

証明. 以下の Algorithm2 を使うことによって線形時間で解くことができることを示す．このとき，Algorithm2 は各札の参照を高々定数回しか行わないことを留意したい．従って Algorithm2 は線形時間で終了する．また，続いて正当性を示す．一般性を失うことなくスートの値の和が 0 より大きいとする．左プレイヤは各手番において Algorithm3 に従って手を打つことによって必ず勝てることを示す．このとき，正のスートに対して手を打つとスートは必ず 1 減少し，相手プレイヤの手によって相手プレイヤがパスをしないのであればゲーム内のいずれかのスートは 1 以上必ず増加する．このとき，各スートの和は 0 より大きい状態が

Vol.2020-GI-43 No.28
2020/3/14

Algorithm 1 ゲームの値判定アルゴリズム

```
if 最も左の非数が L then
    if 連続した k 個の L だけで局面が終わる then
        return k
    else { 連続した k 個の L のあとに，2 個以上 R が続く }
        return k − 1
    else { 連続した k 個の L があり，その後 R と L が交互に続く }
        if RLRL···RLL となり，ここで終わるかさらに何か続く then
            return k
        else {RLRL···RLRR となり，ここで終わるかさらに何か続く }
            return k − 1
        else {RLRL···RL となり，終わる }
            return k
        else {RLRL···RLR となり，終わる }
            return k − 1
        end if
    end if
else { 最も左の非数が R}
    if 連続した k 個の R だけで局面が終わる then
        return −k
    else { 連続した k 個の R のあとに，2 個以上 L が続く }
        return −k + 1
    else { 連続した k 個の R があり，その後 L と R が交互に続く }
        if LRLR···LRR となり，ここで終わるかさらに何か続く then
            return −k
        else {LRLR···LRLL となり，ここで終わるかさらに何か続く }
            return −k + 1
        else {LRLR···LR となり，終わる }
            return −k
        else {LRLR···LRL となり，終わる }
            return −k + 1
        end if
    end if
else
    return 0
end if
```

Algorithm 2 パス七並べ判定アルゴリズム

1: Algorithm 1 を用いて各スートの値を求める．
2: 各スートの値の和を計算する
3: スートの値の和が 0 より大きいなら左プレイヤ，0 より小さいなら右プレイヤ，0 なら後手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する．

Algorithm 3 パス七並べにおける左プレイヤの戦略

1: Algorithm 1 を用いて各スートの値を求める．
2: 値が正である任意のスートに対し，手を打つ．操作 1 に戻る．

維持される．全てのスートの値が 0 より大きくなった時，定義より右プレイヤはどのスートにも着手できない．従ってこのとき，左プレイヤ必勝である．同様の議論でスートの値の和が 0 以下の場合も示すことができる．以上より本定理は示された． □

4.2 オールマイティ札 1 枚のパス七並べの必勝戦略保持者判定

定理 5. パス七並べにおいて, 札の総枚数を n とし, どちらかのプレイヤが 1 枚のみオールマイティ札を手札に保持しているとする．このとき, 必勝戦略保持者がどちらであるかという判定は n に関して線形時間で行うことができる．

証明． 一般性を失うことなく左プレイヤがオールマイティ札を持つとする．このとき，以下の Algorithm4 を使うことによって線形時間で解くことができることを示す．このとき，Algorithm4 は各札の参照を高々定数回しか行わないことを留意したい．従って Algorithm4 は線形時間で終了する．次に Algorithm4 が正しい勝者を出力していることを確認する．まず．操作 4 で求めた値が正の数のとき，オールマイティ札を用いずとも左プレイヤは勝利できるのでこのとき Algorthm4 は正しく出力していることは明らかである．次に，Algorithm4 において操作 4 で求めた値が 0 以下であり，操作 5 で求めた値が正の時，Algorithm6 を用いることによって勝利できることを示す．まず, Algorithm6 の補助アルゴリズムとして Algorithm5 を定義する．次に, Algorithm6 を以下のように定義する． Algorithm4 において操作 4 で求めた値が 0 以下であり，操作 5 で求めた値が正ならば, Algorithm6 を使用することで, オールマイティ札を必ず使用でき, また, オールマイティ札使用後の盤面において必ずゲームにおける各スートの値の和は正になって

Algorithm 4 オールマイティ札有りパス七並べ判定アルゴリズム

1: Algorithm 1 を用いて各スートの値を求める．
2: 各スートに対し，右プレイヤの持つ一番数字の小さい札 (文字列のうち一番最初に出てきた R)1 枚を削除した場合の値を Algorithm 1 を用いて求める．
3: 各スートにおいて，操作 1 で求めた値と操作 2 で求めた値の差を求め，そのうち最も大きい差の値の絶対値を求める．
4: 操作 1 で求めた値の和を計算する．
5: 操作 3 で求めた値と操作 4 で求めた値の和を計算する．
6: 操作 5 で求めた値が 0 より大きいなら左プレイヤ，0 より小さいなら右プレイヤ，0 なら後手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する．

Algorithm 5 補助アルゴリズム

1: Algorithm 1 を用いて各スートの値を求める．
2: 各スートに対し，右プレイヤの持つ一番数字の小さい札 (文字列のうち一番最初に出てきた R)1 枚を削除した場合の値を Algorithm 1 を用いて求める．
3: 各スートにおいて，操作 1 で求めた値と操作 2 で求めた値の差を求め，その差が最も大きいスートをスート A とする．操作 1 で求めた各スートの値をスート A のみ操作 2 の値に更新する．
4: スート A に対して, オールマイティ札が出せるならばオールマイティ札を出す．

Algorithm 6 オールマイティ札有りパス七並べにおける左プレイヤの戦略

1: オールマイティ札を保持しているならば, Algorithm5 を行う．その後各手番において操作 2 から操作 8 を行う．
2: オールマイティ札を保持していないとき, Algorithm3 を行う．
3: オールマイティ札を保持しているならば, 以下の操作 4 から操作 8 を行う．
4: Algorithm 1 を用いて各スートの値を求める．
5: 各スートに対し，右プレイヤの持つ一番数字の小さい札 (文字列のうち一番最初に出てきた R)1 枚を削除した場合の値を Algorithm 1 を用いて求める．
6: 各スートにおいて，操作 4 で求めた値と操作 5 で求めた値の差を求め，その差が最も大きいスートを新たにスート A とする．操作 4 で求めた各スートの値をスート A のみ操作 5 の値に更新する．
7: 操作 6 で更新した値が正である任意のスートに対し，手を打つ．
8: スート A に対して, オールマイティ札が出せるならばオールマイティ札を出す．

いる．従って定理 4 と同様の議論により, 左プレイヤ必勝である．また，Algorithm4 において操作 4 で求めた値が 0 以下であり，操作 5 で求めた値も 0 の時，オールマイティ札をどこに使用しても各スートの和は最大 0 である．また, Algorithm6 を使用することでスートの和 0 を必ず実現可能である．従って, 定理 4 と同様の議論により, 後手必勝である．最後に，Algorithm4 において操作 4 で求めた値が 0 以下であり，操作 5 で求めた値も負の時，オールマイティ札をどこに使用しても各スートの和は負になるので定理 4 と同様の議論により, 右プレイヤ必勝である．従って定理は示された． □

5. まとめと今後の展望

本稿では二人で行う七並べの亜種を定義し，その最適戦略を調べた．まず，定理 2，3 に示すようにパスを最初にしたプレイヤの負けとする七並べにおいて枚数に関して線形時間でその必勝戦略保持者がどちらであるかという判定を行うことができることを示した．また, 本研究ではオールマイティ札に関して単純な設定においてその必勝戦略保持者がどちらであるかという判定が線形時間で行えることを示した．実際に行われる七並べには JOKER 札に関する幅広いルール設定が考えれるが, それらの設定で問題を解く際のサブルーチンとして本研究が有効に機能することが期待される．また,「ある札に関して両方のプレイヤが所持あるいは両方のプレイヤが未所持であってもよい」という拡張や、実際の七並べの拡張でもある「ある札を出した時、別のスートの最大札からも札を出すことが可能である (七並べにおいて K を出すとそのスートの A からも出すことができるルールがある)」という拡張が七並べには考えられるが本研究の結果はそのような問題においても比較的高速に必勝戦略保持者がどちらであるかという判定できる可能性を示唆している．一方で七並べにおいてのもう一つの勝利条件である「先に全ての手札を出し切ったプレイヤの勝ちとする」というルールや 3 人以上で行う場合などは本稿の提案アルゴリズムはそのままでは対応できない．しかしながらそういったより一般化した設定において, よりよい戦略を考える上での終盤解法の一つとしても, 本研究が有効に働くことを期待している．

参考文献

[1] 木村 勇太, 伊藤 毅志, :深層強化学習を用いたガイスター AI の構築, ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集, 2019, pp.130–pp.135
[2] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆, :不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル. ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集, 2019, pp.258–pp.265.
[3] 畢暁恒, 田中哲朗, :対話のない人狼ゲームの戦略. ゲームプログラミングワークショップ 2015 論文集, 2015, pp.25–pp.30.
[4] Ulrich S.，Paul W.，:Zermelo and the Early History of Game Theory，Games and Economic Behavior，vol.34, number 1，pp.123 – 137,(2001)
[5] Albert M．H.，Nowakowski R．J.，Wolfe D.，川辺治之訳, : 組合せゲーム理論　勝利の方程式，共立出版 (2011).
[6] Siegel A．N.，: *Combinatorial Game Theory*, American Mathematical Society(2013).