Vol.2020-AL-177 No.9
2020/3/16

四つ組の非推移的サイコロの混合戦略

盧 尚[1]　来嶋 秀治[1]

概要：小松と小野は，任意の一般化ジャンケンにおいて，手数が偶数の場合は戦略的に無駄な手が存在する，すなわち Nash 均衡において出す確率が 0 の手が必ず存在することを示している。本研究では，非推移的サイコロの Nash 均衡について議論する。

キーワード：ナッシュ均衡，非推移性，数理計画，トーナメントグラフ，

1. はじめに

通常の勝敗関係のゲームと異なり，サイコロのゲームは確率的に勝敗が決まる。たとえば, プレイヤー 1 とプレイヤー 2 は 3 個のサイコロ組 $A = \{8, 7, 1\}, B = \{6, 5, 3\}, C = \{9, 4, 2\}$ からそれぞれ一つを選び，サイコロを投げる。プレイヤー 1 が勝つためには, どのサイコロを選べばよいか? 目の出る確率は等しく 1/3 として，計算すると，サイコロ A がサイコロ B に勝つ確率は 2/3 であり，サイコロ B がサイコロ C に勝つ確率は 5/9 であり，サイコロ C がサイコロ A に勝つ確率は 2/3 である。どのようにサイコロを選ぶべきであろうか？

サイコロを頂点とし，勝敗関係を矢印で示すと，トーナメントグラフが得られる。Schaefer と Schweig[4] は，まず，任意の個数のサイコロで非推移的サイコロの組が構成できることを示し，さらに，任意のトーナメントグラフから対応するサイコロの組が生成できることを示した。ジャンケンのゲームでも，手の間に勝負関係があるため，それぞれの手が各頂点に対応し，勝負関係が矢印で示され，対応するトーナメントグラフが生成される。小松と小野 [2] は一般化ジャンケンに対し，戦略的に無駄な手がないジャンケンについて議論した。ジャンケンゲームでは，3 手以上の奇数手ゲームの中の最適戦略に対応するすべての手の出す確率が正の場合が存在する。例えば，奇数手のグラフの中に，平衡トーナメントグラフが存在するので，確率は同じかつ正である場合が存在する。すべての手が出す可能性があるので，これらの手は意味があるといえる。しかし，偶数の場合はすべての手に意味があるとは限らない。小松と小野は，手数が偶数の場合に，ナッシュ均衡において出す確率が 0 の手，すなわち，戦略的に無駄な手が必ず存在することを示している。

4 手の勝敗関係には同型を除いて，4 通りある。そのうち，3 通りには必勝手，もしくは必敗手が存在するため，混合ナッシュ均衡解において選ぶ確率が 0 の手，すなわち，戦略的に無駄な手が存在する。残る 1 つのパターンに対しても，無駄な手が存在することが示され，すなわち，その手を選ぶ確率は 0 である。サイコロのゲーム間では確率的に勝つため，お互いの矢印が単純な勝敗すなわち 1 と－1 の関係ではない。本稿では 4 つのサイコロに戦略的な価値がある，すなわち最適戦略では選択確率がすべて正になる場合があることを示す。

本論文の二章で，討論するサイコロの組を定義し，対応する利得行列，ナッシュ均衡，グラフの作り方を述べる。三章で，無駄な手の定義に基づいて，無駄なサイコロと戦略的に無駄なサイコロを定義し，サイコロは四つ組の場合もサイコロを選択する確率はすべて正となるナッシュ均衡が存在することを証明する。四章で，3 つサイコロのナッシュ均衡は容易に求まることを証明する。また，中立サイコロはゲームにおいて純戦略であることを示す。最後に，ナッシュ均衡と行列のランクの関係を考える。

2. 準備

本論文は n 面のサイコロを n 個の正整数の集合と定義する。二つの n 面サイコロ $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ と $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ が与えられる時, 利得 $w(A, B) = -w(B, A) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u(a_i, b_j)$ とする。ただし,

$$u(a_i, b_j) = \begin{cases} 1 & (a_i > b_j) \\ 0 & (a_i = b_j) \\ -1 & (a_i < b_j) \end{cases}$$

とする。

[1] 九州大学システム情報科学府

例として，サイコロ $A = \{8,7,1\}, B = \{6,5,3\}$ とする。各目を比べて，A の目 a_i が B の目 b_j より大きければ $u(a_i, b_j) = +1$，小さければ $u(a_i, b_j) = -1$ の利得を得るとし，A と B の利得 u は表 1 に表される。

表 1 サイコロ A, B に対する $u(a_i, b_j)$ の表

A \ B	6	5	3
8	1	1	1
7	1	1	1
1	-1	-1	-1

この時 A の期待利得は $w(A,B) = -w(B,A) = \frac{6-3}{9} = \frac{1}{3}$ である。なお，A と B を同時に投げて，A の目が大きい確率が $P(A > B) = \sum_{x_A \in A} P(x_A)P(x_A|x_A > x_B) = \frac{w(A,B)+1}{2} = \frac{2}{3}$ である。

また，$C = \{9,4,2\}$ とすると，A, B, C の期待利得行列 $W = (w(A,B))$ は

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/9 \\ 1/9 & -1/9 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

となる。

任意のサイコロの組を与え, 上式により相互の確率を計算して行プレイヤーから見た利得行列を $W = [w_{ij}]$ とし，対応するナッシュ均衡を求めるための定式化について議論する。

行プレイヤーの取る混合戦略を $x= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$，列プレイヤーの取る混合戦略を $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ とする。行プレイヤーの期待利得を最大にすることを目的とした数理計画問題は以下のように定式化される。[3]

$$\begin{aligned} & \max_{x_i} \min_{y_i} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i y_j \\ & s.t. \quad \sum_i x_i = 1, \\ & \qquad \sum_j y_j = 1, \\ & \qquad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \\ & \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

これを満たす x^*,y^* がそれぞれ行プレイヤー，列プレイヤーの最適戦略である。

この定式化は $x_i y_j$ といった二次項を含むが，最適解 x^* は以下の線形計画問題を解くことにより得られることが知られている。[3]

$$\begin{aligned} (P) \quad & Max. \quad z \\ & s.t. \quad \sum_i w_{ij} x_i - z \geq 0, \\ & \qquad j = 1,2,\ldots,n, \\ & \qquad \sum_i x_i = 1, \\ & \qquad x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

サイコロのゲームでは，各サイコロの互いに対戦するトーナメントグラフは以下のように定義する。

m 個の n 面のサイコロ $A_1, \ldots, A_m$ をグラフ G の頂点として，集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ と表す。利得を計算すると，$w(A_i, A_j) > 0 \Rightarrow (v_i \to v_j) \in G$ と書く。

本論文では，サイコロの四つ組に注目し，定義を行う。n 面のサイコロ $A, B, C, D \subseteq [4n]$ は，$|A| = |B| = |C| = |D| = n$,$A \cup B \cup C \cup D = [4n]$ を満たすものとする。各サイコロは公正であり，各目の出る確率は $1/n$ である。

3. 戦略的に無駄なサイコロ

戦略的に無駄なサイコロを定義するために，次の一般化ジャンケンの議論を利用する。

定義 3.1. *[2].* $G = (V, E)$ はジャンケンの勝敗トーナメントグラフとする。ある *2* 頂点 $u, v \in V$ が存在し，$(u, v) \in E$ かつ，任意の $w \in V \setminus \{u, v\}$ に対して，$(v, w) \in E$ ならば $(u, w) \in E$ であるとする。このとき u は v に優越するといい，u は無駄な頂点であるという。

トーナメントの無駄な頂点に対するサイコロは無駄なサイコロと呼ぶ。サイコロのナッシュ均衡に対して，0 が存在するとき，対応するサイコロがゲームを進めるとき，プレイヤはそのサイコロを 0 の確率で選択して使用する。この場合，確率 0 のサイコロは意味を持たなくなる。そこで，このサイコロは戦略的に無駄なサイコロと定義する。

定義 3.2. サイコロの組が与えられた時，ある最適戦略において確率 *0* となるサイコロを戦略的に無駄なサイコロと呼ぶ。

4 つのサイコロからなるゲームに，その戦略的に無駄なサイコロが存在しないかどうかを探索していく。

まず，4 頂点のトーナメントグラフは図 1 の四つのパターンが存在する。

(1) と (3) を考えると，頂点 C は明らかに他の頂点に勝つので，対戦する時必ず C に対するサイコロを選ぶ。よって，$x^*_{(1)} = (0,0,1,0), x^*_{(3)} = (0,0,1,0)$ であり，全部の確率が 0 より大きいナッシュ均衡は存在しない。

(2) を考えると，頂点 C は頂点 A,B,D に負けるので，

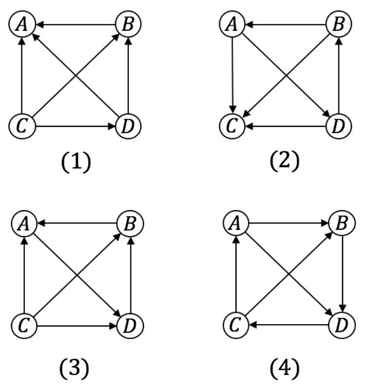

図 1 四つ頂点のトーナメントグラフのパターン

対戦する時 C のサイコロは選ばない。よって，$x^*_{(2)} = (x^*_A, x^*_B, 0, x^*_D)$ であり，全部の確率が 0 より大きいナッシュ均衡は存在しない。

(4) を考える。

定理 3.1. 四つとも戦略的に有効なサイコロの組が存在する。

証明. 四つのサイコロを

$A = 2 \quad 9 \quad 10 \quad 11$
$B = 4 \quad 7 \quad 8 \quad 16$
$C = 1 \quad 5 \quad 14 \quad 15$
$D = 3 \quad 6 \quad 12 \quad 13$

とする。正の混合ナッシュが存在することを示す。利得行列を計算すると，

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & -1/8 & -1/4 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & -1/8 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

を得る。定式化して以下のような線形計画問題を得る。

$$\begin{aligned} Max. \quad & v \\ s.t. \quad & 0x_A - \frac{1}{8}x_B + \frac{1}{8}x_C + \frac{1}{4}x_D \geq v \\ & \frac{1}{8}x_A + 0x_B - \frac{1}{8}x_C - \frac{1}{8}x_D \geq v \\ & -\frac{1}{8}x_A + \frac{1}{8}x_B + 0x_C - \frac{1}{8}x_D \geq v \\ & -\frac{1}{4}x_A + \frac{1}{8}x_B + \frac{1}{8}x_C + 0x_D \geq v \\ & x_A + x_B + x_C + x_D = 1 \\ & x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

計算すると $x^*_A, x^*_B, x^*_C, x^*_D$ は

$$\begin{cases} x^*_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^*_B \\ x^*_C = 1 - 2x^*_B \\ x^*_D = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^*_B \\ x^*_A \geq 0, x^*_B \geq 0, x^*_C \geq 0, x^*_D \geq 0 \end{cases}$$

と得られる。この時，$x^*_B \in [1/3, 1/2]$ は実行可能であり，具体的にナッシュ均衡は $0 \leq t \leq 1, x^*_{(4)} = t(1/3, 1/3, 1/3, 0) + (1-t)(1/4, 1/2, 0, 1/4)$ として得られる。したがって，全部の確率が正のナッシュ均衡が存在する。

□

4. その他の議論

4.1 利得とナッシュ均衡

3 つ組のサイコロの場合はナッシュ均衡が容易に求まることを示す。

定理 4.1. 3 つサイコロ A,B,C の期待利得は $w(A,B) = p, w(B,C) = q, w(C,A) = r$ とし，$p, q, r > 0$ とする。この時ナッシュ均衡は $x^* = (\frac{q}{p+q+r}, \frac{r}{p+q+r}, \frac{p}{p+q+r})$ である。

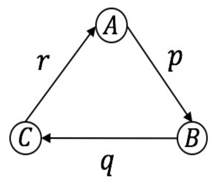

図 2 三つ頂点のサイクル

証明. サイコロ A,B,C の利得行列は

$$W = \begin{bmatrix} 0 & p & -r \\ -p & 0 & q \\ r & -q & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

である。

定式化して以下のような線形計画問題を得られる。

$$\begin{aligned} Max. \quad & v \\ s.t. \quad & 0x_A + px_B - rx_C \geq v \\ & -px_A + 0x_B + qx_C \geq v \\ & rx_A - qx_B + 0x_C \geq v \\ & x_A + x_B + x_C = 1 \\ & x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

次は、$x^* = (\frac{q}{p+q+r}, \frac{r}{p+q+r}, \frac{p}{p+q+r})$ を (4) に代入する

と，$0 \geq v$ を得られる。よって，$v_{max} = 0$ である。2 人ゼロ和ゲームより，$v_{max} = \min\max$ であるので，$x^* = (\frac{q}{p+q+r}, \frac{r}{p+q+r}, \frac{p}{p+q+r})$ はナッシュ均衡である。 □

4.2 中立的なサイコロのナッシュ均衡

n 面の標準的なサイコロ $\{1, \ldots, n\}$ はある条件の下で，中立的であることが知られている。[1]

定理 4.2. n 面サイコロの集合 $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{1, 2, \ldots, n\}^n | \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(n+1)}{2}; \forall i \leq j, a_i \leq a_j\}$ とする。この時，標準的なサイコロ $A = \{1, \ldots, n\}$ は，$\forall B \in \Omega, w(A, B) = 0$，即ち，中立的である。

中立的なサイコロでゲームを行うときに，相手はどのサイコロを出しても標準的なサイコロと引き分ける。

定理 4.3. 集合 Ω において中立的なサイコロは純ナッシュ均衡解である。

証明. 集合 Ω から任意の $m-1$ 個サイコロをとって，中立的なサイコロと一緒に m 個サイコロのゲームを構成する。利得行列 $W = [w_{ij}]$ で表すと，以下のように示す。

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \ldots & w_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

ただし，$a_{11} = \cdots = a_{1m} = 0$。定式化して以下のような線形計画問題を得られる。

$$\begin{aligned} Max. \quad & v \\ s.t. \quad & 0x_1 + w_{12}x_2 + \cdots + w_{1m}x_m \geq v \\ & 0x_1 + w_{22}x_1 + \cdots + w_{2m}x_m \geq v \\ & \vdots \\ & 0x_1 + w_{m2}x_2 + \cdots + w_{mm}x_m \geq v \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \\ & x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$x^* = (1, 0, \ldots, 0)$ を (5) に代入すると，$0 \geq v$ を得られる。よって、$v_{max} = 0$ である。2 人ゼロ和ゲームより，$v_{max} = \min\max$ であるので，$x^* = (1, 0, \ldots, 0)$ はナッシュ均衡である。 □

5. まとめ

本論文では，四つとも戦略的に有効なサイコロの組を存在することを示した。

問題 5.1. 四つのサイコロの組の期待利得行列 w が $rank(w) = 3$ の時，常に正のナッシュ均衡は存在するか？

参考文献

[1] A. Hulko, and M. Whitmeyer. A Game of nontransitive Dice，arXiv:e-prints, June 2017.
[2] 小松 秀平, 小野 廣隆. 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解析. Kyushu University Institutional Repository, 2015.
[3] J. Matoušek and B. Gärtner, Understanding and Using Linear Programming, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
[4] A. Schaefer and J. Schweig, Balanced non-transitive dice, College Math. J., 48(2017), 10–16.