

# Min-Max Multiple TSP の CNF 符号化法

査 澳龍<sup>1,a)</sup> 野田 五十樹<sup>1,b)</sup>

**概要:** 本稿では、マルチエージェントの巡回セールスマン問題 (multiple traveling salesmen problem, mTSP) を、最長旅行距離の最小化という Min-Max 型の目的関数を持つ問題としていくつかの方法で定式化し、それを MaxSAT 問題として解く方法を構築する。この方法では、mTSP 問題をいくつかの方法で conjunctive normal form (CNF) に符号化して、MaxSAT ソルバに適用する。また、これらの方法について正確性および空間複雑さについても議論する。実験では、TSP のベンチマーク問題を mTSP 用に変更し、それらを用いて、提案手法を整数計画法と共に比較する。その結果、提案手法ではエンコードされた式の大きさを削減することができることが示された。また、IP との比較では、提案手法の 1 つが、大きな問題に対して IP を上回ることが示されている。

**キーワード:** 命題論理制約充足, Min-Max 最適化, Multiple traveling salesmen problem

## CNF Encodings for the Min-Max Multiple Traveling Salesmen Problem

AOLONG ZHA<sup>1,a)</sup> ITSUKI NODA<sup>1,b)</sup>

**Abstract:** In this study, we consider the multiple traveling salesmen problem (mTSP) with the min-max objective that minimizes the longest tour length. We start by reviewing an existing integer programming (IP) formulation of this problem. Then we novelly present several conjunctive normal form (CNF) encodings and an approach that is based on modifying a maximum satisfiability (MaxSAT) algorithm for the min-max mTSP. The correctness and the space complexity of each encoding are analyzed. In our experiments, we compare the performance of solving the TSP benchmark instances via an existing encoding and our new encodings by the proposed extended MaxSAT solver to that by IP method. The results show that for the same problem, the new encodings significantly reduces the number of generated clauses over the existing CNF encoding. Compared to IP method, one of the proposals is more effective on relatively large-scale problems, and it also has an obvious advantage over IP method in solving the instances with a small ratio of the number of cities to the number of salesmen.

**Keywords:** Boolean satisfiability, Min-max optimization, Multiple traveling salesmen problem

### 1. はじめに

理論的計算機科学の標準問題として、巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem, TSP) は幅広く研究されてきている。また、他の具体的問題との関連から、TSP のバリエーションも多く提案され、研究されている。マ

ルチエージェント巡回セールスマン問題 (multiple TSP, mTSP) も、そのバリエーションの 1 つである。この問題では、全てのセールスマンは同じ本部から出発し、各々異なる都市を回りながら全ての都市をカバーし、再び本部に戻る。本部以外の各都市は一人のセールスマンが一度だけ訪れることになる。この mTSP は、ミッションスケジュール問題、負荷分散問題、印刷スケジュール問題、複数車両経路探索、タクシーシェア問題など幅広い実問題と関連している。mTSP では、最適化問題として 2 種類の定義があ

<sup>1</sup> 産業技術総合研究所  
AIST, 1-1-1 Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305-85680, Japan

a) aolong.zha@aist.go.jp

b) i.noda@aist.go.jp

る。1つは、各セールスマンの経路長の合計を最小化する (*min-sum*) というものであり、もう1つは、各経路長の最大値を最小化する (*min-max*) というものである。これは、別の側面では、もし各経路をベクトルと考えると、*min-sum* 問題はマンハッタン距離の最小化であり、*min-max* 問題は、チェビシェフ距離の最小化である。これらの定式化の内、*min-sum* 問題では、各セールスマンの負荷がアンバランスになる解を求めがちである、という課題がある。また、利用者の不公平を低減するという目的には、*min-max* の定式化が優れている。このことから、本稿では、*mTSP* の *min-max* に基づく最適化に着目する。

## 2. 定式化

*mTSP* でセールスマンが回る地図は、グラフ  $G = (V, E)$  として定義される。ただし、 $V, E$  は各々、頂点と辺の集合である。各頂点間の距離は、距離行列  $D = (d_{ij})$  で表される。ただし、 $(i, j) \in E$  である。行列  $D$  は、 $d_{ij} = d_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in E$  の場合に対称それ以外を非対称と呼ぶ。

### 2.1 Min-Max *mTSP* の整数計画問題としての定式化

2次元グラフの性格から、*min-sum mTSP* は通常、割り付け型 *double-index* の整数計画問題として定式化される。一方、*min-max mTSP* では、各セールスマンへの辺の割り付けを区別するため、3次元の問題として定式化される。よって、ここでは2値変数  $x_{ijk}$  を導入し、辺  $(i, j)$  がセールスマン  $k$  に割り付けられていると、 $x_{ijk} = 1$ 、そうでなければ0とする。また、整数変数  $u_i$  (頂点  $i$  の *potential*) は、都市 (頂点)  $i$  がそこを尋ねるセールスマンが何番目にその都市を訪れるか、を示すとす。これらの変数を用いると、*min-max mTSP* は以下のように定式化出来る [9]。

$$\min \theta \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=2}^n x_{1jk} = 1, \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{j1k} = 1, \quad k = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1, \quad j = 2, \dots, n, \quad i \neq j \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1, \quad i = 2, \dots, n, \quad i \neq j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ijk} = \sum_{i=1}^n x_{jik}, \quad j = 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$u_i - u_j + (n - m) \cdot \sum_{k=1}^m x_{ijk} \leq n - m - 1, \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} d_{ij} x_{ijk} \leq \theta, \quad k = 1, \dots, m \quad (8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, \quad k = 1, \dots, m$$

ただし、本部を含む都市の数を  $n$ 、セールスマンの数を  $m$  ( $m \leq n$ ) である。制約 (2) (および制約 (3)) は、各セールスマン  $k$  について、本部 (頂点 1) を出発し、また、最後に戻ること保証する。制約 (4) (および制約 (5)) は、本部以外の都市はかならず1度だけ出発し、1度だけ到着することを示している。制約 (6) は、本部でない各都市について、一人のセールスマンが訪問する (異なるセールスマンが出入りしない) ことを示している。制約 (7) [5], [12] は、Miller et al. [8] により提案された *subtour elimination constraint* (SEC) を、MTZ-based SEC で表記したものである。ただし、生成される式および頂点の *potential* の範囲は  $O(n^2)$  となる。この制約は *subtours*、つまり、本部に寄らない小さなループの経路を抑制するために導入される。さらに、この制約は各セールスマンが最低1つの本部以外の都市を訪れることも示している。ここで、 $n - m$  は、各セールスマンが訪れることが出来る最大の都市数を示している。各頂点の *potential* は、セールスマンの行程の何番目で訪れるかを示す。目的関数 (1) は、全セールスマンの各行程の上限 (式 (8)) である補助変数  $\theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) を最小化する。

**Definition 1.** ここで、Min-Max 最適化問題 (Min-Max Optimization Problem, MMOP) を以下のように定義する。

$$\min_{k, \epsilon} \theta \quad \text{s.t.} \quad C \wedge \bigwedge_{k=1}^m \left( f(k, \epsilon) \leq \theta \right), \quad (9)$$

ただし、 $f(k, \epsilon)$  は、各  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) に対する個別のコスト関数、 $\epsilon$  は、その他の関連変数の集合、 $C$  は残りの制約である。特に、Min-Max *mTSP* の場合、 $f(k, \epsilon) = \sum_{\epsilon \in E} d_{\epsilon} x_{\epsilon k}$  と  $C$  は (2)–(7) が制約となる。

### 2.2 最大充足性

制約充足問題 (SAT) は  $\mathcal{NP}$  完全が示された問題の1つである。この問題では、制約式を成立させる真偽値の割り付けを決める問題である。一般に、命題論理で書かれた制約式は連言標準形 (CNF) で記述される。つまり、制約は式の連言 ( $\wedge$ ) からなり、各式はリテラルの選言 ( $\vee$ ) であり、各リテラルがブール変数もしくはその否定 ( $\neg$ ) である。

MaxSAT は SAT の最適化バージョンである [7]。さらに、荷重部分 MaxSAT では、問題は、ハード及びソフト節の集合で表される。このうち、各ソフト節には正の重みが結び付けられている。よって、この時の問題は、ハード節を全て満たし、ソフト節の重みを最大化するモデルを見つけることになる。

形式的には、MaxSAT は、 $\mathcal{F} = \mathcal{H} \wedge (C_{n+1}, w_1) \wedge \dots \wedge$

$(C_{n+m}, w_m)$  と記述する。ただし、 $\mathcal{H}$  は  $\bigwedge_{i=1}^n C_i$  からなるハード節であり、残りの節 ( $\bigwedge_{i=1}^m C_{n+i}$  など) はソフト節である。MaxSAT  $\mathcal{F}$  の目的は、 $\mathcal{H}$  を満たし、かつ、 $\sum_{i=1}^m (w_i \neg C_{n+i})$  を最小化する解を求めることである。このために、まず、補助論理変数  $b_i$  を各ソフト節  $C_{n+i}$  に導入し、 $1 \leq i \leq m$  について  $\neg b_i \rightarrow C_{n+i}$  を追加する。この  $b_i$  はブロック変数 [6] と呼ばれる。これにより、次のような疑似論理 (PB) 制約符号化 [11] による一連の SAT の解法により、 $\mathcal{F}$  を解くことが出来る。

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{H} \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^m (C_{n+i} \vee b_i) \right) \wedge \text{CNF}_{\text{PB}} \left( \sum_{i=1}^m w_i b_i < t \right). \quad (10)$$

式 (10) において、 $\mathcal{F}_t$  は、 $\mathcal{F}$  は、コスト  $\sum_{i=1}^m (w_i \neg C_{n+i})$  が  $t$  より小さい解  $A$  を持つことを示している。もし、 $\mathcal{F}$  の最適解が  $A^*$  であり、その時の最小コストが  $t^*$  であるなら、 $t \geq t^*$  となる SAT 問題  $\mathcal{F}_t$  は充足可能であり、逆に、 $t < t^*$  は充足不可能である。一連の  $\mathcal{F}_t$  を解法する SAT では、 $t$  は  $\sum_{i=1}^m w_i + 1$  に初期化され、その後、直前の解法で得られた解  $A$  で得られたコストにより次の  $t$  を決める。 $\mathcal{F}_t$  が充足不可能になった時、その直前の  $t$  が最適値  $t^*$  となる。よって、 $\mathcal{F}$  の最適コストを求める過程は、充足可能な CNF 式が充足不可能になる箇所を求めることに等しい。この方法に基づく MaxSAT ソルバは、充足可能ベースソルバと呼ばれる。

**Definition 2.**  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  を  $n$  個の論理変数の集合とする。この時、3 つの特殊ケースに対応する  $X$  の異なり基数制約について次のような素朴な CNF 符号化を得る。

$$\text{At-most-one 制約: } \text{AMO}(X) = \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n (\neg x_i \vee \neg x_j).$$

$$\text{At-least-one 制約: } \text{ALO}(X) = \bigvee_{i=1}^n x_i.$$

$$\text{Exactly one 制約: } \text{EO}(X) = \text{AMO}(X) \wedge \text{ALO}(X).$$

### 3. MTZ-Based SEC の CNF 符号化

Min-Max mTSP の整数計画法としての形式化に於いて、制約 (2)–(5) は Exactly one 制約として CNF に符号化出来る。また、これまでの符号化により、制約 (6) についても、 $\sum_{i=1}^n x_{ijk}$  および  $\sum_{i=1}^n x_{jik}$  が 1 以下であることがわかる。寄って、式  $\sum_{i=1}^n x_{ijk} = \sum_{i=1}^n x_{jik}$  は論理式  $\bigvee_{i=1}^n x_{ijk} \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^n x_{jik}$  と等価である。(9) 式中の  $\mathcal{C}$  の符号化のために、以下では、MTZ-base SEC である制約 (7) を CNF に変換する方法を述べる。

#### 3.1 算術符号化

最も直接的な符号化としては、制約 (7) をそのまま CNF

とするものである。各頂点のポテンシャル  $u_i$  に対し、 $0 \leq u_i \leq n-2$  を得る。ただし、 $2 \leq i \leq n$  および  $n$  は都市の数である。よって、各々の頂点のポテンシャルの数に対応して、合計  $(n-1)(n-2)$  個の論理変数が必要となる。<sup>\*1</sup> そのための変数として、 $\mu_{it}$  を導入する。ただし、 $2 \leq i \leq n$  および  $1 \leq t \leq n-2$  である。これらを用いて、制約 (7) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{n-2} (t(\mu_{it} - \mu_{jt})) + \sum_{k=1}^m ((n-m)x_{ijk}) \leq n-m-1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{t=1}^{n-2} (t\mu_{it}) + \sum_{t=1}^{n-2} (t\neg\mu_{jt}) + \sum_{k=1}^m ((n-m)x_{ijk}) \leq \frac{n^2-n}{2} - m \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $2 \leq i \neq j \leq n$  である。この式 (11) は CNF に符号化可能な正規 PB 制約となっている。なお、この算術符号化は制約充足問題から SAT への変換のアイデアを元にしている。

#### 3.2 ポテンシャル符号化

制約 (7) の算術符号化に加え、MTZ-based SEC の特別な意味による論理変換も考えることが出来る。任意の異なる 2 つの頂点ポテンシャルの組に対し、その値の差はかならず  $n-m-1$  以下でなければならない。さらに、頂点  $j$  が頂点  $i$  にグラフ上で隣接している時のみ、 $\sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1$  が成り立つ。よって、この場合、 $u_j - u_i \geq 1$  となる頂点ポテンシャルの組があることになる。この組は、頂点  $j$  が順列の中で  $i$  より後に来ることを示している。つまり、MTZ-based SEC は、経路の中の頂点の対の順番を制約する。これにより、経路の中の部分閉路となる解を成約できる。

##### 3.2.1 誘導ポテンシャル法

ここでは部分閉路を割けるために、頂点ポテンシャルについてさらに新しい型の論理変数  $\nu_{ijt}$  を導入する。ただし、 $2 \leq i \neq j \leq n$ 、 $(i, j) \in E$ 、 $t$  ( $1 \leq t \leq n-2$ ) はその辺の終点  $j$  のポテンシャルを示す。例えば、 $\nu_{ijt} = 1$  は、セールスマンが  $t$  番目に訪れた都市  $i$  から都市  $j$  に直接移動することを示す。よって、 $(n-2)(n-1)^2$  個の論理変数により以下の符号化が行われる。

$$\bigwedge_{k=1}^m \left( x_{ijk} \rightarrow \bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{ijt} \right), \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (12)$$

$$\bigwedge_{t=1}^{n-2} \left( \nu_{ijt} \rightarrow \bigvee_{k=1}^m x_{ijk} \right), \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (13)$$

$$\bigwedge_{j=2}^n \left( x_{1jk} \rightarrow x_{j1k} \vee \bigvee_{l=2}^n \nu_{jl1} \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad l \neq j \quad (14)$$

<sup>\*1</sup>  $u_i = 0$  はその論理変数を無視すると扱う。

$$\bigwedge_{t=1}^{n-2} \left( \nu_{ijt} \rightarrow \bigvee_{k=1}^m x_{j1k} \vee \begin{cases} \bigvee_{l=2}^n \nu_{jl(t+1)}, & \text{if } t \neq n-2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \right),$$

$$2 \leq i \neq j \leq n, j \neq l \quad (15)$$

$$\bigwedge_{j=2}^n AMO \left( \bigcup_{t=1}^{n-2} \bigcup_{i=2}^n \nu_{ijt} \right). \quad (16)$$

式 (14) および (15) は  $x_{j1k}$  および  $\nu_{jlt}$  が各経路の各頂点での次の方向に誘導する役割を果たしており、前式が最初の訪問地、後者が残りの訪問地に対応する。さらに、(16) は、辺の終点  $j$  について、1 つのみポテンシャルが存在する制約である。

**Theorem 1.** *Simultaneous* 式 (12)–(16) が同時に成立すれば、その解に部分閉路が存在しない。

*Proof.* 解  $A$  が少なくとも 1 つの部分閉路を持ち、その閉路の辺集合を  $\{x_{ab\kappa}, \dots, x_{ca\kappa}\}$  とする。つまり、 $A(x_{ab\kappa} \wedge \dots \wedge x_{ca\kappa}) = 1$  である。ただし、 $2 \leq a \neq b \leq n$  および  $2 \leq c \neq a \leq n$  であるとする。この部分閉路は、セールスマン  $\kappa$  が本部ではない都市  $a$  から  $b$  に移動し、最終的に  $c$  から  $a$  に戻ることを示している。式 (12) により、 $x_{ijk}$  から  $\bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{ijt}$  への射影が作られ、 $\bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{ijt}$  は辺  $x_{ijk}$  に対応する。各経路はポテンシャルにより誘導される辺の数珠つなぎであることから、そのセールスマンが訪れる最初の都市から順に式 (14) にのっとって経路を作ることが出来る。また、式 (15) により部分経路の接続も構成できる。これにより、 $A(\nu_{cat}) = 1$  について次のような 2 つのケースの矛盾が生じる。

- もし  $t \neq n-2$  なら、 $\nu_{cat} \rightarrow \bigvee_{k=1}^m x_{a1k} \bigvee_{l=2}^n \nu_{al(t+1)}$  である。
- $A(\bigvee_{k=1}^m x_{a1k}) = 1$  と仮定すると、 $A(x_{a1\kappa}) = 1$  の場合に部分経路の定義に矛盾する。そうでない場合は、制約 (6) が成立しない。
- $A(\bigvee_{l=2}^n \nu_{al(t+1)}) = 1$  と仮定すると、 $A(\nu_{ab(t+1)}) = 1$  の場合に式 (16) に反する。そうでない場合、式 (13) により、同じ理由で  $A(\bigvee_{k=1}^m x_{alk}) = 1$  ( $l \neq b$ ) と矛盾する。
- そうでない場合には、 $\nu_{ca(n-2)} \rightarrow \bigvee_{k=1}^m x_{a1k}$  が成り立つ。この場合、同様に、部分経路の定義に反する。

よって、式 (12)–(16) を同時に満たす解は Min-Max mTSP の解として部分閉路を持たないことが保証される。□

**Theorem 2.** 式 (12)–(16) は、多項式サイズの CNF を生成する。セールスマン数を  $m$ 、都市数を  $n$  とした時、具体的には、 $O(mn^2 + n^5)$  の節を生成する。

### 3.2.2 閉路防止法

MTZ-based SEC の別の解釈として、頂点  $\{2, \dots, n\}$  の中での閉路を除外する制約が考えられる。この考え方のも

と、上で導入した論理変数  $\nu_{ijt}$  を使い、(13)–(16) で用いられる頂点でのポテンシャル誘導を置き換え、以下のような閉路防止制約を考える。

$$(12) \quad \bigwedge_{i=2}^n \left( \bigvee_{j=2}^n \nu_{ijt} \rightarrow \bigwedge_{\tau=t}^{n-2} \bigwedge_{l=2}^n \neg \nu_{li\tau} \right) \quad t = 1, \dots, n-2, \quad j \neq i, \quad l \neq i \quad (17)$$

式 (17) は、現在のポテンシャル  $t$  以上のポテンシャル  $\tau$  に対し、各辺の始点  $i$  がその他の辺の終点にならないことを示す。

**Theorem 3.** 式 (12) と式 (17) が同時に成立している時、Min-Max mTSP の解に部分閉路は存在しない。

*Proof.* 割当  $A$  に少なくとも 1 つの部分閉路が存在し、その閉路の一部を  $S = \{x_{ab\kappa}, \dots, x_{ca\kappa}\}$  (つまり、 $A(x_{ab\kappa} \wedge \dots \wedge x_{ca\kappa}) = 1$ ) とする。ただし、 $2 \leq a \neq b \leq n$  および  $2 \leq c \neq a \leq n$  である。この部分へ色は、セールスマン  $\kappa$  が本部ではない都市  $a$  から都市  $b$  に移動し、最後に  $c$  から  $a$  に戻ることを示している。式 (12) より、 $A(\bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{abt} \wedge \dots \wedge \bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{cat}) = 1$  となる。ここで、 $A(\nu_{abt_1} \wedge \dots \wedge \nu_{cat_{|S|}}) = 1$  に注目する。ただし、 $t_1$  および  $t_{|S|}$  は各々、 $A(\bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{abt}) = 1$  および  $A(\bigvee_{t=1}^{n-2} \nu_{cat}) = 1$  の場合の最小の  $t$  である。また、 $1 \leq t_1 < \dots < t_{|S|} \leq n-2$  はその部分へ色の辺の接続順序に対応するとする。さらに、式 (17) より、 $A(\bigwedge_{\tau=t_1}^{n-2} \bigwedge_{l=2}^n \neg \nu_{la\tau}) = 1$  が成り立つ。一方、 $\nu_{cat_{|S|}} \in \bigcup_{\tau=t_1}^{n-2} \bigcup_{l=2}^n \nu_{la\tau}$  により、 $A(\neg \nu_{cat_{|S|}}) = 1$  が得られる。これは、上で導いた結論と矛盾する。よって、式 (12) および式 (17) により、Min-Max mTSP の解は、部分閉路を持たないことが保証される。□

**Theorem 4.** 式 (12) および (17) は、多項式サイズの CNF となる。具体的には、セールスマンの数  $m$  と都市の数  $n$  に対し、節の数は  $O(mn^2 + n^5)$  である。

### 3.3 相対符号化

各セールスマンの部分閉路をさらに抑えるため、到達可能性制約をさらに導入する。この符号化では、辺の接続性に関する変数を 3 重インデックスから 2 重インデックスに削減する。そのために、図 1 (a) で示すようなこれまでの変数  $x_{ijk}$  に対して、図 1 (b) に示すような新しい論理変数  $l_{ij}$  を以下のように導入する。ここでは  $i, j$  はこれまでのような都市番号ではなく、最初の  $m$  (図 1 (b) に於いて赤で表示) は各セールスマン分の本部のコピーとする。さらに、別の論理変数  $r_{ij}$  を用意し、これに、頂点  $j$  が頂点  $i$  経由で到達できることをします。ただし、 $1 \leq i \leq n$ 、 $m+1 \leq j \leq m+n-1$ 、 $i \neq j$  である。言い換えれば、もし頂点  $j$  が頂点  $i$  の直後に訪問されるなら  $l_{ij} = 1$  である。また、いずれかの経路の中で頂点  $i$  が頂点  $j$  より前に訪問

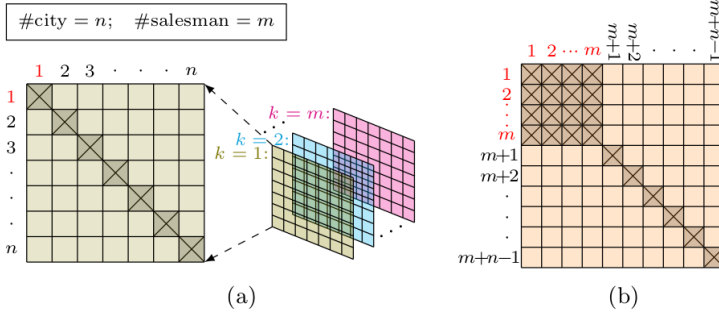


図 1 辺の論理変数の関係: (a) 行列  $k$  の行  $i$ 、列  $j$  の各セルは変数  $x_{ijk}$  に対応する。業および列の序号 1 は本部都市である。(b) 行列の行  $i$ 、列  $j$  のセルは、変数  $l_{ij}$  に対応する。なお、 $\boxtimes$  のところの変数は生成しない。

される時に限り、 $r_{ij} = 1$  となる。これは、Prestwich [10] により提案された順列の中での頂点の相対位置のアイデアに基づき、ハミルトン経路問題の CNF 符号化となっている。よって、これら  $O(m^2 + n^2 + mn)$  個の論理変数を導入して、式 (9) の制約  $C$  は以下のように符号化される。

$$\bigwedge_{i=1}^m EO\left(\bigcup_{j=m+1}^{m+n-1} l_{ij}\right), \quad (18)$$

$$\bigwedge_{j=1}^m EO\left(\bigcup_{i=m+1}^{m+n-1} l_{ij}\right), \quad (19)$$

$$\bigwedge_{i=m+1}^{m+n-1} EO\left(\bigcup_{j=1}^{m+n-1} l_{ij}\right), \quad j \neq i \quad (20)$$

$$\bigwedge_{j=m+1}^{m+n-1} EO\left(\bigcup_{i=1}^{m+n-1} l_{ij}\right), \quad i \neq j \quad (21)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{m+n-1} \bigwedge_{j=m+1}^{m+n-1} (l_{ij} \rightarrow r_{ij}), \quad j \neq i \quad (22)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{m+n-1} \bigwedge_{j=m+1}^{m+n-1} \bigwedge_{k=m+1}^{m+n-1} (r_{ij} \wedge r_{jk} \rightarrow r_{ik}), \quad \text{condition set} \quad (23)$$

$$\bigwedge_{i=m+1}^{m+n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{m+n-1} (\neg r_{ij} \vee \neg r_{ji}). \quad (24)$$

式 (18) および (resp. Eq. (19)) は各々、各セールスマンに対し、本部から 1 度だけ出立し 1 度だけ到着することを示している。式 (20) および (21) は、本部でない都市はかならず 1 度だけ出立および到着があることを示している。式 (22) は  $l_{ij}$  から  $r_{ij}$  への含意である。到達可能性変数の推移律は式 (23) であたえられる。さらに、式 (24) が非循環制約である。

この符号化は制約 (6) を含まないことから、同じ都市への出入りを制約することは、到達可能性制約のみで表されている。しかしながら、変数  $r_{ij}$  の値は  $m+1 \leq j \leq m+n-1$  である。よって、各セールスマンの経路の終端が自分自身の本部となることは保証されない。例えば、

$A(l_{\kappa a} \wedge l_{ab} \wedge \dots \wedge l_{\kappa' c}) = 1$  という解を得る可能性がある。これは、セールスマン  $\kappa$  が本部から  $a$ 、 $b$ 、 $c$  を経とって、別のセールスマン  $\kappa'$  の本部にもどることを示している。ここで、 $l_{\kappa' c}$  はこの経路の最後の辺である。なお、この不整合は、本部の仮想的なコピーである頂点への辺の長さが同一である場合、 $d_{c\kappa} = d_{c\kappa'}$ 、最適化問題としては問題は生じない。

**Theorem 5.** 式 (18)–(24) が同時に成立する場合、本部に戻る辺を除けば、閉路が存在しない。

*Proof.* 割当  $A$  に少なくとも 1 つの部分閉路が存在するとし、その部分閉路の辺が  $\{l_{ab}, \dots, l_{ca}\}$  であり、ともに、セールスマン  $\kappa$  の経路(つまり、 $A(l_{ab} \wedge \dots \wedge l_{ca} \wedge r_{\kappa a} \wedge \dots \wedge r_{\kappa c}) = 1$ ) であるとする。ただし、 $m+1 \leq a \neq b \leq m+n-1$  および  $m+1 \leq c \neq a \leq m+n-1$  である。式 (22) により、 $A(r_{ab} \wedge \dots \wedge r_{ca}) = 1$  が導かれさらに、式 (23) により、 $A(r_{ac}) = 1$  が得られる。これは式 (24) と矛盾する。  $\square$

**Lemma 1.** 式 (22)–(24) により、到達可能性変数  $r_{ij}$  を *Min-Max SAT* の決定変数から除外できる。

*Proof.* 式 (22)–(24) により、Theorem 5 の証明に置いて用いた各到達可能性項  $r_{ij}$  または  $\neg r_{ij}$  は、単位伝搬において 1 として扱われる。よって、すべての  $r_{ij}$  は、部分閉路を持たない解に限定するための支持変数とみなすことができる。よって、非決定変数と宣言することができる。  $\square$

**Theorem 6.** 式 (18)–(24) は、多項式サイズの CNF を生成する。具体的には、節の個数のオーダは  $O(n^3 + mn^2)$  である。

## 4. MaxSAT アルゴリズムの拡張

式 (9) で示した MMOP は、MaxSAT へ変換が可能である。しかし、totalizer (TO) 符号化 [1], [2] に伴う補助変数と制約式を非常に多数必要とすることから、この reduction 法では実行速度低下や必要メモリの増大という問題を引き起こす。そこで本節では、MMOP の別の解法を導入する。reduction 法と異なり、この解法では、重み付き部分 MaxSAT 問題の DIMACS 形式の拡張の問題として MMOP を捉え、それに従って MaxSAT のアルゴリズムを変更する。

### 4.1 ソフト制約のグループ化

Definition 1 で触れたように、Min-Max mTSP について、 $f(k, \epsilon)$  ( $1 \leq k \leq m$ ) は線形加算器とみなせる。ここで、ポテンシャル符号化は  $f(k, \epsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} \cdot x_{ijk})$  であり、相対符号化は  $f(k, \epsilon) = \sum_{i=1}^{m+n-1} \sum_{j=1}^m (d_{ij} \cdot (r_{ki} \wedge l_{ij})) + \sum_{i=1}^{m+n-1} \sum_{j=m+1}^{m+n-1} (d_{ij} \cdot (r_{kj} \wedge l_{ij}))$  となる。なお、ポテンシャル符号化および相対符号化に対する有向グラフの違い (図 1) により、相対符号化用の距離行列  $D = (d_{ij})$

はポテンシャル符号化のその拡張となっている。一方で、標準の MaxSAT 式 (例えば DIMACS 形式) は、全制約を単純に 2 つの部分、ハード節とソフト節に分けることができ、かつ、ソフト節はそれ以上の分節は存在しない。MMOP を拡張 MaxSAT 問題に変換するために、まず、ポテンシャル符号化および相対符号化について、MaxSAT 問題を次のように変形する。

$$\mathcal{F}'_{(\text{potential})} = \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n (\neg x_{ijk}, d_{ij}, k),$$

$$\mathcal{F}'_{(\text{relative})} = \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \bigwedge_{i=1}^{m+n-1} \left( \bigwedge_{j=1}^m (\neg r_{ki} \vee \neg l_{ij}, d_{ij}, k) \right.$$

$$\left. \bigwedge_{j=m+1}^{m+n-1} (\neg r_{kj} \vee \neg l_{ij}, d_{ij}, k) \right).$$

(25)

各々のグループ化されたソフト節は、制約  $\neg \Gamma$  と重み  $d_{ij}$ 、およびグループのインデックスである  $k$  からなる 3 つ組項  $(\neg \Gamma, d_{ij}, k)$  で表される。この変形により、拡張したソフト節を区別できるようになる。

#### 4.2 $f(k, \epsilon) \leq \theta$ の複数 PB 制約

式 (25) に示した変更 MaxSAT 式  $\mathcal{F}'$  と解くために、複数の PB 制約を用いて、以下のような一連の SAT に符号化する。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{t(\text{potential})} &= \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n (\neg x_{ijk} \vee b_{ijk}) \\ &\wedge \bigwedge_{k=1}^m \text{CNF}_{\text{PB}} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} \cdot b_{ijk}) < t \right) \\ &= \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \text{CNF}_{\text{PB}} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} \cdot x_{ijk}) < t \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{t(\text{relative})} &= \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \bigwedge_{i=1}^{m+n-1} \left( \bigwedge_{j=1}^m (\neg r_{ki} \vee \neg l_{ij} \vee b_{ijk}) \right. \\ &\quad \left. \bigwedge_{j=m+1}^{m+n-1} (\neg r_{kj} \vee \neg l_{ij} \vee b_{ijk}) \right) \\ &\wedge \bigwedge_{k=1}^m \text{CNF}_{\text{PB}} \left( \sum_{i=1}^{m+n-1} \sum_{j=1}^{m+n-1} (d_{ij} \cdot b_{ijk}) < t \right) \\ &= \mathcal{H} \wedge \bigwedge_{k=1}^m \text{CNF}_{\text{PB}} \left( \sum_{i=1}^{m+n-1} \left( \sum_{j=1}^m (d_{ij} \cdot (r_{ki} \wedge l_{ij})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{j=m+1}^{m+n-1} (d_{ij} \cdot (r_{kj} \wedge l_{ij})) \right) < t \right). \end{aligned} \tag{26}$$

**Theorem 7.** ポテンシャル符号化および相対符号化のいずれでも、式 (26) の  $\mathcal{F}'_t$  は、 $\mathcal{F}'$  (式 (25)) に充足可能な割

当があり、かつ、 $\forall k f(k, \epsilon)$  の各グループのコストが同時に  $t$  未満となる、CNF となっている。

*Proof.* ポテンシャル符号化においては、補助変数として  $\Gamma = x_{ijk}$  を、また、相対符号化においては、補助変数として、 $1 \leq j \leq m$  の場合は  $\Gamma = r_{ki} \wedge l_{ij}$  を、それ以外では  $\Gamma = r_{kj} \wedge l_{ij}$  を導入する。

$\mathcal{F}'_t$  を充足する割り付け  $\mathcal{A}$  が存在するとする。ソフト節に含まれる任意の変数  $b_{ijk}$  について、もし  $\mathcal{A}(b_{ijk}) = 1$  であれば、 $\mathcal{A}'(\Gamma) \in \{0, 1\}$  となる  $\mathcal{A}$  を用いて、 $\mathcal{F}'$  について割り付け  $\mathcal{A}'$  が存在する。この場合、 $\mathcal{A}'(\Gamma)$  が 0、1 のいずれであっても、 $\sum_i \sum_j (d_{ij} \cdot \Gamma) < t$  である。 $\mathcal{A}(b_{ijk}) = 0$  の場合は、 $\mathcal{A}'(\Gamma) = 0$  となる  $\mathcal{A}$  を用いて、 $\mathcal{F}'$  に対して割り付け  $\mathcal{A}'$  が存在する。

$\mathcal{F}'$  を充足する割り付け  $\mathcal{A}$  が存在するとする。ソフト節に含まれる任意の変数  $\Gamma$  に対して、もし  $\mathcal{A}(\Gamma) = 1$  であるならば、 $\mathcal{A}'(\Gamma) = 1$  (すなわち  $\mathcal{A}'(b_{ijk}) = 1$ ) となる  $\mathcal{A}$  をもちいて、 $\mathcal{F}'_t$  に対して、割り付け  $\mathcal{A}'$  が存在する。もし  $\mathcal{A}(\Gamma) = 0$  であるならば、 $\mathcal{A}'(b_{ijk}) = 0$  あるいは  $\sum_i \sum_j (d_{ij} \cdot b_{ijk}) < t$  と仮定することで、 $\mathcal{A}'(b_{ijk}) \in \{0, 1\}$  を満たす  $\mathcal{A}$  を用いることで、 $\mathcal{F}'_t$  に対する割り付け  $\mathcal{A}'$  が存在することになる。□

この Theorem 7 により、拡張した MaxSAT 式  $\mathcal{F}'$  の解が、式 (9) で示されるもとの MMOP の解と一致することがわかる。

## 5. 実装及び評価

提案手法の評価を行うために、算術符号化、提案手法、および整数計画法 (IP) を用いた比較実験を行った。用いた計算機環境は Intel Core i7-6850K (3.6GHz)、32GB RAM、OS は Ubuntu 18.04 である。算術符号化では、PB 制約の TO 符号化を用いている。提案手法では、誘導ポテンシャル法と閉路防止法による 2 つポテンシャル符号化と、さらに相対符号化を取り上げる。本実験では、各々、arithmetic、guide、acyclic、ip と記載する。

ベンチマーク問題としては、TSPLIB<sup>\*2</sup> より異なるサイズの TSP 課題を選び、異なる数のセールスマンを仮定することで、min-max mTSP として構成した。整数計画法のソルバとしては、Cplex [4] version 12.7.1 を用い、それ以外の MaxSAT ソルバとしては、QMaxSAT [13] をもとに改良したものをを用いた。また、実用的な性能比較として、以下のヒューリスティクスを MaxSAT に組み合わせることも行った。組み合わせたヒューリスティクスは、予め等分に分けた都市を各セールスマンに割りつけた場合の解を初期解として与えておくものである。また、各々のソルバに対して、1 時間という上限を設けて、打ち切りを

<sup>\*2</sup> <http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/tsp/>

行っている。

実験では、まず比較的小規模の課題について、その実行時間の比較をまず行った(表1)。また、3,600秒で最適確定解が得られなかった課題については、最終的な解の評価値の比較を行った(表2)。この各表において、左端の欄の“ $ins_n_m$ ”という標記は、TSP課題名  $ins$  と都市数  $n$  とセールスマン数  $m$  を示している。また右端のIPの欄を除き、各セルには、タイムアウトやメモリオーバーの場合を除き、生成された節の数、拡張MaxSATの解、およびヒューリスティクスを用いた場合の解(カッコつき)の3つの値が示されている。また、表2では、 $\circ$  は課題サイズが大きすぎ、生成ファイルが10GBを超え、実験不可能となったケースを示している。また、各課題について、CNF符号化の中で最高評価のものを太字で示し、さらにIPをうわまるものは赤字でしめしている。表1および表2から、生成される節の数は我々が示した定理と適合していることがわかる。同じ課題について、arithmeticに比べて、guideやacyclicでは生成される節の数がかなり小さくなっており、relativeではさらに小さくなっている。比較的小さい課題については、実行時間及び最適化の度合いについてはacyclicが比較的良好な性能を示しているが、それでもipに比べて劣っている。一方、課題が大きくなるに連れ、relativeが徐々に性能をあげ、ipと遜色ない性能、場合に寄ってはipを上回る性能である。また、ipがタイムアウト等で扱えない規模の問題にも対応できている。さらに、min-max mTSPではヒューリスティクスが重要なメリットをもたらすことも示されている。

また、セールスマンの数に対し都市数がそれほど大きくない場合、SATベースの手法がIPの性能に迫れることがわかる。そこで、セールスマンの数をさらに増やした評価実験を行った結果が、表3である。この実験では、ヒューリスティクスを用いないSATベースの性能をIPと比較している。この表から、セールスマンと都市の数の比が小さいほど、relativeがipを上回ることが読み取れる。

## 6. まとめ

本稿では、Min-Max mTSPについて3つのCNF符号化を提案した。これら3つの符号化は、部分閉路の生成を抑えることに焦点を当てている。うち2つはグラフの頂点のポテンシャルをベースとするものであり、最後の1つは到達可能性をベースとしたものである。さらに、この符号化を解くために、MaxSATを拡張子、さらに初期暫定解を与えるヒューリスティクスを導入できる枠組みを構築した。空間複雑さについては提案手法はもとの素朴な符号化方に比べ、大きく改善できている。さらに、実問題をを用いた比較では、小規模な問題では整数計画法には劣るものの、比較的大規模問題については、セールスマンの数に対し都市数が多くない場合に、整数計画法を上回る性能が出せるこ

とが示された。

謝辞 この成果の一部は、国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構(NEDO)の委託業務の結果得られたものです。

## 参考文献

- [1] Olivier Bailleux and Yacine Bouffkhad. Efficient CNF encoding of boolean cardinality constraints. In Francesca Rossi, editor, *Principles and Practice of Constraint Programming - CP 2003, 9th International Conference, CP 2003, Kinsale, Ireland, September 29 - October 3, 2003, Proceedings*, volume 2833 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 108–122. Springer, 2003.
- [2] Olivier Bailleux, Yacine Bouffkhad, and Olivier Roussel. New encodings of pseudo-boolean constraints into CNF. In Oliver Kullmann, editor, *Theory and Applications of Satisfiability Testing - SAT 2009, 12th International Conference, SAT 2009, Swansea, UK, June 30 - July 3, 2009. Proceedings*, volume 5584 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 181–194. Springer, 2009.
- [3] Armin Biere, Marijn Heule, Hans van Maaren, and Toby Walsh, editors. *Handbook of Satisfiability*, volume 185 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. IOS Press, 2009.
- [4] IBM ILOG CPLEX. V12. 1: User's manual for cplex. *International Business Machines Corporation*, 46(53):157, 2009.
- [5] Bezalel Gavish. Note a note on “the formulation of the m-salesman traveling salesman problem”. *Management Science*, 22(6):704–705, 1976.
- [6] Miyuki Koshimura, Tong Zhang, Hiroshi Fujita, and Ryuzo Hasegawa. Qmaxsat: A partial max-sat solver. *JSAT*, 8(1/2):95–100, 2012.
- [7] Chu Min Li and Felip Manyà. Maxsat, hard and soft constraints. In Biere et al. [3], pages 613–631.
- [8] C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*, 7(4):326–329, October 1960.
- [9] Raluca Necula, Mihaela Breaban, and Madalina Raschip. Tackling the bi-criteria facet of multiple traveling salesman problem with ant colony systems. In *27th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, ICTAI 2015, Vietri sul Mare, Italy, November 9-11, 2015*, pages 873–880. IEEE Computer Society, 2015.
- [10] Steven David Prestwich. SAT problems with chains of dependent variables. *Discrete Applied Mathematics*, 130(2):329–350, 2003.
- [11] Olivier Roussel and Vasco M. Manquinho. Pseudo-boolean and cardinality constraints. In Biere et al. [3], pages 695–733.
- [12] Joseph A. Svestka and Vaughn E. Huckfeldt. Computational experience with an m-salesman traveling salesman algorithm. *Management Science*, 19(7):790–799, 1973.
- [13] Aolong Zha, Miyuki Koshimura, and Hiroshi Fujita. N-level modulo-based CNF encodings of pseudo-boolean constraints for maxsat. *Constraints*, 24(2):133–161, 2019.



表 1 各種法の計算時間比較

Instance	arithmetic	guide	acyclic	relative	ip
burma14_2	2.5E <sup>6</sup> 353 s (342 s)	1.5E <sup>5</sup> 355 s ( <b>220</b> s)	1.6E <sup>5</sup> 334 s (249 s)	5.4E <sup>3</sup> t.o. <sup>1</sup> (t.o. <sup>1</sup> )	18 s
burma14_3	2.8E <sup>6</sup> 46 s (44 s)	1.6E <sup>5</sup> <b>13</b> s ( <b>13</b> s)	1.7E <sup>5</sup> 22 s (25 s)	6.4E <sup>3</sup> t.o. <sup>1</sup> (t.o. <sup>2</sup> )	5 s
ulysses16_2	6.0E <sup>6</sup> 1509 s(1226 s)	3.1E <sup>5</sup> 270 s (245 s)	3.2E <sup>5</sup> 131 s ( <b>117</b> s)	8.1E <sup>3</sup> t.o. <sup>2</sup> (t.o. <sup>2</sup> )	910 s
ulysses16_3	6.5E <sup>6</sup> 1866 s(1853 s)	3.3E <sup>5</sup> 396 s (392 s)	3.4E <sup>5</sup> <b>129</b> s (136 s)	9.4E <sup>3</sup> t.o. <sup>1</sup> (t.o. <sup>1</sup> )	t.o. <sup>1</sup>

(1) t.o.<sup>1</sup>: タイムアウトしたが、すでに最適解に到達している。  
(2) t.o.<sup>2</sup>: タイムアウトした時点で、まだ最適解には至っていない。

表 2 各種法に於いて求められた最適値

Instance	arithmetic		guide		acyclic		relative		ip
gr24_2	7.6E <sup>7</sup>	1098 (1008)	2.8E <sup>6</sup>	862 ( <b>824</b> )	2.9E <sup>6</sup>	840 (831)	2.7E <sup>4</sup>	2609 (1797)	770
gr24_3	8.1E <sup>7</sup>	909 (861)	2.8E <sup>6</sup>	767 (787)	2.9E <sup>6</sup>	766 ( <b>749</b> )	3.0E <sup>4</sup>	814 (827)	648
gr24_4	8.6E <sup>7</sup>	757 (803)	2.9E <sup>6</sup>	<b>660</b> (668)	3.0E <sup>6</sup>	674 (676)	3.3E <sup>4</sup>	750 (744)	629
gr24_5	9.1E <sup>7</sup>	697 (670)	3.0E <sup>6</sup>	642 (640)	3.1E <sup>6</sup>	632 ( <b>629</b> )	3.6E <sup>4</sup>	676 (673)	594
bays29_2	2.5E <sup>8</sup>	n.a.y. (3186*)	7.6E <sup>6</sup>	1495 (1453)	7.8E <sup>6</sup>	1597 ( <b>1436</b> )	4.8E <sup>4</sup>	2393 (2903)	1122
bays29_4	2.7E <sup>8</sup>	1543 (1614*)	7.8E <sup>6</sup>	1018 (1041)	8.1E <sup>6</sup>	1008 ( <b>975</b> )	5.7E <sup>4</sup>	1671 (1174)	762
bays29_6	3.0E <sup>8</sup>	1114 (1116)	8.3E <sup>6</sup>	807 (821)	8.5E <sup>6</sup>	795 ( <b>793</b> )	6.6E <sup>4</sup>	948 (887)	705
bays29_8	3.2E <sup>8</sup>	958 (845)	8.9E <sup>6</sup>	731 (714)	9.1E <sup>6</sup>	<b>697</b> (702)	7.6E <sup>4</sup>	779 (766)	684
dantzig42_2	-	-	5.3E <sup>7</sup>	2247* ( <b>549</b> *)	5.4E <sup>7</sup>	1702* ( <b>549</b> *)	1.5E <sup>5</sup>	856 (624*)	482
dantzig42_4	-	-	5.4E <sup>7</sup>	1438 ( <b>487</b> *)	5.5E <sup>7</sup>	614 ( <b>487</b> *)	1.7E <sup>5</sup>	568 (488*)	473
dantzig42_6	-	-	5.5E <sup>7</sup>	769 ( <b>429</b> *)	5.6E <sup>7</sup>	479 ( <b>429</b> *)	1.8E <sup>5</sup>	490 (471)	395
dantzig42_8	-	-	5.7E <sup>7</sup>	506 ( <b>391</b> *)	5.8E <sup>7</sup>	435 ( <b>391</b> *)	2.0E <sup>5</sup>	427 (440)	373
berlin52_3	-	-	1.6E <sup>8</sup>	n.a.y. (8706*)	1.6E <sup>8</sup>	n.a.y. (8706*)	2.9E <sup>5</sup>	<b>6719</b> (7974)	3754
berlin52_6	-	-	1.6E <sup>8</sup>	6879 (5379)	1.7E <sup>8</sup>	7359 (5418*)	3.4E <sup>5</sup>	4758 ( <b>4721</b> )	3265
berlin52_9	-	-	1.7E <sup>8</sup>	18864* (3949)	1.7E <sup>8</sup>	<b>3842</b> (3956*)	3.8E <sup>5</sup>	3915 (3967)	2628
berlin52_12	-	-	1.8E <sup>8</sup>	4795 (3828)	1.8E <sup>8</sup>	3812 (3184)	4.3E <sup>5</sup>	<b>2936</b> (3242)	2668
eil76_4	-	-	-	-	-	-	9.3E <sup>5</sup>	<b>438</b> (514)	333
eil76_8	-	-	-	-	-	-	1.1E <sup>6</sup>	<b>345</b> (348)	204
eil76_12	-	-	-	-	-	-	1.2E <sup>6</sup>	<b>255</b> (290)	210
eil76_16	-	-	-	-	-	-	1.3E <sup>6</sup>	<b>226</b> (229)	245
rat99_5	-	-	-	-	-	-	2.1E <sup>6</sup>	1864 ( <b>1182</b> *)	1004
rat99_10	-	-	-	-	-	-	2.3E <sup>6</sup>	1005 ( <b>568</b> *)	912
rat99_15	-	-	-	-	-	-	2.6E <sup>6</sup>	862 ( <b>621</b> *)	773
rat99_20	-	-	-	-	-	-	2.9E <sup>6</sup>	826 ( <b>527</b> *)	n.a.y.
bier127_6	-	-	-	-	-	-	4.4E <sup>6</sup>	139764 ( <b>128779</b> *)	63801
bier127_12	-	-	-	-	-	-	4.9E <sup>6</sup>	98107 ( <b>71474</b> *)	n.a.y.
bier127_18	-	-	-	-	-	-	5.5E <sup>6</sup>	75242 ( <b>50742</b> *)	n.a.y.
bier127_24	-	-	-	-	-	-	6.0E <sup>6</sup>	70310 ( <b>48294</b> *)	n.a.y.
pr152_8	-	-	-	-	-	-	7.7E <sup>6</sup>	953386* ( <b>106741</b> *)	105874*
pr152_16	-	-	-	-	-	-	8.7E <sup>6</sup>	152925 ( <b>69218</b> *)	n.a.y.
pr152_24	-	-	-	-	-	-	9.8E <sup>6</sup>	129144 ( <b>50343</b> *)	n.a.y.
pr152_32	-	-	-	-	-	-	1.1E <sup>7</sup>	211209* ( <b>52308</b> *)	n.a.y.
tsp225_11	-	-	-	-	-	-	2.5E <sup>7</sup>	1068331 ( <b>314578</b> *)	n.a.y.
tsp225_22/ _33/_44	-	-	-	-	-	-	2.8E <sup>7</sup>	m.o.	n.a.y.

(1) m.o.: メモリオーバー。(2) n.a.y.: 暫定解がない状態。(3) value\*: 初期解として当たられたままのもの。

表 3 課題 eil76 に対する最適値の比較

eil76	..17	..18	..19	..20	..21	..22	..23	..24	..25	..26	..27	..28	..29	..30	..31	..32	..33	..34	..35	..36	..37	..38
relative	221	<b>214</b>	206	<b>184</b>	<b>201</b>	201	<b>186</b>	<b>196</b>	187	<b>182</b>	<b>168</b>	<b>184</b>	<b>170</b>	<b>173</b>	<b>156</b>	<b>151</b>	<b>164</b>	<b>138</b>	152	168	171	<b>176</b>
ip	211	247	190	215	335	175	209	246	155	225	179	265	310	223	356	170	169	210	147	141	162	179