

サイクロイド曲線の初等幾何学的近似アプローチ -Scratch を用いて回転移動を可視化する-

伊藤 寿佑記^{*1} 大北 峻^{*2} 吉川 隼人^{*3} 浦瀬 奈都^{*4} 上出 吉則^{*5}

概要：サイクロイド曲線は数学や物理、ひいては日常生活において大変興味深い題材である。ところが、サイクロイド曲線の認知度は大学生においても低いのが現状である。そこで、本研究は中学校数学の「図形の回転移動」の単元で、サイクロイド曲線の初等幾何学的近似アプローチを試みる。その際、ICT 機器を活用し、Scratch で作成した教材を用いることで「図形の回転移動」の理解を深めるための支援策を講じる。筆者らは SSS2017 において、中学校数学「図形の回転移動」での実践授業をおこない、その効果の検証を報告している。

本研究での実践授業の結果、授業後のアンケート結果から「図形の回転移動の三要素」については概ね理解できるレベルに達していることがわかった。また、正三角形、正方形、正六角形から回転移動の要点を一般化（回転移動の三要素を理解すること）させると、正十二角形にも対応できることがわかった。さらに、授業開始前にサイクロイドを既知である生徒は 1 割にも満たなかったが、授業終了後にサイクロイドの意味について「(とても) 分かった」と答えた生徒は 7 割を超える結果となった。

キーワード：Scratch, ICT 教材, 数学教育, サイクロイド曲線, 初等幾何学

Elementary geometric approximation approach of cycloid curve -Visualize rotational movement with Scratch-

ITO Toshiyuki^{*1}, OOKITA Syun^{*2}, YOSHIKAWA Hayato^{*3},
URESE Natsu^{*4}, UEDE Yoshinori^{*5}

This study is a unit of junior high school mathematics "rotation movement of figure", and tries an elementary geometric approximation approach of cycloid curve. At that time, ICT equipment will be utilized and programming materials using Scratch will be used to take support measures to understand the essence of "rotation and movement of figures".

As a result of the practical lesson, it was found that the level of rotation and movement of the figure was almost understood. It was also found that generalizing the essential points of rotational movement from equilateral triangles, squares, and regular hexagons can support regular dodecagons.

Keywords: Scratch, ICT Use in education, Mathematics education, Cycloid curve, Elementary geometric approach

1. 研究の経緯

1.1 問題の所在

高等学校の数学教育の教材にサイクロイド曲線がある。サイクロイド曲線自体は日常生活においても見られ、数学や物理において大変興味深い題材である。

ところが、サイクロイド曲線の認知度は大学生においても低い割合で、興味関心を持っている学生も少ないのが現状である。とりわけ、文科系の学生にその傾向が顕著である。その原因を筆者らは次の 2 点と考えた。

①高等学校の数学でサイクロイド曲線は教育課程上、数

学Ⅲに位置づけられているため、理科系の一部の生徒のみが履修する実態となっている。高校生全体に占める数学Ⅲの履修の割合は、平成 27 年度において約 21% [1] である。この状況から推察すると高校生全員が数学でサイクロイド曲線を学習する状況ではない。さらに、文科系の生徒にとっては学ぶ機会すら与えられていない。

②サイクロイド曲線の学習目的を媒介変数表示の理解としたため、媒介変数表示の難解さと相まって生徒がサイクロイド曲線自体に興味を持つことまでに至っていないのが現状となっている。媒介変数表示の学習とサイクロイド曲線の学習を切り離すなどの対策が必要と思われる。

1.2 問題に対する改善策

そこで、高等学校の数学でのサイクロイド曲線の学習は現状のままとしておき、中学校数学の「図形の回転移動」の単元で、正多角形が定直線上を滑らずに回転するような場合を考える。頂点の個数を増やしていくことで、特定の頂点の軌跡が初等幾何学的にサイクロイド曲線に近づく作図教材を考案した。このような学習方法を本研究では「サ

*1 大阪教育大学
Osaka Kyoiku University

*2 大阪教育大学
Osaka Kyoiku University

*3 大阪教育大学
Osaka Kyoiku University

*4 大阪教育大学附属平野中学校
Hirano Junior High School attached to
Osaka Kyoiku University

*5 大阪教育大学
Osaka Kyoiku University

イクロイドの初等幾何学的近似アプローチ」と呼ぶことにする。その際、ICT 機器を活用し、Scratch で作成した教材を用いることで「図形の回転移動」の理解を深めるための支援策を講じる。

上述の方策をとることで、①に対する改善策として、文系理系を問わずに中学生全員が初等幾何学的な近似的サイクロイド曲線を学ぶことができる。また、②に対する改善策として、サイクロイド曲線を中学校では初等幾何学的な近似的方法で学び、高等学校では従来通りの媒介変数表示での方法の学びを考えた。

今までの ICT 関連の研究内容として、SSS2017 において筆者らは中学校数学の「図形の回転移動」の単元での図形の移動概念の理解を目標として、Scratch で作成した教材を数学の授業で活かす試みの報告を行っている[2]。

2. 研究目的と研究方法

2.1 研究目的

前述の研究内容を踏まえ、本研究は、中学校数学の「図形の回転移動」の単元で、サイクロイドの初等幾何学的近似アプローチを試みる。その際、ICT 機器を活用し、Scratch で作成した教材を用いることで「図形の回転移動」の理解を深めるための支援策を講じる。今回は先行研究[2]に立脚し正十二角形を新たに加えて、特定の頂点が描く軌跡の作図にも取り組んだ。

実践授業をおこない「生徒の授業後の自己評価」を項目別に分類し、その結果から生徒に与える効果を明らかにする。さらに、自由記述式アンケートも併用することとした。

今回のような中学生を対象としたサイクロイドに対する取り組みは、教育課程にも位置付けられていないため前例はほとんど無い。そこで、今回は「図形の回転移動」の発展学習として扱うこととする。

2.2 研究方法

まず、「図形の回転移動の三要素」（本研究では、コンパスでの作図を可能とする情報、即ち、回転の中心の位置、回転の半径、回転角の大きさを「回転移動の三要素」と定義する。）を演習できる教材として Scratch で教材の試作をおこなった。次に、学習指導案とワークシートを作成し、授業の流れを構成した。

実践授業の評価については、授業後の生徒への質問紙でおこなうこととした。次の点に焦点を絞って調査をした。

- ①回転移動の三要素の理解の調査。
- ②回転移動の三要素を用いた正十二角形の軌跡の作図についての理解の調査。
- ③正多角形が円になった場合のサイクロイド曲線の予想図の調査。
- ④中学生のサイクロイドの意識調査。

授業後の生徒への質問紙の結果と上記評価項目から生徒に与える効果を明らかにすることとした。

3. 先行研究の調査

3.1 高校生に対するサイクロイドの授業実践；井上（2015）の研究

井上[3]は、サイクロイドを最速降下曲線という観点から学習に繋げる授業実践を報告している。

『「最速降下曲線がサイクロイドであることはオイラー-ラグランジュ方程式を解かないといけない」が、直線との比較や等時性などは高校生でも十分理解でき、計算は微積分の練習となる』と述べている。また、授業では、最速が直線ではないということを、微積分や媒介変数表示を用いて、生徒が説明できるようにし、そこから、微積分を使って最短を求める入試問題（東京工業大学）に話を繋げている。

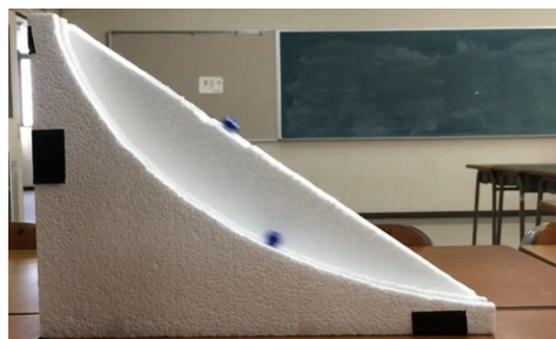


図1（井上によるサイクロイドの授業実践例より引用）

3.2 移動と作図から論証への移行に関する研究；高本（2008）の研究

高本[4]は、移動と作図から論証への移行に関する研究を報告している。

この研究では、回転移動により重なる合同な2つの三角形から垂直二等分線の作図によって回転の中心の位置を調べ、その位置が回転の中心となる理由を議論させている。

『図形を論理の中で道具的に使用し、論証へ高めていくためには、その素地として、場面の中に、かたちを見出すことや対応づけの見方が不可欠であった。また、図の発展的認識の様相に、連続的に変形してとらえる相、一般的性質を内包したものとして説明を補足する相が認められた』と述べており、『これらの内容を移行期の指導に組み入れるよう努めることは、算数から数学への接続により有効にはたらくもの』と考えをまとめている。

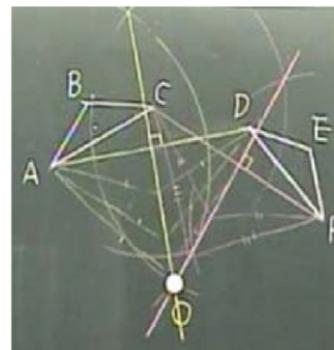


図2（高本による垂直二等分線上の等辺関係の図より引用）

3.3 ICT 教材を利用した授業実践；福嶋（2017）の研究

福嶋[5]は、GeoGebra を用いてサイクロイドの実生活とのつながりの授業実践を報告している。

この授業において ICT 教具は提示するための教具として考えられており、点がどのような軌跡を描くかというのは媒介変数表示の式に頼り、点の動きを予想するという動的考えはあまり行われていない。

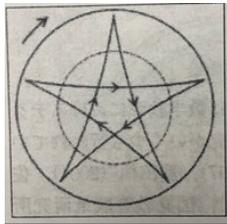


図3（福嶋による授業実践より引用）

3.4 Scratch を用いた図形の回転移動の授業実践；上出ら（2017）の研究

上出ら[2]は、Scratch を用いて図形の回転移動の概念を深く学ぶ授業実践を報告している。

『「MSC アニメーション」を用いない場合は、図形の回転移動に関する数学的な記述が少ないのに対して、「MSC アニメーション」を用いた場合は、回転の中心の位置、回転の半径、回転角などの要素を考え、図形の回転移動の本質を学習する記述が見られた。』と述べている。

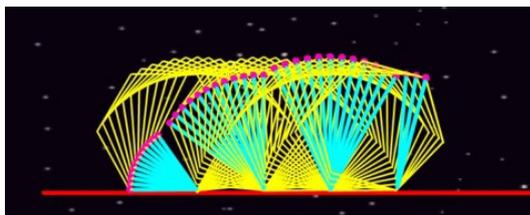


図4（上出らによる「MSC アニメーション」より引用）

3.5 プログラミングを活用した図形概念の形成についての研究；杉野（2015）の研究

杉野[6]は、『コンピュータを活用することで、イメージ形成を助ける可能性があり、特にプログラミングでは、言語と図の両方があることから、この両者間の翻訳に対してより強力に働く可能性がある。』とした上で、図形概念の形成において、「プログラミングには、言語と図を照らし合わせることができる強みがあり、図形概念を統合的に発展させることができる」とプログラミングの有用性について述べている。

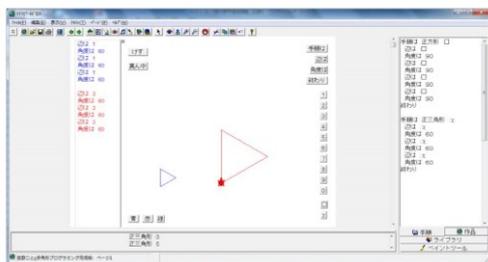


図5（杉野によるプロシージャの例より引用）

3.6 中学校数学科における曲線の性質を題材にした授業開発；萩無里（2015）の研究

萩無里[7]は、コンピュータなどのテクノロジーを活用することで、今まで中学校数学科で扱うことができなかった曲線を取り上げる試みを行っている。曲線の有用性や美しさに注目しつつ、曲線への関心を高めることを目標に、学習指導要領の範囲を超えた放物線、懸垂曲線、サイクロイド曲線についての授業プランを開発している。（図7）



図6（萩無里の実験映像の抜粋より引用）

3.7 私立中学校入学試験；京都橋中学校（2019）

京都橋中学校では長方形を回転移動させたときの頂点の軌跡を考え、その軌跡を分割し「おうぎ形の弧」と捉えて長さを求める問題を入試問題として設定している[8]。おうぎ形の弧の長さは、「半径×2×円周率×（中心角/360°）」で求めるため、回転の中心、回転の半径、回転角の大きさについて考えなくては解けない問題となっている。（図7）

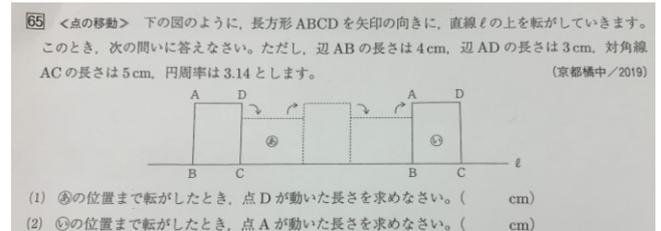


図7（中学校入学試験の問題より引用）

3.8 私立高等学校入学試験；大阪高等学校（2015）

正多角形の回転移動は高等学校入学試験の問題でもしばしば見受けられるが、動的な考え方を要する問題は少なく、動的な操作を行った後の曲線の長さや、曲線に囲まれた領域の面積を導き出す問題が多いのが現状である。この入学試験問題[9]は、正方形を回転移動させたときの動き（図8）が既に問題文に記載されており、単なる斜線部分の面積を求める問題となっていた。

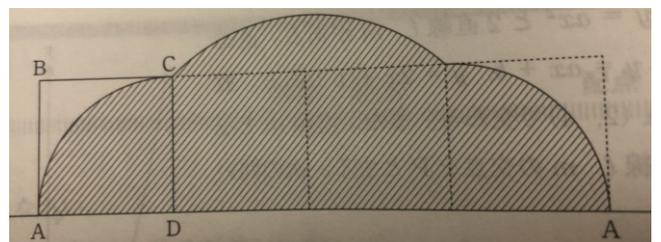


図8（高等学校入学試験の問題より引用）

4. 教材研究

4.1 「図形の回転移動」の概念

4.1.1 小学校での図形の「回転移動」の活動

小学校学習指導要領解説[10]では、第4学年、内容の扱い(7)に、「平行四辺形、ひし形、台形で平面を敷き詰めるなどの操作的な活動を重視するよう配慮するものとする」とあり、回転移動という言葉は使われていないが180度の回転移動を行うことによる敷き詰めが取り扱われている。

4.1.2 中学校での「図形の回転移動」の概念

中学校学習指導要領解説[11]では、図形の移動は『あるきまりに従って図形を他の位置に移すものであり、その図形を構成している各点はそのきまりに従って移動する』と記述され、回転移動を『図形のある点を回転の中心として一定の角だけ回転する移動である。この移動は回転の中心の位置及び回転角の大きさと回転の向きによって決まる。』と記述している。

4.1.3 高等学校における「回転移動」の取り扱い

高等学校学習指導要領解説数学編理数編[12]では、数学Ⅱで取り扱う「三角関数」の内容に、「加法定理に関連して、平面上の点の原点を中心とする回転移動を取り扱うことも考えられる」とある。三角関数の学習で回転移動を幾何学的な操作だけでなく計算式として扱うことが可能になる。

また、数学Cで取り扱う「平面上の曲線と複素数平面」の内容には、『サイクロイド曲線を取り扱う際には、コンピュータなどの情報機器を用いるなどして、円が定直線上をすべることなく転がる様子やその円周上の点の動く様子を観察する』『複素数 z に $\alpha = r_0 (\cos\theta_0 + i \sin\theta_0)$ をかけることは、点 z を原点のまわりに θ_0 だけ回転し、原点からの距離を r_0 倍した点に移すことであることなど、複素数の積や商の図形的な意味を理解できるようにする。』とある。

ICT 機器を活用して実際に円が動いている様子を観察し、サイクロイド曲線の図形的な性質を見出す学習活動が想定されており、式の演算と図形的な意味を相互に関連付け、ただ計算するだけでなく、その計算に含まれる意味を考えることが重視されている。

4.2 「図形の回転移動」の教材について

上述の回転移動の知見を踏まえて、今回の授業では、回転の中心の位置、回転の半径、回転角の大きさの三要素から図形の回転移動を考える。

4.2.1 基本図形の頂点の移動を考える教材

図9に示すように、正六角形が定直線上を滑らずに回転するときの特定の頂点の軌跡を考える問題を扱うこととした。

問題自体の考え方は、教科書に採用されている一般的な問題と同様であるが正六角形や正十二角形の難易度は高い。

問題解決の過程で回転の中心の位置、回転の半径、回転角の大きさの三要素を考え、図形の回転移動の本質を学習し図形に対する見方を一層豊かにすることがねらいである。

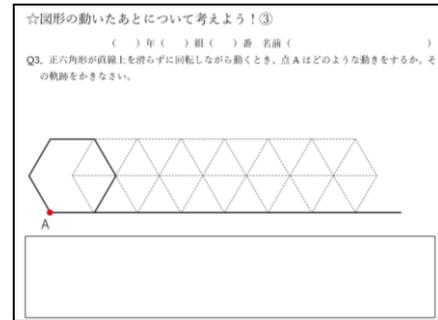


図9 (正六角形のワークシート)

4.3 サイクロイド曲線について

4.3.1 「サイクロイド曲線」の取り扱い

一般に、円が定直線上を滑らずに回転したときの円上の定点が描く軌跡として得られる曲線をサイクロイド曲線という。最速降下曲線とも呼ばれ、任意の2点間を結ぶ全ての曲線のうち曲線上に軌道を束縛された物体に対して、重力のみが作用する仮定の下、物体が速度0で、ポテンシャルが高い方の点を出発してからもう一方の点に達するまでの所要時間が最も短いという性質を持つ。

高等学校学習指導要領解説数学編理数編[12]では、媒介変数表示の良さを理解できるようにするために、媒介変数表示以外では表すことの難しいサイクロイド曲線を取り上げるよう記されている。

また、高等学校学習指導要領解説理科編理数編[13]では、最速降下曲線やその性質については特に記されていない。

4.4 Scratch について

4.4.1 Scratch とは

Scratch (スクラッチ) とは初心者が最初に正しい構文の書き方を覚えること無く結果を得られるプログラミング言語学習環境である。Scratch は制作者の最優先事項を子供達が可能な限り簡単に学習するように作成できるため触覚的なプロセスを通した構築とテストが可能となっている。

4.4.2 数学教育で Scratch を使う背景

数学の教材として Scratch を使う場合の優れている点について述べる。

- (1)シミュレーションが可能である。
- (2)実験、実証が可能である。
- (3)プログラムの変数の値を変えることで、条件設定の変更が容易である。
- (4)動きとプログラムが可視化されているため、数学の概念理解が深まると考えられる。
- (5)情意面での効果が期待できる。

4.4.3 「MSC アニメーション」の理念

従来の数学教育では「数学の概念」に対応する動画という考えは存在しなかった。そこで、「数学の概念」に対応する新発想の動画のプログラミングを、Scratch を用いて行う。この新形式の説明動画を「MSC アニメーション」とする。MSC とは Mathematical Simulation of Concept の略称である。

5. 授業実践

5.1 授業実践例

本時は中学校数学科における平面図形「図形の回転移動」を学習する。その際、Scratch で作成した教材を用いることで、図形の回転移動における概念的理解を目的とした深い学びに繋げる。さらに、回転移動の三要素を用いて、サイクロイド曲線の初等幾何学的近似を行い、興味・関心を引き出すことを目標とする。

5.1.1 授業の概要

- (1). 対象生徒 大阪教育大学附属平野中学校 第3学年
- (2). 実施内容 「図形の回転移動（発展学習）」2時間指導
- (3). 実施日 2019年10月24日、31日
- (4). ICT環境
 - ・教師用コンピューター 1台
 - ・移動式スクリーン 1台
 - ・移動式プロジェクター 1台

5.1.2 授業展開および授業の様子

(1) 第1時/2時間指導

第1時では、正三角形と正方形の回転移動について、個別で考えた後、班でその考えの共有を行うことで「回転移動の三要素」の発見を促した。具体的には、回転移動において、特定の頂点が描く軌跡を、作図のみにとどまらず、数学的な言葉を用いた説明にも取り組んだ。また、「回転移動の三要素」の発見を支援する目的で動画を上映した。また、図10は作図活動に取り組んでいる様子である。



図10 (作図の取り組み)

(2) 第2時/2時間指導

第2時では、「回転移動の三要素」を踏まえて、正六角形の回転移動における特定の頂点が描く軌跡を作図した。念頭操作の支援として動画を上映した(図11-1)。また、正六角形までの流れを活かして、正十二角形の回転移動についても班活動に取り組んだ。(図11-2)



図11-1 (支援の様子)



図11-2 (班活動の様子)

(3) 生徒の作図や説明の例

・図12は、正六角形の回転移動の成功した例である。回転移動の三要素をおさえたことによって作図に成功する生徒が多く見られた。

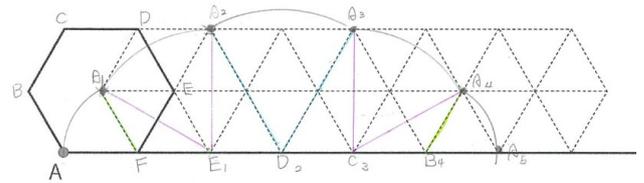


図12 (正六角形ワークシート)

・図13は、正六角形の回転移動の誤答の一例である。途中の回転移動の中心の位置を、正六角形の重心にしたことで、2回目と4回目の回転移動の際に誤答が起きてしまった。これは回転移動の三要素の「回転の中心の位置」が常に図形の右下の頂点の位置になることに気付かなかったために起こった誤答であると推測される。このような誤答をした生徒には1回の回転ごとに、回転の中心の位置を確認するような指導をしていく必要がある。

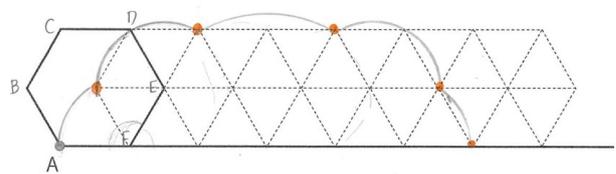


図13 (正六角形ワークシート)

・図14は、正六角形の回転移動の誤答の一例である。途中の回転移動について、正六角形の重心を回転の中心と混同し、さらに対称性を意識した結果起きた誤答と考えられる。これは回転移動の三要素の中の「回転の中心の位置」が常に右下の頂点の位置になること、「回転角の大きさ」が常に一定であることに気付かなかったために起こった誤答であると推測される。このような誤答をした生徒には、回転の中心の移動と、回転角の大きさを指導していく必要がある。

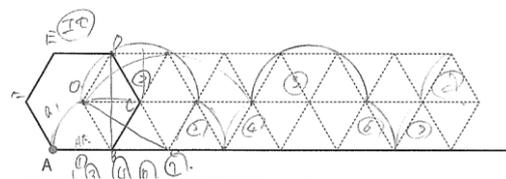


図14 (正六角形ワークシート)

・図15は、正十二角形の回転移動の成功した例である。正十二角形の作図は予想に反して成功する生徒が多く見られた。正六角形までの事前学習で回転移動の三要素を理解した生徒が多かったためであると推測される。

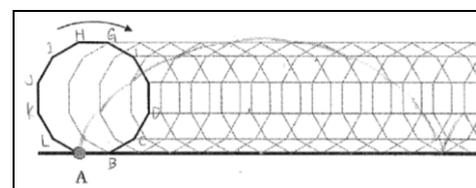


図15 (正十二角形ワークシート)

5.1.3 学習指導案

図 16-1, 図 16-2 に実践授業で用いた学習指導案を示す。

数学科 学習指導案	
指導者：大阪教育大学附属平野中学校 教諭 浦瀬 奈都 共同研究：大阪教育大学 数学教育講座 上田研究室	
<主題>	プログラミング教材を用いた ICT 活用型の授業実践 図形の回転移動を深く学び、幾何学的作図から中学生がサイクロイドの発見体験をする
<日時>	2019年11月9日(土) 第1限(9:30 ~ 10:20)
<対象>	大阪教育大学附属平野中学校3年1組(男子名、女子名 合計名)
<場所>	大阪教育大学附属平野中学校(大阪府大阪市平野区清町2丁目1-24)
<単元名>	第3学年 図形領域 発展学習 図形の回転移動(総合問題として扱う)
<学習の所在>	高校の数学教育の教材にサイクロイド曲線がある。教材としての主眼は媒介変数表示の理解が主な目的である。サイクロイド曲線自体は日常学習者においても見られる良い教材であるにもかかわらず、媒介変数表示の難解さからサイクロイド曲線自体に興味を持つことができない状態となっている。さらに、高校の数学の教育課程上では、教員に位置づけられているため、理科系の一部の生徒のみ学習する実態となっており、高校生全員がサイクロイド曲線を学習する状況になっていない。
<ICT教材観>	そこで、本研究においてはサイクロイド曲線の近似的アプローチに取り組むことにした。今回は図形の回転移動シミュレーターを用いて、従来の教室では不可能であった動的表現を用いることで、ICTでなければできない「図形の回転移動の深層理解を授業の目標とした」。ICTプログラミング教材の長所は「動的な画面で、動きの初期状態から最終状態への遷移状況が可視化され、思考力が深まる教材」と考えている。
<回転移動とは>	中学校学習指導要領において、図形の移動とは、あるまきりに従って図形を他の位置へ移動するものであり、その図形を構成している各点がそのまきりに従って移動することになる。回転移動とは、図形のある点を回転の中心として一定の角度だけ回転する移動である。この移動は、回転の中心の位置及び回転角の大きさと同様の向きによって決まる。そこで本研究においては前述の要素を「図形移動の三要素」と定義する。特に、回転角の大きさが180°である回転移動を、点対称移動という。
<本時の目標>	本時は具体的な事象から数学的な概念を見出すという視点から、回転移動の問題を扱う。具体的には回転移動のシミュレーターを用いる。以前の学習ではシミュレーターの動きの画面から必要な情報を抽出し、「図形移動の三要素」を見出した。その「図形移動の三要素」を用いて、正六角形、正十二角形の課題を解決する。その過程で、サイクロイド曲線の概念の気づきへと繋げる。結果として図形移動概念の深い学びにつながる。
<指導の方法>	本時の指導方法として、まずアナログ方式としてコンパスと定規を用いて図形の回転移動の軌いたあとを作図する。正六角形の軌いたあとと作図においては「図形移動の三要素」を既に学んでいるため、作業の難易度は低くなる。同様に正十二角形の軌いたあとを作図する。その軌いたあとを比較対比することによって、正多角形の頂点の数が増えた場合を予想する。正多角形の頂点の数を増やすと最終的に円になることから、円の場合のある一点の軌いたあとがサイクロイド曲線になることを知識理解として伝える。この場合、サイクロイド曲線の具体的な内容を教えるのではなく、あくまでサイクロイド曲線を予想することにとどめる。

図 16-1 (学習指導案 第2時/2時間)

<展開>		
学習のなかれ	学習活動・予想される反応例(○)	指導上の留意点(・)手だて(+)
本時の目標 図形の軌いたあとについて考えよう		
導入 課題の場面を理解し、正多角形の頂点の回転移動の様子を知る。(個別把握)		
課題の場面を提示する。(7分)	○正多角形の頂点の軌いたあとを求めることが、課題であることを理解する。 ○正六角形、正六角形の回転移動について復習する。	・一回転移動の三要素について思い出させる。 ・一回転移動シミュレーターを使うことで点の動きがどのようなになっているのかイメージをしやすいとする。 ★ICTの活用
展開・課題1 正六角形の場合の回転移動の頂点の軌いたあとを考える。(個別思考)		
・正六角形の場合の、回転移動を考える。(10分)	○点の動きを各自で考えてワークシートに記入する。 ○一回転移動の三要素に留意しながら作図する。	・一回転移動シミュレーターを使うことで点の動きがどのようなになっているのかイメージをしやすいとする。 ★ICTの活用
・一回転移動の動画(三要素強調)を見せる。(5分)		
展開・課題2 正十二角形の場合の回転移動の頂点の軌いたあとを考える。(グループ思考)		
・正十二角形の場合の、回転移動を考える(班で意見を交流する)(10分)	○点の動きを班で考えてワークシートに記入する。	
共有 班ごとの考えを発表し全体で共有する。	○「正多角形の頂点の数が増えれば増えるほど頂点の軌いたあとは滑らかな曲線に近づく」	・正多角形の頂点を増やせば、円に近づくことをおさえる ・その曲線がサイクロイド曲線であることを伝える。
整理 本時をふりかえる。(個別整理)		
・本時の目標が達成されたことを確認する。(3分)	○「正確な作図ができた」	・授業のまとめを行う。 ・ワークシート回収。 →サイクロイド曲線について調べてみよう。
・正確な作図を全員でおこなう。(3分)		

図 16-2 (学習指導案 第2時/2時間)

6. 実践授業の評価と考察

6.1 定量的アンケートの結果の分析

授業後の生徒の自己評価を択一式リッカート尺度 4 段階法による質問紙と、自由記述式アンケートで評価する。

6.1.1 回転移動の三要素の理解を問う質問

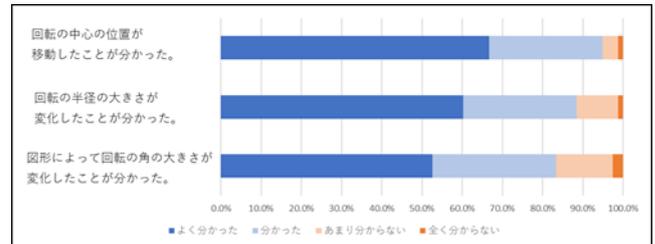


図 17-1 (集計結果：百分率表示)

集計結果より、回転移動の三要素における理解が概ね進んでいることがわかる。とりわけ、生徒にとっては「回転の中心の位置」「回転の半径」「回転角の大きさ」の順に理解しやすい内容であることが読み取れる。

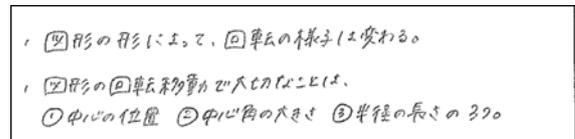


図 17-2 (自由記述項目の意見)

回転角の大きさは図 17-1 より気付きにくい内容だとわかるが、図 17-2 のように回転角を頂点の軌跡と半径を結んでできるおうぎ形の中心角として考え、回転角の大きさの重要性に気付く生徒も見られた。

6.1.2 アニメーションの動きが役に立ったかを問う質問

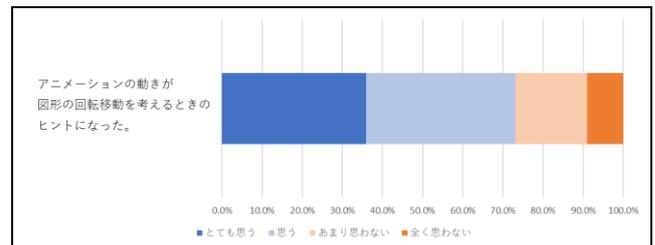


図 18-1 (集計結果：百分率表示)

アニメーションに対して肯定的な意見が多いことがわかる。今回の研究は附属中学生を対象としたため、肯定的な意見は7割にとどまったが、公立中学生を対象とした場合の肯定派はより多くなると予想される。

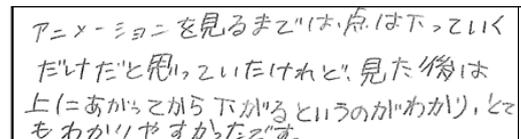


図 18-2 (自由記述項目の意見)

図 18-2 は、アニメーションへの肯定的な意見の例である。このように、回転移動の初期状態から最終状態までの遷移状況を可視化させることが効果的であることがわかる。

6.1.3 正十二角形の回転移動の理解を問う質問

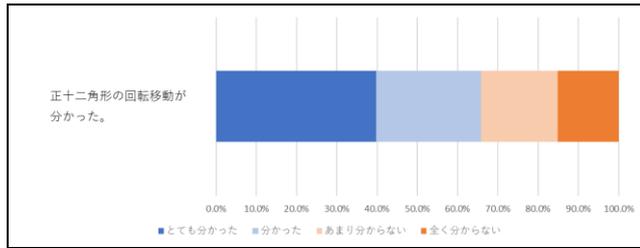


図 19-1 (集計結果：百分率表示)

回転移動の三要素の理解を問う質問に比べ割合は低くなるものの、肯定的な意見を回答した生徒が6割を超えた。正三角形、正方形、正六角形から回転移動の要点を一般化(回転移動の三要素を理解すること)させると、正十二角形にも対応できることがわかる。回転移動の三要素の事前学習から、正多角形の頂点の個数が増えても対応が可能であることがわかる。

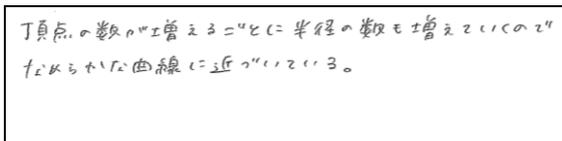


図 19-2 (自由記述項目の意見)

図 19-2 は、軌跡がなめらかな曲線に近づくことを洞察した記述の一例である。このような結果から、サイクロイドの初等幾何学近似を中学数学における教材として扱っていくことは可能であると考えられる。

6.1.4 サイクロイドの知識・理解を問う質問

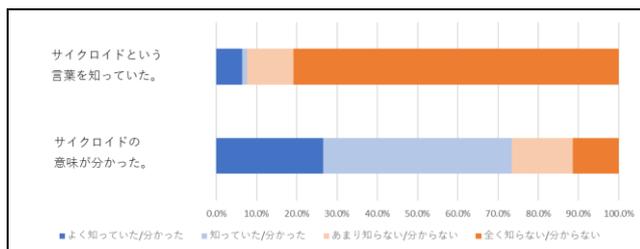


図 20-1 (集計結果：百分率表示)

授業開始前は9割以上の生徒がサイクロイドという言葉を知らない状況であったが、授業終了後は7割以上の生徒が意味を「(とても)分かった」と感じたことが読み取れる。このことから中学生でも初等幾何学近似という手段を用いて、サイクロイドの意味や性質について学習することは十分に可能であると考えられる。

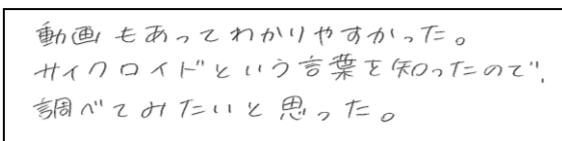


図 20-2 (自由記述項目の意見)

図 20-2 はサイクロイドという言葉を知識として学習したことで、生徒の自発的な学習に繋がる学習意欲を引き出した一例である。

6.1.5 サイクロイドと日常生活との関わりを問う質問

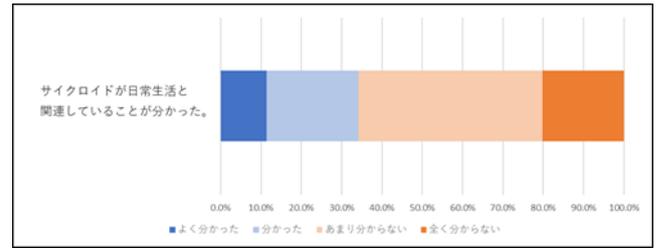


図 21-1 (集計結果：百分率表示)

否定的な意見を答えた生徒が6割以上で、生徒が日常生活との関連性を感じられなかったということがわかる。

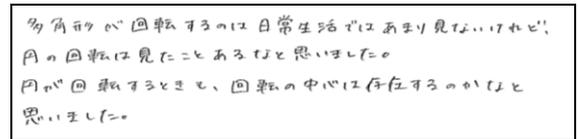


図 21-2 (自由記述項目の意見)

図 21-2 のように日常生活との関わりに気付いた生徒も見られた。日常生活との関わりを感じさせるための工夫については今後の課題としていきたい。

6.2 サイクロイドの予想についての考察

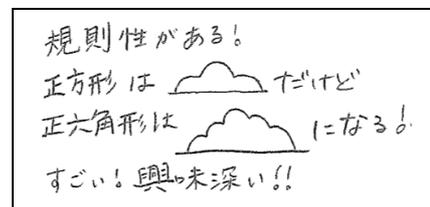


図 22 (自由記述項目の意見)

図 22 は回転移動の三要素を理解し、そこから帰納的な考え方を用いて、規則性を見出した例である。規則性を自分自身で発見することが興味・関心に繋がっている。この生徒はサイクロイドが半円の弧の形に近づくことを推測していた。

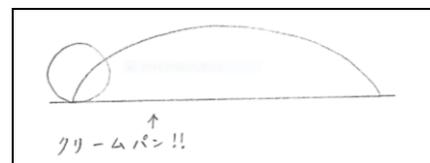


図 23 (自由記述項目の意見)

図 23 はサイクロイドは滑らかな曲線を描くが、半円の弧の形にはならないと推測した生徒の例である。「クリームパン」という具体物を用いて概形を表現している。

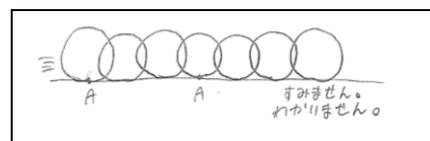


図 24 (自由記述項目の意見)

図 24 は複数の円を描いて点の位置から軌跡を推測しようとした生徒の記述例である。しかし、具体的なイメージまでは至らなかった様子である。

7. まとめ

本研究は、中学校数学の「図形の回転移動」の単元で、サイクロイドの初等幾何学的近似アプローチを試みた。実践授業の考察結果を項目別にまとめる。

(1) 回転移動の三要素について

項目別アンケート(図 17-1)に8割以上の生徒が「(とても)分かった」と回答した。記述式評価においても同様の結果が見られたことから、回転移動についての理解を深める効果があると考えられる。これは、中学校入学試験[8]や高等学校入学試験[9]で出題される図形問題に取り組むための支援策としても有効であると思われる。

(2) アニメーションについて

7割程度の肯定的な意見が得られた。頭の中だけで想像することが難しい場面においても、アニメーションを見ることで実際の動きを想像しやすくなり、自分自身で要点を整理しやすくなる効果があると考えられる。

(3) 正十二角形の回転移動について

「(とても)分かった」と回答した生徒は6割程度に止まった。しかし、正三角形、正方形、正六角形から回転移動の要点を一般化(回転移動の三要素を理解すること)させると、結論として、正十二角形にも対応できることが記述式評価(図 19-2)から読み取ることができた。

(4) サイクロイドの知識・理解について

授業開始前に既知である生徒は1割にも満たなかったが、授業終了後にサイクロイドの意味について「(とても)分かった」と答えた生徒は7割を超える結果となった。このことから、初等幾何学的近似がサイクロイドの学習として有効であると考えられる。

(5) サイクロイドの日常生活との関わりについて

項目別アンケート(図 21-1)に「(とても)分かった」と回答した生徒は4割に満たなかった。この点については対策が必要だと考える。具体的には、高校生に対するサイクロイドの授業実践[3]のように、サイクロイド曲線を最速降下曲線として取り扱うことで身近に感じるような取り組みが考えられる。

(6) サイクロイド曲線の推測について

多くの生徒が半円の弧になると回答しており、半円の弧を横に伸ばしたような図をかいた生徒は少数であった。また、わからないと回答した生徒も少数であるが存在した。このことから、回転移動の三要素を理解することで多くの生徒はサイクロイド曲線の大まかな形を推測することはできるものの、既知の図形と結び付けてしまい、半円の弧と回答した生徒が多いと考えられる。

以上の結果から、サイクロイドを中学校数学の「図形の回転移動」の単元で、初等幾何学的近似アプローチという観点から扱うことは可能であるという結論に至った。

しかし、今回の研究を通して、新たな課題も発見された。サイクロイドの意味が分かったと回答した生徒は7割に及んだが、サイクロイドが日常生活と関連していることが分かったと回答した生徒は3割にとどまった。この二つの設問の回答に大きな差が生じてしまった。これは、生徒たちがサイクロイドという言葉を理解したのであって、サイクロイドが日常生活にどのように役立たせられるのかという点にまで至らなかったと考えられる。事実として、本研究を始めるにあたって、日常生活との関連は重要視していなかった。しかし、項目別アンケートの集計結果から、生徒がサイクロイド曲線に対して、親しみをもつことのできるような機会が必要であると感じた。今後は、これらの課題についての対応策を考えていきたい。

最後に、実践研究に協力していただいた大阪教育大学附属平野中学校の佐藤賢司校長並びに諸先生方、3年生の生徒の皆さんに感謝いたします。

<参考文献>

- [1]文部科学省「算数・数学に関する資料」教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ 資料9 p.21 (2015)
- [2]上出吉則, 辰巳丈夫, 村上祐子『プログラミングの算数数学教育での効果と検証—生徒の創作したScratchプログラム教材を授業で活かす—』情報処理学会コンピューターと教育学会 SSS2017 (2017)
- [3]井上明「最速降下曲線(サイクロイド)」啓林館 (2015)
- [4]高本誠二郎「移動と作図から論証への移行に関する研究」上越数学教育研究 第23号 p.31~42 (2008)
- [5]福嶋卓海「高等学校数学科におけるテクノロジーを利用した教材開発」日本数学教育学会誌 第99巻 第3号 (2017)
- [6]杉野裕子「数学概念形成のためのLOGOプログラミングコンテンツの開発—図形概念のイメージ化と言語化を促すために—」教科開発学論集 第2号 (2014)
- [7]荻無里広造「中学校数学科における曲線の性質を題材にした授業開発—曲線について関心を広げる—」授業実践開発研究 第8巻 (2015)
- [8]英俊社「近畿の中学入試(標準編)算数 2020年度受験用」p.109 (2019)
- [9]英俊社「2019年度用 大阪高等学校5ヵ年版」2015年度 p.3,4 (2019)
- [10]文部科学省「小学校学習指導要領(平成29年告示)解説 算数編」p.202,203 (2017)
- [11]文部科学省「中学校学習指導要領(平成29年告示)解説 数学編」p.76 (2017)
- [12]文部科学省「高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編」(2018)
- [13]文部科学省「高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 理科編 理数編」(2018)