Vol.2019-EC-54 No.6
2019/12/13

# Material Point Methodによる気泡シミュレーション

内川 亮介[1]　石塚 裕己[1]　池田 聖[1]　大城 理[1]

**概要**：川の流れや，波しぶきといった液体表現は，最新のコンピューターゲームや VR コンテンツなどの Computer Graphics(CG) を用いたエンタテインメントアプリにとって重要である．なかでも液体の動きに現れる気泡は視覚に与える影響が大きく，物理シミュレーションを用いて水中の気泡を表現しようとする試みが成されてきた．気泡シミュレーションを行う際の代表的な問題として，非圧縮性流体である液体と圧縮性流体である気泡の取扱が挙げられる．今回は，粒子法と格子法を組み合わせた Material Point Method と呼ばれる手法を用いることで，非圧縮性流体と圧縮性流体を同時に取り扱い，気泡 CG を生成する手法について提案する．提案手法は粒子の位置を用いて気泡界面の特定を行い，気泡内では圧縮性流体の方程式を，流体内では非圧縮性の流体方程式を解くことによって，気泡と液体を同時に表現する．提案手法によって，水中の気泡が表現可能であることを実証する．

**キーワード**：MPM，泡，混相流，物理シミュレーション，CG

## 1. はじめに

コップに水を注いだ際や，プールにヒトが飛び込んだ時，空気が水の中に潜り混んで，泡となって上昇し水面に浮かび上がる様が確認される．液体運動に伴う泡の挙動は私達にとって非常に身近な存在であり，物理シミュレーションを用いて泡の Computer Graphics(CG) を作成することには価値がある．本研究では，Material Point Method(MPM) を用いた気泡シミュレーションを行う手法を提案する．MPM は，粒子法と格子法を組み合わせた手法である．粒子法は，計算点である粒子自体が移動するため，移流項の計算をする必要がなく簡単に効率的に流体計算を行うことができるが，境界条件の設定が困難である．一方，格子法では境界条件の設定は簡明にできるが，移流項の計算に時間を多く要した．MPM は，主な計算自体は格子点上で行い，計算で得た情報を粒子に移す．粒子を動かすことで移流項の計算を省略することができ，格子上で境界条件を容易に設定できる利点を持つ手法である．気泡シミュレーションにおいて，特に問題と成るのは非圧縮性流体である液体と圧縮性流体である気泡の境界の取扱である．MPM は境界条件，および移流計算に長けた手法であるので気泡シミュレーションに適した手法である．本研究では，MPM による気泡シミュレーションの第一段階として非圧縮性流体，および圧縮性流体の MPM による計算手法を確立する．

[1] 大阪大学 大学院基礎工学研究科
Osaka University Graduate School of Engineering Science

## 2. MPM における流体計算

気泡は圧縮性流体として，液体は非圧縮性流体として取り扱う．MPM では，対象物体を粒子で離散化して表現する．それぞれの粒子が持つ粒子速度や粒子質量から格子点の各格子点の格子速度や格子質量を求め，格子上で支配方程式を解き，格子速度を更新する．更新した格子速度を用いて，粒子速度を更新し，粒子を移動させる．粒子の移動によって，移流を表現できるため，格子上において，移流項を陽に計算する必要がない．本節では非圧縮性流体および圧縮性流体の挙動を記述する方程式を格子上で解く手法について述べる．

### 2.1 非圧縮性流体

非圧縮性流体の挙動は，連続の式 (1) および運動量保存の式 (2) によって記述される．

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{2}$$

$\mathbf{u}$ は流速，$\rho$ は密度，$\mathbf{f}$ は体積力である．任意の変数 $\xi$ に対するラグランジュ微分 $\mathrm{D}\xi/\mathrm{D}t$ は，$\partial\xi/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\xi$ と定義されるが，MPM において，移流項 $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\xi$ は粒子自身の移動によって表現されるため，格子点上における計算においては考慮する必要がない．式 (2) を格子点上で解く．その際に，Zhang et al.[1] が提案するように，圧力項の計算と外力の計算に分けて計算する．まず，$n$ 番目の時刻に

おける格子点 $i$ における流速 $\mathbf{u}_{i,n}$ に対して，外力項を適用することにより一時格子流速 $\mathbf{u}_i^*$ を式 (3) のように求める．一時格子流速から格子流速を更新は式 (4) で表される．

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{i,n} + \mathbf{f}_{i,n} \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_{i,n+1} = \mathbf{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla p_{i,n+1} \tag{4}$$

一方で，式 (4) に左から $\nabla\cdot$ を作用させることにより，圧力に関する式 (5) を得る．

$$-\nabla^2 p_{i,n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{u}_i^* \tag{5}$$

式 (3)，式 (5)，および式 (4) により，格子点上における流速の更新を行う．

### 2.2 圧縮性流体

圧縮性流体の挙動は連続の式 (6) と運動量保存の式 (7) に，エネルギー保存の方程式 (8) を加えた三式で表現される．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = -E\nabla\cdot(\mathbf{u}) - \nabla\cdot(p\mathbf{u}) \tag{8}$$

$E$ はエネルギーである．非圧縮流体の場合と同様に，外力項と圧力項に分けて解く．外力から一時格子流速 $\mathbf{u}_i^*$ を求める式は非圧縮性流体の場合と同様，式 (3) で求めることが可能である．一時格子流速に圧力項を作用させ，流速の更新も同様に式 (4) と表される．一方，圧縮性流体の場合，$\nabla\cdot\mathbf{u} \neq 0$ であるため圧力は単純な poisson 方程式から求めることはできない．式 (4) に左から $\nabla\cdot$ を作用させることにより，式 (9) を得る．

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_{i,n+1} = \nabla\mathbf{u}_i^* - \Delta t\nabla\cdot\frac{\nabla p_{i,n+1}}{\rho_{i,n+1}} \tag{9}$$

式 (9) に，気体の状態方程式 $p = B\rho$ と，Fedkiw et al.[2] が提案した圧縮性流体における圧力更新の方程式 $Dp/Dt = -\rho B\nabla\cdot\mathbf{u}$ を適用する．$B$ は $P_{atm}/\rho_{atm}$ で定義される係数であり，$P_{atm}$ は大気圧，$\rho_{atm}$ は大気圧下における空気の密度である．これにより式 (8) におけるエネルギー保存の式を省略することが可能となり，圧縮性流体における圧力の式 (10) を得る．

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2\rho_{i,n+1}B} - \nabla\cdot\frac{1}{\rho_{i,n+1}}\nabla\right)p_{i,n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} - \nabla\cdot\mathbf{u}_i^* \tag{10}$$

## 3. 実装

式 (3)，式 (4)，式 (5) および式 (10) を実装することによって，気泡のシミュレーションを行う．今回は単純に，格子内に気泡粒子が存在した場合気泡領域として扱う判定を行った．シミュレーションを行った結果を図 1 に示す．水中の気泡の表現の可能性が示された一方，気泡中に水が紛れ込んでしまっていることが確認される．厳密な領域判定，および気体と液体間における境界圧力の設定などを行っていないため，気泡と液体を完全に分離できていないのだと考えられる．

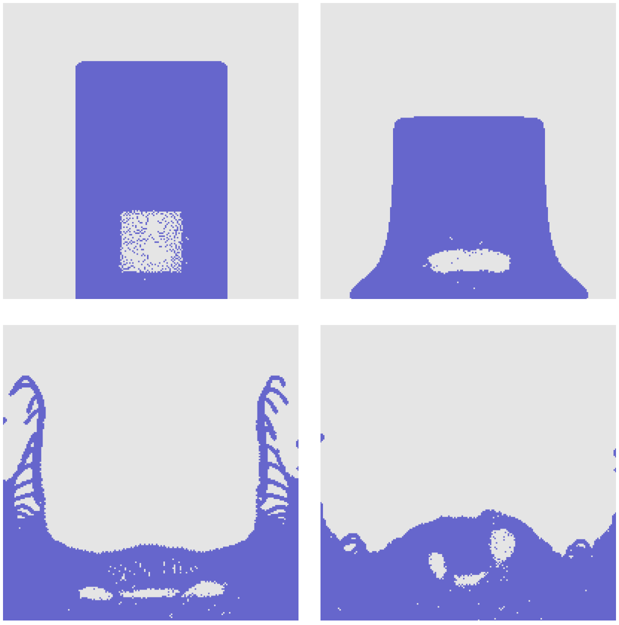

**図 1** MPM による気泡のシミュレーション

## 4. 結果と今後の展望

本研究では MPM を用いた気泡シミュレーションの手法を提案した．MPM を用いて水中の泡の表現の可能性を示すことができた．一方，水表における気泡表現までは達成できていない．今後は，非圧縮性流体と圧縮性流体の境界条件の設定，および MPM 粒子を用いた水表の泡の表現を検討する．

### 参考文献

[1] Zhang, F., Zhang, X., Sze, K. Y., Lian, Y. and Liu, Y.: Incompressible material point method for free surface flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 330, pp. 92 – 110 (online), DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.10.064 (2017).

[2] Fedkiw, R., Liu, X.-D. and Osher, S.: A General Technique for Eliminating Spurious Oscillations in Conservative Schemes for Multiphase and Multispecies Euler Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 3, No. 2, pp. 99–105 (online), available from ⟨www.scopus.com⟩ (2002).