Vol.2019-AL-175 No.25
2019/11/29

辺の追加と削除を伴うグラフ有向化問題

朝廣 雄一[1]　ジャンソン ジェスパー[2]　宮野 英次[3]　小野 廣隆[4]　T.P. サディヤ[2]

概要：無向グラフ G に対して，辺を削除または追加してグラフ G' を得るような問題がある．本稿では以下の 2 種類の問題を考える．(種類 1) 与えられた出次数の条件を満たしつつ G' の辺を向き付け (有向化) できる，G から削除可能な辺の最大数/最小数，あるいは G へ追加可能な辺の最大数/最小数を求める．(種類 2) 定められた本数の辺を G から削除，または G に追加することにより，G' を向き付け後の最大次数の最小化，あるいは最小次数の最大化を行う．本稿ではこれらの種類に属する 8 個の問題 (種類 1) MIN-DEL-MAX，MIN-INS-MIN，MAX-INS-MAX，MAX-DEL-MIN，(種類 2) p-DEL-MAX，p-INS-MIN，p-INS-MAX，p-DEL-MIN に対して得られた結果について報告する．具体的には，8 個の問題すべてに対して，グラフ G が重みなしの場合に対する多項式時間アルゴリズムを設計し，重み付きの場合に対する近似不可能性を示す．また，8 個のうち MAX-INS-MAX と p-INS-MAX 以外の 6 個については，重み付き木に対する多項式時間アルゴリズムを設計する．

1. はじめに

入力グラフ G に対して，何らかの辺操作を行うことで，ある性質 Π を満たすグラフ G' を得る問題が知られている [3], [6]．性質 Π としては様々なものがあるが，本稿では次数についての条件に注目する．例えば，Perfect Matching 問題は，入力グラフ G から辺の削除により構成できる部分グラフ G' のうち，G' 中のすべての頂点の次数が 1 となるものを探す問題であると理解できる．

本稿では，辺の追加･削除操作を行なった上で，無向グラフの向き付けを行う問題を考える．ここで無向グラフの向き付けとは，それぞれの無向辺に対して向きを付けて，有向グラフを得ることである．そういった設定の問題として，計算機の負荷分散に関連のある，8 個の問題 MIN-DEL-MAX，MIN-INS-MIN，MAX-INS-MAX，MAX-DEL-MIN，p-DEL-MAX，p-INS-MIN，p-INS-MAX，p-DEL-MIN を導入する．例えば MIN-DEL-MAX と負荷分散の関係については次のように理解できる：仕事の集合と計算機の集合が与えられるが，それぞれの仕事は事前にその準備が行われている 2 台の計算機のどちらかでしか遂行できない．このような条件下で，最も負荷の高い計算機の負荷 (最大負荷) を最小化したい (ここまでの問題設定だと例えば [1], [4], [5], [7] などで研究が行われている)．ところが仕事を計算機に割り当ててみたところ，最大負荷が高すぎる場合には，いくつかの仕事の遂行は諦め，さらに仕事の割り当てを見直すことで，最大負荷を下げたいという要求がある．ここで，計算機をグラフの頂点と考えると，各仕事はそれを遂行可能な 2 台の計算機に対応する頂点間の辺と捉えることができる．つまり，問題の入力を無向グラフとして理解できる．また，それらの仕事を計算機に割り当てることは，辺の向き付けで表現でき，最大負荷は頂点の最大出次数に対応する．さらに，仕事の遂行を諦めることは，辺の削除に対応する．このように，無向グラフから辺の削除を行なった上で，最大出次数を許容できる値以下とするような無向グラフの向き付けを考えるという問題が MIN-DEL-MAX である．

得られた結果をまとめると以下の通りである．
- 8 個の問題全てに対して，入力グラフが重みなしの場合には，多項式時間アルゴリズムを設計できる．
- 8 個の問題全てに対して，入力グラフが重み付きの場合には，何らかの近似不可能性を示せる．
- 8 個の問題のうち MAX-INS-MAX と p-INS-MAX を除く 6 個については，重み付き木に対する多項式時間アルゴリズムを設計できる．

なお，本稿は [2] で公表した内容について簡潔にまとめたものであるので，詳細については [2] を参照されたい．

2. 問題の定義

単純無向グラフ $G = (V, E)$ について考える．ここで V と E はそれぞれ頂点の集合と辺の集合である．任意の $u, v \in V$ に対して，u と v を端点とする無向辺を $\{u, v\}$ で

[1] 九州産業大学
[2] 香港理工大學
[3] 九州工業大学
[4] 名古屋大学

表す．また，u から v へ向かう有向辺は (u,v) で表す．グラフ G に対して，補グラフ $(V,\overline{E})$ を G^c で表す．ここで，$\overline{E}=\{\{u,v\}\mid u,v\in V, u\neq v, \{u,v\}\notin E\}$ である．G の向き付け Λ とは，E 中の各辺に対して向きを割り当てることである．つまり，各 $\{u,v\}\in E$ に対して (u,v) または (v,u) を選ぶことである．よって Λ を，各 $\{u,v\}\in E$ に対して正確に (u,v) または (v,u) のどちらか片方を含む，有向辺の集合と理解してよい．そして，$\Lambda(G)$ は有向グラフ (V,Λ) を表すとする．任意の $v\in V$ と，G に対する固定された向き付け Λ に対して，$d^+(v)$ は，$\Lambda(G)$ 中の v の出次数を表す．最後に，$\Gamma(G)$ を，G に対する向き付けを全て含む集合と定義する．

4 個の問題を以下で定義する．それぞれに対する入力は，単純無向グラフ $G=(V,E)$ と，正整数 k' である．

- MIN-DEL-MAX: 一般性を失わずに $k' \le \min_{\Lambda\in\Gamma(G)}\max_{u\in V} d^+(u)$ と仮定する．その上で，次の条件を満たす辺集合のうち，辺数が最小のものを探す．ここで満たすべき条件は，その辺集合の削除により得られるグラフ G' が $\min_{\Lambda\in\Gamma(G')}\max_{u\in V} d^+(u)\le k'$ を満たすことである (なお G が単純グラフであるので G' も単純グラフである).
- MIN-INS-MIN: 一般性を失わずに $k' \ge \max_{\Lambda\in\Gamma(G)}\min_{u\in V} d^+(u)$ と仮定する．その上で次の条件を満たす辺集合のうち，辺数が最小のものを探す．ここで満たすべき条件は，その辺集合の追加により得られるグラフ G' が単純グラフであり，かつ $\max_{\Lambda\in\Gamma(G')}\min_{u\in V} d^+(u)\ge k'$ を満たすことである．
- MAX-INS-MAX: 一般性を失わずに $k' \ge \min_{\Lambda\in\Gamma(G)}\max_{u\in V} d^+(u)$ と仮定する．その上で次の条件を満たす辺集合のうち，辺数が最大のものを探す．ここで満たすべき条件は，その辺集合の追加により得られるグラフ G' が単純グラフであり，かつ $\min_{\Lambda\in\Gamma(G')}\max_{u\in V} d^+(u)\le k'$ を満たすことである．
- MAX-DEL-MIN: 一般性を失わずに $k' \le \max_{\Lambda\in\Gamma(G)}\min_{u\in V} d^+(u)$ と仮定する．その上で次の条件を満たす辺集合のうち，辺数が最大のものを探す．ここで満たすべき条件は，その辺集合の追加により得られるグラフ G' が $\max_{\Lambda\in\Gamma(G')}\min_{u\in V} d^+(u)\ge k'$ を満たすことである (なお G が単純グラフであるので G' も単純グラフである).

上記の 4 個の問題は，削除または追加する辺数を最大化または最小化するものであった．一方で，削除または追加する辺数を表す固定された整数 p に対して，最大出次数または最小出次数を最適化する以下の 4 個の問題も定義できる．入力は無向単純グラフ $G=(V,E)$ である．

- p-DEL-MAX: $E'\subseteq E$ かつ $|E'|=p$ を満たし，$\min_{\Lambda\in\Gamma(G(V,E\setminus E'))}\max_{u\in V} d^+(u)$ が最小となる E' を探す．
- p-INS-MAX: $E'\subseteq E(G^c)$ かつ $|E'|=p$ を満たし，$\min_{\Lambda\in\Gamma(G(V,E\cup E'))}\max_{u\in V} d^+(u)$ が最小となる E' を探す．
- p-INS-MIN: $E'\subseteq E(G^c)$ かつ $|E'|=p$ を満たし，$\max_{\Lambda\in\Gamma(G(V,E\cup E'))}\min_{u\in V} d^+(u)$ が最大となる E' を探す．
- p-DEL-MIN: $E'\subseteq E$ かつ $|E'|=p$ を満たし，$\max_{\Lambda\in\Gamma(G(V,E\setminus E'))}\min_{u\in V} d^+(u)$ が最大となる E' を探す．

本稿では，上記の 8 個の問題の入力グラフに対して，$n=|V|$，$m=|E|$ とする．アルゴリズム ALG が，任意の入力グラフ G に対して，$\max\left\{\frac{\#ALG(G)}{\#OPT(G)},\frac{\#OPT(G)}{\#ALG(G)}\right\}\le\sigma$ を満たすとき，このアルゴリズムは σ-近似アルゴリズムと呼ばれる．ここで，$\#ALG(G)$ と $\#OPT(G)$ はそれぞれ ALG と最適アルゴリズムが求めた解の値 (削除/追加した辺数，または最大/最小出次数) である．

3. 得られた結果のまとめ

本節ではこれまでに得られた結果を概観し，詳しい証明などは省略する．詳しくは [2] を参照されたい．まず，入力グラフが重みなしの場合には，8 個の問題全てに対して多項式時間アルゴリズムを設計できる．

定理 1 入力が重みなしグラフの場合には，MIN-DEL-MAX，MAX-DEL-MIN，p-DEL-MAX，p-DEL-MIN は $O(m^2\log n)$ 時間で最適解を得られる．

定理 2 入力が重みなしグラフの場合には，MIN-INS-MIN，MAX-INS-MAX，p-INS-MIN，p-INS-MAX は $O(n^4\log n)$ 時間で最適解を得られる．

次に，入力グラフが重み付きの場合には，8 個の問題それぞれに対して以下の近似下界を示すことができる．

定理 3 P=NP でないかぎり，入力を重み付き平面 2 部グラフに限定したとしても，任意の多項式時間計算可能な関数 $\rho(n)\ge 1$ に対して，MIN-DEL-MAX，MIN-INS-MIN，MAX-INS-MAX，MAX-DEL-MIN には，多項式時間 $\rho(n)$-近似アルゴリズムは存在しない．

定理 4 P=NP でないかぎり，入力を重み付き平面 2 部グラフに限定したとしても，p-DEL-MAX と p-INS-MAX には，多項式時間 1.5-近似アルゴリズムは存在しない．

定理 5 P=NP でないかぎり，入力を重み付き平面 2 部グラフに限定したとしても，p-INS-MIN と p-DEL-MIN には，多項式時間 2-近似アルゴリズムは存在しない．

一方で，入力グラフが重み付き木の場合には，8 個の問題のうち 6 個の問題 MIN-DEL-MAX，p-DEL-MAX，MAX-DEL-MIN，p-DEL-MIN，MIN-INS-MIN，p-INS-MIN

については多項式時間アルゴリズムを設計できる．MAX-INS-MAX と p-INS-MAX については未解決である．

定理 6 入力グラフが重み付き木の場合には，MIN-DEL-MAX，p-DEL-MAX，MAX-DEL-MIN，p-DEL-MIN，MIN-INS-MIN は $O(n)$ 時間で最適解を得られる．

定理 7 入力グラフが重み付き木の場合には，p-INS-MIN は $O(n\log(w\Delta))$ 時間で最適解を得られる．ただしここで，w は入力グラフ中の辺の最大重みであり，Δ は入力グラフから重みを削除した重みなしグラフ中の頂点の最大次数である．

4. おわりに

本稿では，辺の追加と削除を伴うグラフ有向化問題である 8 個の問題を導入し，その計算複雑さについて研究した結果について報告した．今後の研究の方向性としては，入力が重み付き木の場合の MAX-INS-MAX と p-INS-MAX の計算複雑さを明らかにすることや，入力が一般の重み付きグラフの場合の p-DEL-MAX などに対する近似アルゴリズムを設計することなどが挙げられる．

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K00016，JP17K00024 と JST CREST JPMJR1402 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Y. Asahiro, J. Jansson, E. Miyano, H. Ono and K. Zenmyo. Approximation algorithms for the graph orientation minimizing the maximum weighted outdegree. *J. Combinatorial Optimization*, 22(1) 78–96, 2011
[2] Y. Asahiro, J. Jansson, E. Miyano, H. Ono, S. T.P. Graph orientation with edge modifications. In *Proc. FAW2019*, LNCS 11458, pp.38–50, Springer Nature Switzerland AG, 2019
[3] N. Bansal, A. Blum, and S. Chawla. Correlation clustering. *Machine Learning*, 56, 89–113, 2004
[4] G. Borradaile, J. Iglesias, T. Migler, A. Ochoa, G. Wilfong, and L. Zhang. Egalitarian graph orientations. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 21(4), 687–708, 2017.
[5] M. Chrobak and D. Eppstein. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. *Theoretical Computer Science*, 86(2), 243–266, 1991.
[6] R. Sharan. Graph modification problems and their applications to genomic research. PhD Thesis. School of Computer Science, Tel-Aviv University, 2002.
[7] V. Venkateswaran, Minimizing maximum indegree, *Discrete Applied Mathematics*, 143, 374-378, 2004.