2日目までに生まれたすべてのゲームの構成

安福 智明 [1,a)]　末續 鴻輝 [2,b)]

概要：組合せゲーム理論においてゲームの値について調べることは，ゲームを解析する上でとても重要である．また，ある値を持つゲームが実際にどのように表現できるのかを知ることによって，ゲームを解析する際に具体例を用いた考察が可能となる．2 日目までに生まれたゲームの構成について，コナネと呼ばれるゲームにおいて高々 8×8 の盤面に収まる高々 15 個のマス目を用いて構成できることが知られている．今回我々は "それはオレの魚だ！" と呼ばれるボードゲームの変種を用いて，さらに少ないマス目によって 2 日目までに生まれたすべてのゲームを構成できた．

キーワード：組合せゲーム，ゲームの誕生日，"それはオレの魚だ！"

Composition of All Games Born by Day 2

Tomoaki Abuku [1,a)]　Suetsugu Koki [2,b)]

Abstract: It is very important to analyze game values in combinatorial game theory. In addition, by knowing how a certain value can actually be expressed, it is possible to consider using specific examples when analyzing the game by a position of concrete game. It is known that all the game positions born by day 2 can be constructed by at most 15 squares that fits on the board of 8×8 in the game called Konane. In this paper, we report that all the game positions born by day 2 with fewer squares, can be constracted also using a variation of the board game called "Hey, That's My Fish!".

Keywords: Combinatorial Game, The birthday of game, "Hey, That's My Fish!"

1. はじめに

本研究には "それはオレの魚だ！" と呼ばれるボードゲームの変種と，組合せゲーム理論を用いた．

1.1 組合せゲーム理論

組合せゲーム理論は Conway や Berlekamp らによって考案された理論であり，主に対戦ゲームの戦略を代数的に解析することを目的としている．組合せゲーム理論の解説書としては，[1] や [6] などがある．その数学的構造の美しさやアルゴリズム的な興味深さから，近年数学分野の一分野として発展してきた．代数的な解析を行うためには，ゲームというものを数学的にある程度うまく定式化する必要がある．そのため，対戦ゲームのうち，組合せゲーム（偶然要素を含まず，双方のプレイヤーがどの局面においても完全な情報を持つゲーム）と呼ばれるゲームについて解析を行うことが主流となっている．本研究には，ボードゲーム "それはオレの魚だ！" の変形として得られる組合せゲームを用いる．

1.2 "それはオレの魚だ！" のルール

"それはオレの魚だ！" [3] のルールについて述べる．"それはオレの魚だ！" は 2〜4 人で対戦するボードゲームである．有限個の正六角形のマス目を用いて対戦する．それぞれのマス目には魚が 1〜3 尾描かれている．

まず，プレイヤーにはチームカラーが与えられる．プレイヤーはその時の対戦人数（n 人 $(2 \leq n \leq 4)$ とする）に応じて，魚が 1 尾であるマス目にチームカラーのついたペンギンを交互に $6-n$ 羽置き，全てのプレイヤーがペンギンを置き終わった時点から，ゲームが開始される．

プレイヤーは交互に手を打つ．プレイヤーが自身のター

1　筑波大学
University of Tsukuba
2　国立情報学研究所
National Institute of Informatics
a)　buku3416@gmail.com
b)　suetsugu.koki@gmail.com

　

ンで行えるプレイは，自身のチームカラーの 1 羽のペンギンを選択し，動かすことである．ペンギンは任意の 6 方向に好きなだけ一直線に動かすことができる．ただし，途中で方向転換を行うことはできず，行先に他のペンギン（自分のチームのペンギンを含む）がいる場合や正六角形のマス目が無い場合は飛び越すことはできない．ペンギンが動いた後，そのペンギンが元いた正六角形のマス目は消滅し，そのマス目に描かれている魚の数だけプレイヤーにポイントが入る．どのペンギンも動かせなくなったとき，ゲームは終了する．最終的に最も多くのポイントを得たプレイヤーの勝ちである．

“それはオレの魚だ！” はプレイを進めると，ゲームの局面が徐々に分割されていく．組合せゲーム理論で開発された様々な手法（温度理論など）はそのような局面を上手に扱うことができるため，本ゲームは組合せゲーム理論を用いて解析することに適したゲームであると考えられる．

本研究では，後述のように，このゲームのルールを簡略化したゲームを用いた．

2. ゲームの定式化

2.1 ゲームの定義

組合せゲーム理論の代表的な書籍として知られる [1] や [6] などを参考に，ゲームの定式化を行う．本稿では，以下の性質を満たすものをゲームと呼ぶ．

- 2 人のプレイヤー（左と右と呼ぶ）が交互に手を打つ．
- お互いのプレイに隠された情報は無い．（完全情報性）
- 偶然の要素を含まない．（確定性）
- 有限の着手で終了する．
- 手を打てなくなったプレイヤーの負けである．（正規形）

G をゲームの局面とする．G の左選択肢（G において左が手を打ったあとの局面）の全体を $\mathcal{G}^L$ とし，同様に G の右選択肢（G において右が手を打ったあとの局面）の全体を $\mathcal{G}^R$ とする．ゲーム G はそれらを対にして

$$G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\} \tag{1}$$

と表すことにする．

手詰まりになったゲームは，それぞれの選択肢が存在しない．そのようなゲームを空ゲームといい，$\{\emptyset \mid \emptyset\}$ や $\{|\}$ などと書く．

一般に左選択肢と右選択肢が異なるゲームを非不偏ゲームと呼び，特に左選択肢と右選択肢が同じであるゲームを不偏ゲームと呼ぶ．例えば [7] は，“それはオレの魚だ！” を特殊に変形し，不偏ゲームとみなしたものと同型（ゲーム木が等しい）となるゲームの研究である．

2.2 帰結類

各ゲームは次の 4 つの帰結類のいずれかただ一つに属する．

- $\mathcal{N}\cdots$ 先手必勝
- $\mathcal{P}\cdots$ 後手必勝
- $\mathcal{L}\cdots$ 左勝ち
- $\mathcal{R}\cdots$ 右勝ち

また，ゲーム G の帰結類を $o(G)$ と書く．例えば G が左勝ちならば $o(G) = \mathcal{L}$ である．

2.3 ゲームの代数構造

ゲームには豊かな代数構造がある．ここでは特筆すべき性質について述べる．

Definition 2.1 (ゲームの和)．ゲーム $G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ とゲーム $H = \{\mathcal{H}^L \mid \mathcal{H}^R\}$ の和 $G + H$ を，次のように再帰的に定める．

$$G + H = \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}. \tag{2}$$

Definition 2.2 (ゲームの逆)．ゲーム $G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ の逆 $-G$ を，次のように再帰的に定める．

$$-G = \{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\}. \tag{3}$$

$G + (-H)$ は $G - H$ と書く．

Theorem 2.3 ([1])．(1) ゲームの和は結合法則と交換法則を満たす．
(2) 任意のゲーム G に対して，$0+G = G+0 = G$ である．
(3) 任意のゲーム G に対して，$-(-G) = G$ である．

Definition 2.4 (ゲームの同値性)．与えられたゲーム G, H と任意のゲーム X に対して，関係 $\equiv$ を次で定める．

$$G \equiv H \iff o(G + X) = o(H + X). \tag{4}$$

$G \equiv H$ であるとき，G と H は同値であるという．この関係 $\equiv$ はゲーム全体の集合上での同値関係となる．

2.4 標準形のゲーム

ゲームは，プレイヤーの有利・不利に影響のない無駄な手を省いて考察するのが良い．そのような無駄な手を省いたゲームを標準形のゲームという．

Theorem 2.5 (劣位な選択肢)．ゲーム

$$G = \{A, B, C, \ldots \mid H, I, J, \ldots\} \tag{5}$$

において $B \geq A$ ならば

$$G = \{B, C, \ldots \mid H, I, J, \ldots\} \tag{6}$$

に対して，$G \equiv G'$ となる．

Theorem 2.6 (打消し可能な選択肢)．ゲーム

$$G = \{A, B, C, \ldots \mid H, I, J, \ldots\} \tag{7}$$

に対して，A のある右選択肢 A^R が $G \geq A^R$ を満たすとき，$A^R = \{W, X, Y, \ldots \mid \ldots\}$ とすると，

$$G' = \{W, X, Y, \ldots, B, C, \ldots \mid H, I, J, \ldots\} \tag{8}$$

に対して，$G \equiv G'$ となる．

Definition 2.7 (標準形のゲーム)．ゲーム G および G の全局面が劣位な選択肢および打消し可能な選択肢を持たないとき，G を標準形という．

ゲームの定義 2.4 による同値類は，ただ一つであり，そのゲームで代表するのが自然である．以下，ゲームの同値類は標準形で表し，それをゲームの値という．

2.5 ゲームの値

組合せゲーム理論においてゲームの値について調べることは，ゲームを解析する上でとても重要である．以下，簡単にゲームの値について述べるが，特殊な値を持つゲームについての説明は省いている．

整数に対して次のように定義する．

- $0 \stackrel{def}{=} \{\emptyset \mid \emptyset\}$
- $n \stackrel{def}{=} \{n-1 \mid\}$
- $-n \stackrel{def}{=} \{\mid -(n-1)\}$

Example 2.8.

$$2 = \{1 \mid\} = \{\{0 \mid\} \mid\} = \{\{\{\mid\} \mid\} \mid\}. \tag{9}$$

2 進有理数について，次のように定義する．
$j > 0$ および奇数 m に対して

$$\frac{m}{2^j} \stackrel{def}{=} \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\} \tag{10}$$

Example 2.9.

$$\frac{19}{32} = \{\frac{18}{32} \mid \frac{20}{32}\} \equiv \{\frac{9}{16} \mid \frac{5}{8}\}. \tag{11}$$

2.6 ゲームの誕生日

ゲームの誕生日について述べる．ゲームの誕生日とは，一言でいえばゲーム木の高さのことである．

Definition 2.10 (誕生日)．ゲーム $G = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$ の誕生日を $b(G)$ と書き，次のように定義する．

$$b(G) = \max\{b(G') \mid G' \in \mathcal{G}^L \cup \mathcal{G}^R\} + 1. \tag{12}$$

ただし，$\mathcal{G}^L = \mathcal{G}^R = \emptyset$ のとき，$b(G) = 0$ であるとする．

$b(G) \leq n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ であるゲーム G を n 日目までに生まれたゲームと呼ぶ．

Proposition 2.11 ([1])．0 日目までに生まれたゲームはただ 1 つ，$0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ であり，1 日目までに生まれたゲームは次の 4 つである．

$$\begin{aligned} 0 &= \{\emptyset \mid \emptyset\}, \\ 1 = \{0 \mid \emptyset\}, -1 = \{\emptyset \mid 0\}, * &\stackrel{def}{=} \{0 \mid 0\}. \end{aligned}$$

1 日目までに生まれたゲームは 4 つ存在することから，2 日目までに生まれたゲームの左選択肢，右選択肢はそれぞれ高々 $2^4 = 16$ 通りあり，2 日目までに生まれたゲームは $16 \times 16 = 256$ 個存在しうる．しかし，実際にはそのうちの多くのゲームは定義 2.4 の意味で同値である．したがって，2 日目までに生まれたゲームについては次のことが知られている．

Theorem 2.12 ([1])．2 日目までに生まれたゲームは次の 22 個である．

$$\begin{aligned}
0 &= \{\emptyset \mid \emptyset\}, \\
1 = \{0 \mid \emptyset\}, -1 = \{\emptyset \mid 0\}, * &= \{0 \mid 0\}, \\
2 = \{1 \mid \emptyset\}, -2 &= \{\emptyset \mid -1\}, \\
1* \stackrel{def}{=} \{1 \mid 1\}, -1* &\stackrel{def}{=} \{-1 \mid -1\}, \\
\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}, -\frac{1}{2} &= \{-1 \mid 0\}, \\
\{1 \mid *\}, \{* \mid -1\}, \{1 \mid 0\}, &\{0 \mid -1\}, \\
\uparrow \stackrel{def}{=} \{0 \mid *\}, \downarrow &\stackrel{def}{=} \{* \mid 0\}, \\
\uparrow * \stackrel{def}{=} \{0, * \mid 0\}, \downarrow * &\stackrel{def}{=} \{0 \mid 0, *\}, \\
\{1 \mid 0, *\}, &\{0, * \mid -1\}, \\
*2 \stackrel{def}{=} \{0, * \mid 0, *\}, \pm 1 &\stackrel{def}{=} \{1 \mid -1\}.
\end{aligned}$$

3. 主結果

ある値を持つゲームが実際にどのように表現できるのかを知ることによって，ゲームを解析する際に，具体例を用いた考察が可能となる．2 日目までに生まれたゲームの構成について，コナネと呼ばれるゲームにおいて高々 8×8 の盤面に収まる高々 15 個のマス目を用いて構成できることが知られている [1]．今回我々は “それはオレの魚だ！”

●			○	
×	×	●	×	×

表 1　$\uparrow = \{0 \mid *\}$

を用いて，さらに少ないマス目によって 2 日目までに生まれたすべてのゲームを構成できた．本研究で用いたゲームは，“それはオレの魚だ！” の変種であり，以下にそのゲームのルールを示す．

- 2 人のプレイヤーが対戦する．
- 有限個の正方形のマス目の上に青い駒（黒丸）と赤い駒（白丸）が置いてある．
- 左のプレイヤーは青い駒（黒丸），右のプレイヤーは赤い駒（白丸）を一つ選び，水平または垂直方向に一直線にスライドさせることができる（ただし，他のコマや消えたマスを飛び越すことはできない）．
- 駒を動かした後，その駒が置いてあったマス目は消え，そのマスに駒を置くことはできない（× で表現した）．

本ゲームは，正方形盤面で行う，マスの魚の数が一定の “それはオレの魚だ！” と考えることができる．

Example 3.1. 次のゲーム（表 1）は $\uparrow = \{0 \mid *\}$ の値を持つゲームである．

次の定理が主結果である．

Theorem 3.2. 2 日目までに生まれた 22 個のすべてのゲームの局面は，2×6 または 3×4 の盤面に収まる高々 8 個のマス目からなるゲームによって構成できる．

Proof. 付録 A.1 に 3×4 の盤面に収まる 2 日目までに生まれた 22 個のすべてのゲームを列挙した．
2×6 の盤面についても同様に構成することができる．□

以下，いくつかの予想について述べる．

Conjecture 3.3. $1 \times n$ の盤面において，2 日目までに生まれた 22 個のゲームのうち，構成不可能なゲームが存在する．

Conjecture 3.4. 2×5 の盤面において，2 日目までに生まれた 22 個のゲームのうち，構成不可能なゲームが存在する．

Conjecture 3.5. 3×3 の盤面において，2 日目までに生まれた 22 個のゲームのうち，構成不可能なゲームが存在する．

4. まとめと今後の課題

今回，ボードゲーム “それはオレの魚だ！” の変種を用いて 2 日目までに生まれたすべてのゲームを構成することに成功した．本研究で用いた盤面のサイズは非常に小さく，このような小さな盤面で様々な値を持つ局面を構成できたことは，非不偏ゲームの構造や性質を具体例を用いながら考察することに貢献しうる．

3 日目までのゲームは 1474 個存在することが知られているが，今後これらが今回扱ったゲームで実現できるかどうかについて検討したい．

Nim と呼ばれる石取りゲームは，不偏ゲームのすべての値を構成することができるゲームとして知られており，そのようなゲームは *universal* と呼ばれる．本稿で述べた非不偏ゲームにおいて，一般化コナネは唯一 *universal* なゲームとして知られている [4],[5]．今回考察したゲームが *universal* であるかどうかについても検討したい．

また，より元のゲームへと近づけるため，正六角形盤面上で行う本ゲーム（すなわち，マスの魚の個数が一定である “それはオレの魚だ！”）についても検証した．

その結果，正方形盤面の結果ほどシンプルなものは見つけることができなかったが，2 日目までに生まれた 22 個のすべてのゲームを構成することができた（付録 A.2）．

これらのゲームの局面は実際の “それはオレの魚だ！” に登場しうるものであり，本研究が “それはオレの魚だ！” の局面分析に貢献できることを強く示している．

謝辞　本稿の執筆に際し，筑波大学アソシエイトの坂井公先生より多数のご助言をいただいたことを，ここに深謝する．

参考文献

[1] Albert, M. H., Nowakowski, R. J., Wolfe, D., *Lessons in play, an introduction to combinatorial Game theory*, pp130, A. K. Peters 2007.
[2] Berlekamp, E. R. and Wolfe, D., *Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point*, A. K. Peters 1994.
[3] Jakeliunas, A and Cornett, G., *Hey! That's My Fish* (それはオレの魚だ！), Fantasy Flight Games, 2011.
[4] Nowakowski, R., *Unsolved problems in combinatorial games*, Games of no Chance 5 pp125-168, MSRI Publ.70, Cambridge University Press.
[5] Santos, C., *A nontrivial surjective map onto the short Conway group*, Games of no Chance 5 pp271-284, MSRI Publ.70, Cambridge University Press.
[6] Siegel, A. N., *Combinatorial Game theory*, American Mathematical Society, 2013.
[7] Suetsugu, K. and Abuku, T., *Delete Nim* arXiv: 1908.07763, 2019.

付　　録

A.1　2 日目までに生まれた 22 個のすべてのゲーム〜正方形版〜

$\emptyset$

表 **A·1** $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$

	●

表 **A·2** $1 = \{0 \mid \emptyset\}$

○	

表 **A·3** $-1 = \{\emptyset \mid 0\}$

●		○

表 **A·4** $* = \{0 \mid 0\}$

		●

表 **A·5** $2 = \{1 \mid \emptyset\}$

○		

表 **A·6** $-2 = \{\emptyset \mid -1\}$

	●		○

表 **A·7** $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$

	○		●

表 **A·8** $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$

●	×	○
	●	

表 **A·9** $1* = \{1 \mid 1\}$

○	×	●
	○	

表 **A·10** $-1* = \{-1 \mid -1\}$

		●
○	×	×

表 **A·11** $\{1 \mid *\}$

		○
●	×	×

表 **A·12** $\{* \mid -1\}$

	×	○
●		

表 **A·13** $\{1 \mid 0\}$

	×	●
○		

表 **A·14** $\{0 \mid -1\}$

●	×	
		○
×	●	×

表 **A·15**　$\uparrow = \{0 \mid *\}$

○	×	
		●
×	○	×

表 **A·16**　$\downarrow = \{* \mid 0\}$

	×	×	
●			○
×	●	×	×

表 **A·17**　$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$

	×	×	
○			●
×	○	×	×

表 **A·18**　$\downarrow * = \{0 \mid 0, *\}$

×	×	○	×
●			○
	●	×	

表 **A·19**　$\{1 \mid 0, *\}$

×	×	●	×
○			●
	○	×	

表 **A·20**　$\{0, * \mid -1\}$

	×	○	×
●			○
×	●	×	

表 **A·21**　$*2 = \{0, * \mid 0, *\}$

●			○

表 **A·22**　$\pm 1 = \{1 \mid -1\}$

A.2　2 日目までに生まれた 22 個のすべてのゲーム～正六角形版～

図 **A·1**　$0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$

図 **A·2**　$1 = \{0 \mid \emptyset\}$

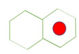

図 **A·3**　$-1 = \{\emptyset \mid 0\}$

図 **A·4**　$* = \{0 \mid 0\}$

図 **A·5**　$2 = \{1 \mid \emptyset\}$

図 **A·6**　$-2 = \{\emptyset \mid -1\}$

図 **A·7**　$\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$

図 **A·8**　$-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$

図 **A·9**　$1* = \{1 \mid 1\}$

図 **A·10**　$-1* = \{-1 \mid -1\}$

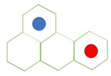

図 **A·11**　$\{1 \mid *\}$

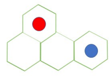

図 **A·12**　$\{* \mid -1\}$

図 **A·13**　$\{1 \mid 0\}$

図 **A·14**　$\{0 \mid -1\}$

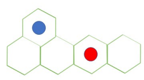

図 **A·15**　$\uparrow = \{0 \mid *\}$

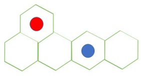

図 **A·16**　$\downarrow = \{* \mid 0\}$

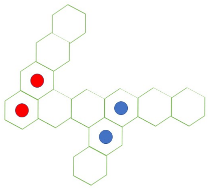

図 **A·17**　$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$

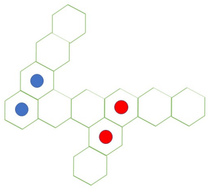

図 **A·18**　$\downarrow * = \{0 \mid 0, *\}$

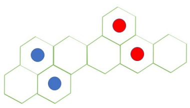

図 **A·19**　$\{1 \mid 0, *\}$

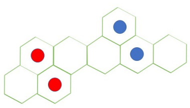

図 **A·20**　$\{0, * \mid -1\}$

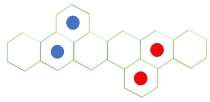

図 **A·21**　$*2 = \{0, * \mid 0, *\}$

図 **A·22**　$\pm 1 = \{1 \mid -1\}$